Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge [1])

von

J. SCHREIER und S. ULAM (Lwów).

Wir betrachten die eineindeutigen Abbildungen $f(n)$, der Menge N aller natürlichen Zahlen auf sich selbst. Diese bilden in Bezug auf die Zusammensetzungsregel $fg = f\{g(n)\}$ eine Gruppe, die wir in Hinblick auf die Bedeutung der symmetrischen Gruppe S_n, die aus allen eineindeutigen Abbildungen einer Menge von n Elementen auf sich selbst besteht, mit S_∞ bezeichnen. In derselben Analogie nennen wir die Abbildungen auch Permutationen.

Wir werden in dieser Arbeit zwei Sätze über die Gruppe S_∞ beweisen. Der erste trägt einen rein gruppentheoretischen Charakter und führt zur Bestimmung aller Normalteiler von S_∞. Der zweite, der auch rein kombinatorisch formuliert werden könnte, erhält eine klarere Fassung, wenn man ihn in folgende topologische Form kleidet. Man bezeichnet als Abstand der Permutationen $f(n)$ und $g(n)$ die Zahl

$$\text{(B)}\qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\frac{|f(n)-g(n)|}{1+|f(n)-g(n)|}+\frac{|f^{-1}(n)-g^{-1}(n)|}{1+|f^{-1}(n)-g^{-1}(n)|}\right).$$

Dann wird S_∞ ein metrischer, vollständiger Raum [2]). Der Satz 2 besagt dann, daß dieser Raum eine überall dichte Untergruppe enthält, die von drei Elementen erzeugt wird.

§ 1. Die Normalteiler von S_∞.

1. Bezeichnungen. Es sei N die Menge der natürlichen Zahlen, $f(n)$ eine Permutation dieser Menge. $f^{-1}(n)$ bedeute die

[1]) S. unsere Note in C. R. 197 (1933) p. 54—55. Sur le groupe des permutations de la suite des nombres naturels.

[2]) S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, p. 229.

zu $f(n)$ inverse Permutation, $f^k(n)$ die k-mal angewendete Iteration von $f(n)$, $f^{-k}(n)$ aber die k-mal angewendete Iteration von $f^{-1}(n)$, $f^0(n)$ die Identität.

Man kann für die unendlichen Permutationen eine der aus der endlichen Gruppentheorie wohlbekannten analoge Zerlegung in elementfremde Zyklen definieren. Am einfachsten geschieht dies auf folgende Weise. $f(n)$ sei die gegebene Permutation. Man teilt die natürlichen Zahlen in Klassen, indem man zwei Zahlen n_1 und n_2 zu derselben Klasse rechnet, wenn es zwei ganze Zahlen i_1 und i_2 gibt, so daß $f^{i_1}(n_1)=f^{i_2}(n_2)$ ist.

Nun sieht man leicht, daß wenn eine Klasse aus endlich vielen Elementen besteht, diese so angeordnet werden können

$$(n_1, n_2, \ldots n_s)$$

daß $n_2=f(n_1)$, $n_3=f(n_2)$ ... $n_1=f(n_s)$ ist. Wir sagen dann: $n_1, n_2, \ldots n_s$ bilden einen s-Zyklus. Besteht dagegen eine Klasse aus unendlich vielen Elementen, dann können diese so in eine Folge vom Typus $\omega^*+\omega$ angeordnet werden

$$(\ldots n_{-3}, n_{-2}, n_{-1}, n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots),$$

daß $f(n_j)=n_{j+1}$ für alle ganzen j ist. Wir sagen dann: $\ldots n_{-3}, n_{-2}, n_{-1}, n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots$ bilden einen unendlichen Zyklus.

