Über Folgen linearer Operationen

von

S. MAZUR und W. ORLICZ (Lwów).

In dieser Note übertragen wir verschiedene aus der Theorie der Räume vom Typus (B) bekannte Sätze über die Folgen von linearen Operationen auf den Fall der Räume vom Typus (F). Wir fügen auch einige Anwendungen hinzu, die vielleicht zeigen, welchen Nutzen man aus diesen Verallgemeinerungen ziehen kann.

1. Ein linearer, metrischer und vollständiger Raum X heißt ein *Raum vom Typus* (F), wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt (x', x'', x_n sind Punkte aus X und t, t_n reelle Zahlen): 1° $(x', x'') = (x'-x'', 0)$; 2° aus $x_n \to 0$ folgt $tx_n \to 0$; 3° aus $t_n \to 0$ folgt $t_n x \to 0$. In einem solchen Raume ist also jede Translation eine isometrische Abbildung; die Addition von Elementen $x'+x''$ ist stetig und die Multiplikation der Zahlen mit Elementen tx jedenfalls partiell stetig, nach t und x. Man bezeichnet mit $|x|$ die Entfernung des Punktes x vom Nullpunkt[1]).

Eine Punktfolge $\{x_n\}$ heißt *beschränkt*, wenn $t_n x_n \to 0$ für jede gegen 0 konvergente Zahlenfolge $\{t_n\}$; eine Menge $R \subset X$ heißt beschränkt, wenn jede aus ihr herausgegriffene Punktfolge beschränkt ist[2]). Daraus folgt sofort: Ist die Menge $R \subset X$ beschränkt, so gilt $t_n x \to 0$ gleichmäßig in R, für jede gegen 0 konvergente Zahlenfolge $\{t_n\}$; mit der Umkehrung dieses Satzes werden wir uns in 4 befassen. Ist die Menge $R \subset X$ beschränkt, so hat sie erst recht einen endlichen Durchmesser oder, was auf dasselbe hinauskommt, es gilt der folgende Satz:

[1]) Vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932, p. 35—37.

[2]) Diesen Begriff hat schon Herr S. Banach bei einer anderen Gelegenheit untersucht.

1. *Ist die Menge $R \subset X$ beschränkt, so gibt es eine Zahl N, so daß $|x| \leqslant N$ für $x \in R$ gilt.* — Denn sei $x_n \in R$, $|x_n| \to +\infty$; wir wählen natürliche Zahlen k_n, so daß $k_n \to +\infty$, $\frac{1}{k_n}|x_n| \to +\infty$; wegen $\left|\frac{1}{k_n} x_n\right| \geqslant \frac{1}{k_n}|x_n|$ ist dann auch $\left|\frac{1}{k_n} x_n\right| \to +\infty$; die Punktfolge $\{x_n\}$ ist also nicht beschränkt.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein, wohl aber z. B. für Räume vom Typus (B).

Unter einer *Operation* schlechthin werden wir immer eine in einem Raume X vom Typus (F) erklärte Funktion mit Werten aus einem ebensolchen Raume Y verstehen. Die Operation $U(x)$ heißt *additiv*, wenn stets $U(x'+x'') = U(x') + U(x'')$; eine additive und stetige Operation nennen wir *linear*. Ist eine additive Operation in einem Punkte stetig, so ist sie schon linear; eine lineare Operation $U(x)$ ist homogen, d. h. stets $U(tx) = tU(x)$[3]).

Ist $U(x)$ eine lineare Operation, so ist ersichtlich das Bild $U(R)$ einer beschränkten Menge $R \subset X$ auch beschränkt; die Umkehrung gilt in der Form:

2. *Führt eine additive Operation $U(x)$ jede gegen 0 konvergente Punktfolge in eine beschränkte über, so ist sie linear.* — In der Tat sei $x_n \in X$, $x_n \to 0$; wir wählen natürliche Zahlen k_n, so daß $k_n \to +\infty$, $k_n|x_n| \to 0$; wegen $|k_n x_n| \leqslant k_n |x_n|$ ist dann auch $k_n x_n \to 0$; nach Annahme ist die Folge $\{U(k_n x_n)\}$ beschränkt, mithin $U(x_n) = \frac{1}{k_n} U(k_n x_n) \to 0$; die Operation $U(x)$ ist also im Nullpunkte stetig.

