Sur les suites complètes

par

H. STEINHAUS (Lwów).

La méthode dont je me sers dans ce qui suit est due à M. O. Szász[1]). Il l'emploie pour démontrer que la suite

$$\{(1+t_\nu x)^\varrho\}$$

est *complète* dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ quand ϱ est réel et différent de $0, 1, 2 \ldots$, t_ν étant le terme d'une suite positive dont la limite est inférieure à 1; le cas ou tous les t_ν seraient égaux à partir d'un ν est exclu. La suite est incomplète pour les valeurs défendues de ϱ.

La démonstration prête facilement à la généralisation suivante:

Théorème I. Soit $F(x)$ une fonction analytique et régulière dans un domaine qui contient le segment $\langle 0, R\rangle$ de l'axe réel positif; elle soit réelle pour x réel et son développement

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{1}$$

ait assez des coefficients a_{n_j} non nuls pour rendre divergente la série $\sum\limits_{j=1}^{\infty}{}' 1/n_j$.

Soit $\{t_\nu\}$ une suite à termes réels positifs, parmi lesquels il y a une infinité des différents; soit $t_\infty = \lim t_\nu$ et a un nombre réel tel que

$$0 \leqslant a \,.\, t_\infty \leqslant R.$$

Alors les fonctions

[1]) Über die Approximation stetiger Funktionen durch gegebene Funktionenfolgen, Math. Ann. 104 (1930) p. 155—160.

$$\{\varphi_\nu(x) = F(t_\nu x)\} \tag{2}$$

sont définies pour $0 \leqslant x \leqslant a$ à partir d'un ν et constituent dans cet intervalle une *suite complète*.

Démonstration. Soit x un nombre quelconque de l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ et t assujetti à la condition

$$|ta| < \varrho,$$

ϱ étant le rayon de convergence de (1). Le développement

$$F(tx) = a_0 + a_1 tx + a_2 t^2 x^2 + \ldots$$

sera valable et la série uniformément convergente en x pour t fixe. Si donc $f(x)$ est une fonction sommable pour $0 \leqslant x \leqslant a$, on aura

$$G(t) = \int_0^a f(x) F(tx)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k t^k \tag{3}$$

avec

$$b_k = \int_0^a x^k f(x)\, dx \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{4}$$

La fonction $G(t)$, dont le développement (3) ne vaut que pour $|ta| < \varrho$, est regulière pour $t = t_\infty$, comme il résulte de sa définition par l'intégrale (3). Quand on suppose que l'on ait

$$G(t_\nu) = 0 \tag{5}$$

pour tous les ν, on obtient

$$G(t) \equiv 0,$$

ce qui implique

$$a_k b_k = 0$$

pour tout les k, donc $b_{n_j} = 0$ pour tous les j. La définition (4) et la divergence de $\sum\limits_{j=1}^{\infty}{}' 1/n_j$ donnent par le théorème de Müntz[2]) — $f(x) = 0$ presque partout. Or, la supposition (5) est équivalente — à cause de (2) et (3) — à

[2]) Ch. H. Müntz, Über den Approximationssatz von Weierstrass, Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, p. 303—312. Voir aussi: O. Szász, Math. Annalen 77 (1916) p. 482—496.

$$\int_0^a f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx = 0 \qquad (\nu)$$

et la conclusion $f(x)=0$ établit que $\{\varphi_\nu\}$ est une suite complète, c. q. f. d.

Remarque 1. La condition $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j=\infty$ est essentielle; d' après M. Müntz[2]), il existe, pour une suite des $\{n_j\}$ qui ne remplit pas cette condition, une fonction $f(x)$ au carré sommable, qui n'est pas presque partout nulle et qui annulle les „moments" (4) pour $k=n_j\,(j=1,2\ldots)$. Cette fonction annulle évidemment $G(t)$ quelque soit t. Il s'ensuit que les fonctions $F(tx)$ ne constituent plus un ensemble complet, même quand on fait varier t d'une manière continue (entre 0 et t_∞). C'est le cas qui se présente pour les suites de M. Szász quand ϱ prend une de valeurs défendues $(0,1,2\ldots)$; en effet, la suite $\{n_j\}$ devient alors finie.

Remarque 2. Quand tous les termes t_ν sont différents, chaque suite partielle de (2) est aussi complète, ce qui est évident.

Remarque 3. M. Mazur a cherché dans les espaces abstraits (B) des suites qui jouissent de la propriété de la remarque précédente. La solution positive, qu'il a trouvée indépendamment de ce qui vient d'être écrit ici, est semblable[3]).

Exemples. $\sin x$, $\sin^2 x$, e^{x^2}, sont des fonctions $F(x)$ entières; $\sum_{1}^{\infty} 1/n_j=\infty$. Soit b un nombre réel quelconque, a un nombre réel positif; les suites

$$\left\{\sin\left(b+\frac{1}{\nu}\right)x\right\},\ \left\{\sin^2\left(b+\frac{1}{\nu}\right)x\right\},\ \left\{e^{\frac{x^2}{\nu}}\right\}$$

sont complètes dans $\langle 0,a\rangle$, donc dans chaque intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$. Les fonctions $\frac{1}{1+x}$, $\sqrt{1+x}$, $\log(1+x)$ sont régulières dans $\langle 0,R\rangle$ si $R<1$; il s'ensuit que les suites $(t_\nu=1/\nu)$

$$\left\{\frac{1}{x+\nu}\right\},\ \left\{\sqrt{x+\nu}\right\},\ \left\{\log(x+\nu)\right\}'$$

[3]) Non publié; mention autorisée par M. Mazur.

sont complètes dans $\langle 01\rangle$; $\{\,\}'$ signifie que 1 fait partie de la suite.

Théorème II. $F(x)$ et $\{t_\nu\}$ remplissant les conditions du théorème I, la suite $\{\varphi_\nu(x)\}'$ est une base pour les fonctions continues dans l'intervalle $\langle 0,a\rangle$.

Démonstration. Avec $F(x)$ $\frac{d}{dx}F(x)$ jouit des propriétés qui servent d'hypothèse pour le théorème I. La suite $\left\{\frac{d}{dx}\varphi_\nu(x)\right\}$ est donc complète. Soit $k=0,1,\ldots$; $\varepsilon>0$. On peut déterminer $c_1, c_2 \ldots c_n$ de manière à satisfaire à l'inégalité

$$\int_0^a |\,x^k - c_1\varphi_1'(x)\ldots - c_n\varphi_n'(x)\,|\,dx<\varepsilon$$

ce qui implique

$$\left|\int_0^u\left[x^k-\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j'(x)\right]dx\right|<\varepsilon$$

et

$$\left|\frac{u^{k+1}}{k+1}-\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(u)-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(0)\right|<\varepsilon$$

pour $0\leqslant u\leqslant a$. Il s'ensuit que 1 et les fonctions $\varphi_\nu(x)$ multipliés par des constantes convenables suffisent pour l'approximation uniforme de *puissances* $u^k\,(k=0,1,2\ldots)$ dans $\langle 0,a\rangle$; le théorème de Weierstrass sur l'approximation de fonctions continues par des polynômes achève la démonstration.

(Reçu par la Rédaction le 30. 11. 1933).