Bei gegebenen f und natürlichem s bezeichnen wir mit $k_f(s)$ bzw. $k_f(\infty)$ die evt. unendliche Anzahl von s-Zyklen bzw. unendlichen Zyklen, die bei der oben angegebenen Zerlegung von f in Zyklen entsteht. Nun kann man eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, daß zwei Permutationen f und g miteinander konjugiert sind. (D. h. daß es eine Permutation h gibt, so daß $h^{-1}fh(n)=g(n)$ ist). Sie besteht darin, daß für jedes natürliche s, $k_f(s)=k_g(s)$ und $k_f(\infty)=k_g(\infty)$ ist. (Das Gleichheitszeichen ist im Sinne gleicher Mächtigkeit zu verstehen).

Eine Permutation nennen wir *endlich*, wenn $f(n) \neq n$ nur für endlich viele n gilt.

2. Wir formulieren jetzt den ersten Satz:

Satz 1. *Ein (von S_∞ verschiedener) Normalteiler D kann nur aus lauter endlichen Permutationen bestehen.*

Wir setzen also voraus, daß D wenigstens eine nicht endliche Permutation φ enthält und wollen beweisen, daß $D=S_\infty$ ist. Wie man leicht einsieht, ist dann entweder

$$\sum_{s=2}^{\infty} k_\varphi(s) = \infty \tag{1}$$

oder

$$k_\varphi(\infty) > 0. \tag{2}$$

3. Lemma 1. D enthält ein f mit $k_f(2) = \infty$.

Beweis. Es sei zunächst (1) erfüllt, und

$$(n_1, n_2, \dots n_{k_1})\,(n_{k_1+1}, \dots n_{k_2}) \dots (n_{k_i+1}), \dots n_{k_{i+1}}) \dots \tag{3}$$

die laut (1) in der Zerlegung von φ enthaltene unendliche Folge von endlichen Zyklen, deren jeder mindestens zwei Zahlen enthält. Wir bestimmen eine Permutation $\psi(n)$ so, daß sie die Zyklen

$$\begin{gathered}(n_2, n_{k_1+1}, n_3, \dots n_{k_1})\,(n_{k_1+2}, n_1, n_{k_1+3}, \dots n_{k_2}) \\ \dots (n_{k_{2i}+2}, n_{k_{2i+1}+1}, n_{k_{2i}+3}, \dots n_{k_{2i+1}})\,(n_{k_{2i+1}+2}, n_{k_{2i}+1}, \\ \dots n_{k_{2i+1}+3}, \dots n_{k_{2i+2}}) \dots\end{gathered} \tag{4}$$

bildet, für die Werte von n, die in (3) nicht auftreten, aber mit φ übereinstimmt. Man sieht sofort, daß $k_\varphi(s) = k_\psi(s)$ für alle s und $k_\varphi(\infty) = k_\psi(\infty)$ ist, daß also ψ mit φ konjugiert ist. Da D Normalteiler ist und laut Voraussetzung $\varphi \in D$ ist, so ist auch $\psi \in D$. Wir setzen $f(n) = \psi\varphi(n)$; f gehört also zu D. Die Anwendung von (3) und (4) ergibt für jedes i: $\varphi(n_{k_{2i}+1}) = n_{k_{2i}+2}$, also $f(n_{k_{2i}+1}) = \psi\varphi(n_{k_{2i}+1}) = \psi(n_{k_{2i+1}+2}) = n_{k_{2i+1}+1}$, und $\varphi(n_{k_{2i+1}+1}) = n_{k_{2i+1}+2}$, also $f(_{k_{2i+1}+1}) = \psi\varphi(n_{k_{2i+1}+1}) = \psi(n_{k_{2i+1}+2}) = n_{k_{2i}+1}$. Bei jedem i bilden daher $n_{k_{2i+1}+1}$ und $n_{k_{2i}+1}$ einen 2-Zyklus, der in der Entwicklung von f auftreten wird. Also ist $k_f(2) = \infty$.