2. Nun mögen einige Eigenschaften von Folgen linearer Operationen bewiesen werden. Den Ausgangspunkt bildet der folgende Satz:

3. *Ist die Folge der linearen Operationen $\{U_n(x)\}$ in jedem Punkte beschränkt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|U_n(x)| \leqslant \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$ für $|x| \leqslant \delta$ gilt*[4]). — Bei natürlichem k sei R_k die Menge der Punkte x, für die $\left|\frac{1}{k} U_n(x)\right| \leqslant \varepsilon/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$; die Mengen R_k sind offenbar abgeschlossen und $X = R_1 + R_2 + \ldots$;

[3]) l. c. [1]), p. 23 und 36—37.

[4]) Für den Fall der Räume vom Typus (B) vgl. l. c. [1]), p. 80.

da der Raum X von zweiter Kategorie in sich ist, so enthält eine der Mengen R_k, etwa R_{k_0}, eine Kugel; sei x_0 ihr Mittelpunkt und r ihr Radius. Dann ist $\left|\frac{1}{k_0} U_n(x_0+x)\right| \leqslant \varepsilon/2$ für $|x| \leqslant r$ und insbesondere $\left|\frac{1}{k_0} U_n(x_0)\right| \leqslant \varepsilon/2$ $(n=1,2,\ldots)$. Wegen $\left|\frac{1}{k_0} U_n(x)\right| \leqslant \left|\frac{1}{k_0} U_n(x_0+x)\right| + \left|\frac{1}{k_0} U_n(x_0)\right|$ ist mithin $\left|\frac{1}{k_0} U_n(x)\right| \leqslant \varepsilon$ für $|x| \leqslant r$, und schließlich $|U_n(x)| = \left|\frac{1}{k_0} U_n(k_0 x)\right| \leqslant \varepsilon$ für $|x| \leqslant \delta$ $(n=1, 2,\ldots)$, falls nur $|k_0 x| \leqslant r$ für $|x| \leqslant \delta$.

Ohne weiteres ist zu sehen, daß auch die Umkehrung von 3 gilt. Es sei hier noch folgendes bemerkt: Die im Satze 3 vorkommende Eigenschaft: (α) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $|U_n(x)| \leqslant \varepsilon$ $(n=1,2,\ldots)$ für $|x| \leqslant \delta$ gilt — ist mit jeder der folgenden Eigenschaften äquivalent: (β) Ist $x_n \in X$, $x_n \to 0$, so ist $U_n(x_n) \to 0$; (γ) Ist die Menge $R \subset X$ beschränkt, so gilt $t_n U_n(x) \to 0$ gleichmäßig in R, für jede gegen 0 konvergente Zahlenfolge $\{t_n\}$; (δ) Ist die Menge $R \subset X$ beschränkt. so ist es auch die Menge $U_1(R) + U_2(R) + \ldots$. Wir übergehen den einfachen Beweis.

Als eine interessante Anwendung von 3 ergibt sich zuerst, daß *die Multiplikation der Zahlen mit Elementen* nicht nur partiell stetig, sondern auch *stetig ist*[5]). Man hat offenbar nur zu zeigen: Ist $\{t_n\}$ eine gegen 0 konvergente Zahlenfolge, so ist $t_n x_n \to 0$, für jede gegen 0 konvergente Punktfolge $\{x_n\}$. Wir setzen $U_n(x) = t_n x$ $(n=1,2,\ldots)$ im Raume X; die Folge der linearen Operationen $\{U_n(x)\}$ ist offenbar in jedem Punkte beschränkt; nach dem Vorangehenden steht ihr also die Eigenschaft (β) zu, womit schon alles bewiesen ist.

Unter Berufung auf letztes Ergebnis folgt leicht:

4. *Gibt es Zahlen $t_n \neq 0$, so daß $t_n x \to 0$ gleichmäßig in $R \subset X$ gilt, so ist die Menge R beschränkt.* — Angenommen in der Tat, es gäbe eine aus R herausgegriffene Punktfolge $\{x_n\}$ und eine gegen 0 konvergente Zahlenfolge $\{s_n\}$, so daß stets $|s_n x_n| \geqslant \varepsilon > 0$; sei $\{k_n\}$ eine Indizesfolge mit $\frac{s_{k_n}}{t_n} \to 0$; wegen $t_n x_{k_n} \to 0$

[5]) l. c. [1]), p. 232.

müßte dann auch $s_{k_n} x_{k_n} = \frac{s_{k_n}}{t_n}(t_n x_{k_n}) \to 0$ gelten, entgegen der Annahme.

Aus der Stetigkeit der Multiplikation ergibt sich noch: Jede konvergente Punktfolge ist beschränkt. Konvergiert also die Folge der linearen Operationen in jedem Punkte, so ist sie auch in jedem Punkte beschränkt; wir behaupten nun:

5. *Ist die Folge der linearen Operationen $\{U_n(x)\}$ in jedem Punkte beschränkt und in den Punkten einer dichten Menge $R \subset X$ konvergent, so konvergiert sie in jedem Punkte*[6]). — Zum Beweise sei $x_0 \in X$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben; nach 3 gibt es ein $\delta > 0$, so daß $|U_n(x)| \leqslant \varepsilon$ $(n=1,2,\ldots)$ für $|x| \leqslant \delta$ gilt; da ferner die Menge R dicht ist, so kann man ein $x_1 \in R$ mit $|x_0 - x_1| \leqslant \delta$ wählen; dann ist $|U_n(x_0) - U_n(x_1)| \leqslant |U_n(x_0 - x_1)| \leqslant \varepsilon$ $(n=1,2,\ldots)$. Wegen $|U_p(x_0) - U_q(x_0)| \leqslant |U_p(x_0) - U_p(x_1)| + |U_p(x_1) - U_q(x_1)| + |U_q(x_1) - U_q(x_0)|$ erhält man so $|U_p(x_1) - U_q(x_0)| \leqslant 3\varepsilon$, für die der Bedingung $|U_p(x_1) - U_q(x_1)| \leqslant \varepsilon$ genügenden — und demnach für alle hinreichend großen — Indizes p, q; die Folge $\{U_n(x_0)\}$ ist also konvergent.

Sei Φ ein aus beschränkten Funktionen bestehendes Orthogonalsystem in $\langle 0,1 \rangle$; es bezeichne $s_n(x)$, für jede dem Raume (L) angehörende Funktion $x(t)$, die n-te Partialsumme der Entwicklung von $x(t)$ nach dem System Φ. Sei ferner $M(t)$ eine für alle reelle t erklärte, stetige und für $t > 0$ monoton wachsende Funktion mit den Eigenschaften: $M(0) = 0$, $M(-t) = M(t) > 0$ für $t > 0$, $M(t) \to +\infty$ für $t \to +\infty$. Wir behaupten: *Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int_0^1 M(s_n(x))\,dt < +\infty$ für alle $x \in (L)$, so ist die Folge $\{s_n(x)\}$ für jedes $x \in (L)$ asymptotisch konvergent.* Denn zunächst sind die Operationen $s_n(x)$ offenbar linear, wenn man sie als Operationen mit den dem Raume (S) der meßbaren Funktionen angehörenden Werten betrachtet[7]); ferner ist ersichtlich die Folge $\{s_n(x)\}$ in den Punkten einer in (L) dichten Menge konvergent. Mit Rücksicht auf 5 bleibt uns noch also übrig zu zeigen: Die Folge $\{s_n(x)\}$ ist für jedes $x \in (L)$ beschränkt. Sei $x_0 \in (L)$ und $\{t_n\}$ eine gegen 0 konvergente Zahlenfolge. Es bezeichne $E_{n\varepsilon}$ — bei natürlichem n und $\varepsilon > 0$ — die Menge aller $t \in \langle 0,1 \rangle$ mit $|t_n s_n(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Aus

$$\int_0^1 M(s_n(x_0))\,dt \geqslant \int_{E_{n\varepsilon}} M\left(\frac{\varepsilon}{t_n}\right) dt = |E_{n\varepsilon}|\, M\left(\frac{\varepsilon}{t_n}\right), \quad |E_{n\varepsilon}| \leqslant \frac{1}{M\left(\frac{\varepsilon}{t_n}\right)} \int_0^1 M(s_n(x_0))\,dt$$