Ist (1) nicht erfüllt, dann gilt (2). Es sei

$$(\dots n_0, n_1, n_2, n_3, \dots) \tag{5}$$

einer der unendlichen Zyklen, die in der Entwicklung von φ, laut (2), auftreten. Wir bestimmen eine Permutation $\psi(n)$ so, daß sie den Zyklus

$$(\dots n_0, n_2, n_3, n_4, n_1, \dots n_{4i+2}, n_{4i+3}, n_{4i+4}, n_{4i+1} \dots) \tag{6}$$

bildet, für $n \neq n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$ dagegen mit φ übereinstimmt. Ebenso wie früher erkennt man, daß φ und ψ konjugiert sind, daher $\psi \in D$, und $f(n) = \psi\varphi(n) \in D$. Die Anwendung von (5) und (6) ergibt: $\varphi(n_{4i+1}) = n_{4i+2}$, also $f(n_{4i+1}) = \psi\varphi(n_{4i+1}) = \psi(n_{4i+2}) = n_{4i+3}$ und $f(n_{4i+3}) = \psi\varphi(n_{4i+3}) = \psi(n_{4i+4}) = n_{4i+1}$. Bei jedem natürlichen i bilden also n_{4i+1} und n_{4i+3} einen 2-Zyklus, der in der Entwicklung von f auftreten wird. Also ist $k_f(2) = \infty$.

4. Es bezeichne U die durch die Bedingungen $k_f(s) = \infty$, für $s = 1, 2, \dots$ und $k_f(\infty) = \infty$ bestimmte Klasse konjugierter Permutationen.

Lemma 2. D enthält U.

Beweis. Laut Lemma 1 enthält D ein f_1 mit $k_{f_1}(2) = \infty$. Die Entwicklung von f_1 enthält also die 2-Zyklen $(n_1, n_2)\,(n_3, n_4)\,(n_5, n_6), \dots$ f_2 werde durch die Bedingungen bestimmt: $f_2(n) = f_1(n)$ für $n \neq n_1, n_2, n_3 \dots$; für diese n aber bildet f_2 die Zyklen $(n_1, n_2)\,(n_3, n_5)\,(n_4, n_6) \dots (n_{6k+1}, n_{6k+2})\,(n_{6k+3}, n_{6k+5})\,(n_{6k+4}, n_{6k+6}) \dots$. Man sieht leicht ein, daß $f_2(n)$ zu $f_1(n)$ konjugiert ist, daß also $f(n) = f_2 f_1(n)$ zu D gehört, daß $f(n_1) = n_1$, $f(n_2) = n_2$, $f(n_7) = n_7$, $f(n_8) = n_8 \dots$, also

$$k_f(1) = \infty \tag{7}$$

und $f(n_3) = n_6$, $f(n_6) = n_3$, $f(n_4) = n_5$, $f(n_5) = n_4 \dots$, also

$$k_f(2) = \infty \tag{8}$$

ist. Um mehrfache Indizes zu vermeiden, bezeichnen wir wieder die Zahlen, die in f laut (8) 2-Zyklen bilden, mit

$$(n_1, n_2)\,(n_3, n_4)\,(n_5, n_6) \dots . \tag{9}$$

Wir teilen die Zyklen (9) in unendlich viele unendliche Mengen $S_1, S_2, \dots$. Die Menge S_{2q+1} bestehe aus den Zyklen

$$(\lambda_1^q, \lambda_2^q)\,(\lambda_3^q, \lambda_4^q) \dots \qquad (q = 1, 2 \dots). \tag{10}$$

Für die Zahlen n, die unter den λ in (10) auftreten, sei eine Permutation $g(n)$ so erklärt, daß sie die 2-Zyklen

$$\begin{gathered}(\lambda_2^q, \lambda_3^q)\,(\lambda_4^q, \lambda_5^q) \dots (\lambda_{2q}^q, \lambda_1^q)\,(\lambda_{2q+2}^q, \lambda_{2q+3}^q) \dots (\lambda_{4q}^q, \lambda_{2q+1}^q) \\ \dots (\lambda_{2sq+2}^q, \lambda_{2sq+3}^q) \dots (\lambda_{2(s+1)q}^q, \lambda_{2sq+1}^q)\end{gathered} \tag{11}$$

bildet. Die Menge S_{2q} bestehe aus den Zyklen

(12) $$(\mu_1^q, \mu_2^q)(\mu_3^q, \mu_4^q)\dots .$$

Für die Zahlen n, die unter den μ in (12) auftreten, sei $g(n)$ so erklärt, daß sie die Zyklen