[6]) Für den Fall der Räume vom Typus (B) vgl. l. c. [1]), p. 79—80

[7]) Wegen der Definition des Raumes (S) vgl. l. c. [1]), p. 9—10.

und $M\left(\frac{\varepsilon}{t_n}\right) \to +\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_0^1 M(s_n(x_0))\, dt < +\infty$ ergibt sich sofort $|E_{n\varepsilon}| \to 0$; demnach ist die Folge $\{t_n s_n(x_0)\}$ asymptotisch, d. h. im Raume (S), gegen 0 konvergent.

Es gilt weiter der Satz:

6. *Ist die Folge der linearen Operationen $\{U_n(x)\}$ in jedem Punkte gegen $U(x)$ konvergent, so ist die Operation $U(x)$ linear*[8]. — Denn zuerst ist offenbar die Operation $U(x)$ additiv; es genügt also zu zeigen, daß sie im Nullpunkte stetig ist. Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben; kraft 3 gibt es ein $\delta > 0$, so daß $|U_n(x)| \leqslant \varepsilon$ $(n=1,2,\ldots)$ für $|x| \leqslant \delta$ gilt; durch Grenzübergang folgt daraus $|U(x)| \leqslant \varepsilon$ für $|x| \leqslant \delta$, und damit ist schon alles bewiesen.

Zum Schluß fügen wir noch einige Bemerkungen über das Prinzip der Kondensation der Singularitäten. Sei $\{U_n(x)\}$ eine Folge von linearen Operationen und B die lineare Menge der Punkte, in denen diese Folge beschränkt ist. Dann gilt: *B ist entweder von erster Kategorie in X oder mit X identisch*[9]. Um dies einzusehen genügt es zu bemerken, daß die Behauptung des Satzes 3 ihre Gültigkeit behält, wenn wir voraussetzen, daß B von zweiter Kategorie in X ist; der Beweis verbleibt übrigens fast ohne Änderung. Ist X die Konvergenzmenge der Folge $\{U_n(x)\}$, so erkennt man ebenso leicht: *K ist entweder von erster Kategorie in X oder mit X identisch*[10]. Angenommen in der Tat, K sei von zweiter Kategorie in X; wegen $K \subset B$ muß dann $B = X$ sein; da aber ersichtlich K als eine lineare Menge von zweiter Kategorie in X, umsomehr in X dicht ist, so folgt aus 5 die Richtigkeit unserer Bemerkung. Nehmen wir jetzt an, daß eine Doppelfolge linearer Operationen $\{U_{pq}(x)\}$ gegeben ist und bei jedem p ein Punkt x_p existiert, in welchem die Folge $U_{p1}(x), U_{p2}(x), \ldots$ nicht beschränkt (bzw. divergent) ist; nach dem Obigen ist dann die Menge B_p (bzw. K_p) der Punkte, in denen diese Folge beschränkt (bzw. konvergent) ist, von erster Kategorie in X, und folglich besitzt die Menge $B_1 + B_2 + \ldots$ (bzw. $K_1 + K_2 + \ldots$) dieselbe Eigenschaft; insbesondere also kann man einen Punkt x_0

[8]) Dies ist in einem allgemeineren Satze von Herrn S. Banach enthalten; l. c. [1]), p. 23—24.

[9]) Für den Fall der Räume vom Typus (B) vgl. l. c. [1]), p. 80.

[10]) Dies ist ein spezieller Fall eines Satzes von Herrn S. Banach; l. c. [1]), p. 24.

so wählen, daß keine der Folgen $U_{p_1}(x_0), U_{p_2}(x_0), \ldots$ beschränkt (bzw. konvergent) ist[11]).

3. Die Operation $U(x)$ heißt *quasi-linear*, wenn sie stetig ist und dabei stets $|U(x'+x'')| \leqslant |U(x')| + |U(x'')|$, $|U(tx)| = |t\, U(x)|$. Der Satz 3 bleibt wahr auch für quasi-lineare Operationen:

3·1. *Ist die Folge der quasi-linearen Operationen $\{U_n(x)\}$ in jedem Punkte beschränkt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|U_n(x)| \leqslant \varepsilon$ $(n=1,2,\ldots)$ für $|x| \leqslant \delta$ gilt;*

der Beweis verläuft ohne Änderung. Als Analogon zu 5 erhalten wir:

5·1. *Ist die Folge der quasi-linearen Operationen $\{U_n(x)\}$ in jedem Punkte beschränkt, und konvergiert die Folge $\{|U_n(x)|\}$ in den Punkten einer dichten Menge $R \subset X$, so ist die Folge $\{|U_n(x)|\}$ in jedem Punkte konvergent;*

der Beweis von 5 behält seine Gültigkeit, wenn wir in ihm $|U_n(x)|$ statt $U_n(x)$ setzen und 3·1 berücksichtigen. Schließlich, auf dieselbe Weise wie 6 aus 3, folgt aus 3·1:

6·1. *Ist die Folge der quasi-linearen Operationen $\{U_n(x)\}$ in jedem Punkte gegen $U(x)$ konvergent, so ist die Operation $|U(x)|$ stetig.*

Sei $\{U_n(x)\}$ eine Folge von linearen Operationen mit den dem Raume (S) der meßbaren Funktionen angehörenden Werten; es bezeichne $U_n(x;t)$, für jedes $x \in X$, den Wert der Funktion $U_n(x)$ im Punkte t. Von Herrn S. Banach rührt der folgende Satz her[12]): *Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |U_n(x;t)| < +\infty$ fast überall für alle $x \in X$ und konvergiert die Folge $\{U_n(x;t)\}$ fast überall für alle x, die eine in X dichte Menge bilden, so ist sie für jedes $x \in X$ fast überall konvergent.* Mit Benutzung von 6·1 kann man nun den Beweis dieses Satzes in einfacher Weise so erbringen. Wir setzen $V_n(x;t) = \max\ (|U_1(x;t)|, |U_2(x;t)|, \ldots |U_n(x;t)|)$ $(n = 1,2,\ldots)$ und $V(x;t) =$ obere Grenze $(|U_1(x;t)|, |U_2(x;t)|, \ldots)$, $W(x;t) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, U_n(x;t) - \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, U_n(x;t)$ für $x \in X$ und fast alle $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Die Operationen $V_n(x)$ sind offenbar quasi-linear, wenn man sie als Operationen mit Werten aus dem Raume (S) betrachtet; da ferner, wie aus der Voraussetzung sofort folgt, die Folge $\{V_n(x;t)\}$ fast überall — umsomehr also asymptotisch — für jedes $x \in X$ gegen $V(x;t)$ konvergent ist, so konvergiert die Folge $\{V_n(x)\}$ in jedem Punkte gegen $V(x)$. Kraft 6·1 ist also die Operation $V(x)$ im Nullpunkte stetig und wegen der evidenten Ungleichung $|W(x)| \leqslant |2V(x)|$ besitzt die Operation $W(x)$ dieselbe Eigenschaft; da außerdem stets $||W(x')| - |W(x'')|| \leqslant |W(x'-x'')|$, so ist die Operation $|W(x)|$ stetig. Nach der Annahme ist nun $W(x) = 0$ in den Punkten einer in X dichten Menge; aus der Stetigkeit von $|W(x)|$ ergibt sich, daß dies in jedem Punkte stattfindet, wie behauptet.

(Reçu par la Rédaction le 12. 12. 1933).

[11]) Vgl. l. c. [1]), p. 24—25 und 81.

[12]) S. Banach, Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires, Bull. Sc. Math. 50 (1926) p. 27—32, 36—43; vgl. auch: S. Saks, Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions, Fund. Math. 10 (1927) p. 186—196.