(13) $$(\mu_1^q)(\mu_2^q, \mu_3^q)(\mu_4^q, \mu_5^q)\dots$$

bildet. Für alle übrigen n sei endlich $g(n)=f(n)$. Unter Beachtung von (7) folgt, daß f und g konjugiert sind. Also gehört $\varphi(n)=gf(n)$ zu D. Nun zeigen wir, daß φ zu U gehört. Wegen (7) ist zunächst $k_\varphi(1)=\infty$. Für $q>1$ folgt aber aus (10) und (11), daß die Zahlen $\lambda^q_{2sq+1}, \lambda^q_{2sq+3}, \lambda^q_{2sq+5}, \dots \lambda^q_{2(s+1)q-1}$ bei jedem natürlichen s in φ einen q-Zyklus bilden. Also ist $k_\varphi(q)=\infty$ für jedes q. Es ist aber auch $k_\varphi(\infty)=\infty$, denn wegen (12) und (13) bilden bei jedem natürlichen q die Zahlen $\mu_1^q, \mu_2^q, \dots$ in φ den unendlichen Zyklus $(\dots\mu_6^q, \mu_4^q, \mu_2^q, \mu_1^q, \mu_3^q, \mu_5^q, \dots)$. Da D Normalteiler ist, enthält es mit $\varphi \in U$ ganz U.

5. Lemma 3. D enthält jedes h, für welches $k_h(1)=\infty$ ist.

Beweis. Es sei also ein beliebiges h mit

(14) $$k_h(1)=\infty,\ k_h(2)=r_2,\ k_h(3)=r_3, \dots\ k_h(\infty)=r_\infty$$

gegeben. Die r sind ganz $\geqslant 0$, oder gleich ∞. Es bezeichne f eine beliebige Permutation, die zu U, also auch zu D gehört. Es ist $k_f(1)=\infty$. Es sei $f(n_1)=n_1$, $f(n_2)=n_2, \dots$ diese unendliche Folge von 1-Zyklen in f. Die Permutation $h'(n)$ sei folgenderweise erklärt: Für $n \neq n_1, n_3, n_5, \dots$ ist $h'(n)=n$, für diese n aber sei h' so erklärt, daß $k_{h'}(s)=k_h(s)$ ist, für jedes endliche und unendliche s. Daher ist h' mit h konjugiert. Wir setzen $g(n)=fh'(n)$. Für $n \neq n_1, n_3, n_5, \dots$ ist $g(n)=f(n)$, und da, laut der Annahme $f \in U$, f unendlich viele Zyklen jeder Art aus den von $n_1, n_2, \dots$ verschiedenen Zahlen bildet, gehört auch g zu U und daher zu D. Damit aber gehört auch $h'=f^{-1}g$ und h zu D, w. z. b. w.

6. Lemma 4. $D=S_\infty$.

Beweis. Die Permutation $h(n)$ erfülle zunächst die Bedingung

(15) $$k_h(\infty)+\sum_{s=1}^{\infty} k_h(s)=\infty,$$

d. h. die Menge der Zyklen, in die h zerfällt, sei unendlich. Wir teilen dann diese Menge in zwei unendliche Mengen M und N. Die Zahlen, die in den Zyklen der Menge M auftreten, bezeichnen wir der Reihe nach mit $n_2, n_4, n_6, \dots$. Wir setzen $f(n)=n$ für $n=n_1, n_3, \dots$ und $f(n)=h(n)$ für $n=n_2, n_4, \dots$, ferner $g(n)=n$ für $n=n_2, n_4, \dots$ und $g(n)=h(n)$ für $n=n_1, n_3, \dots$ Es ist $k_f(1)=\infty$ und $k_g(1)=\infty$, also $f \in D$ und $g \in D$ laut Lemma 3.

Da aber $h(n)=fg(n)$ ist, gehört auch h zu D. Jede Permutation, die (15) erfüllt, gehört also zu D. Wenn man noch die Formel

$$[(1,2)(3,4)(5,6)\dots][(1)(2,3)(4,5)\dots]=[(\dots 6,4,2,1,3,5,7\dots)]$$

beachtet, sieht man, daß jeder unendliche Zyklus zu D gehört, da er als Zusammensetzung zweier Permutationen, die (15) erfüllen, erhalten werden kann. Jeder endliche Zyklus gehört schon laut Lemma 3 zu D. Eine Permutation, die (15) nicht erfüllt, also in endlich viele Zyklen zerfällt, gehört als Zusammensetzung dieser Zyklen zu D. Damit ist der Beweis des Satzes 1 beendet.

7. Aus dem bewiesenen Satze folgt sofort, daß die Faktorgruppe nach dem von allen endlichen Permutationen gebildeten Normalteiler S einfach ist. Dieser Normalteiler besitzt die Gruppe aller geraden endlichen Permutationen A als Normalteiler mit einfacher Faktorgruppe. Man beweist die Einfachheit von A mit derselben Methode, die zum Nachweis der Einfachheit der alternierenden Gruppe A_n für $n>4$ dient. Wenn noch E die aus der Identität bestehende Gruppe bezeichnet, so bildet

$$S_\infty \supset S \supset A \supset E$$

die JORDAN-HÖLDERsche Kompositionsreihe von S_∞.

8. Da jede Untergruppe mit dem Index 2 notwendig Normalteiler sein muß, so folgt aus unserem Satze, daß S_∞ keine Untergruppe mit dem Index 2 enthält. Es ist also nicht möglich den Begriff „gerade Permutation" auf unendliche Permutationen zu übertragen, d. h. alle Permutationen so in zwei Klassen A und B einzuteilen, daß die Zusammensetzung zweier Elemente aus derselben Klasse zu A, aus verschiedenen Klassen aber zu B gehöre. Dies hat zur Folge, daß man einen „Simplex" mit unendlich vielen Eckpunkten nicht orientieren kann.

§ 2. Die Erzeugenden von S_∞.

1. Wir betrachten jetzt S_∞ als einen metrischen Raum, in dem der Abstand zweier Elemente mittels der Formel (B) der Einleitung erklärt ist. Wenn $\{f_i(n)\}$ eine Folge von Permutationen bezeichnet, so bestätigt man leicht, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Folge $\{f_i(n)\}$ gegen eine Permutation $f(n)$ konvergiert, sich so fassen läßt: zu jedem natürlichem N gibt es ein $I(N)$, so daß für $i>I(N)$, $n<N$, $f_i(n)=f(n)$ ist. Daher ist der Raum S_∞ separabel: die abzählbare Menge aller endlichen Permutationen liegt in ihm überall dicht. Wir werden jetzt drei Permutationen $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $\chi(n)$ angeben, so daß die von ihnen erzeugte Gruppe, und zwar sogar die Permutationen der Gestalt

$$\alpha(n)=\varphi^p\psi^{-q}\chi\psi^q\varphi^{-p}(n) \quad (p=1,2,\ldots;\ q=1,2,\ldots) \tag{1}$$

in S_∞ überrall dicht liegen. Wir haben also folgenden Satz zu beweisen.

Satz 2. *Es gibt drei Permutationen $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $\chi(n)$ derart, daß wenn $l_1, l_2, \ldots l_r$, r gegebene, untereinander verschiedene, natürliche Zahlen sind, es ein $\alpha(n)$ der Gestalt* (1) *gibt, so daß $\alpha(\nu)=l_\nu$ für $\nu=1,2,\ldots r$ ist.*

2. Definition von φ, ψ, χ. Wir teilen die Menge aller natürlichen Zahlen in unendlich viele, unendliche und elementfremde Mengen: $N=S_1+S_2+S_3+\ldots$. Als $\varphi(n)$ nehmen wir eine beliebige Permutation, die die Bedingungen

$$\varphi(S_1)=S_1+S_2,\ \varphi(S_2)=S_3,\ \varphi(S_3)=S_4,\ldots$$

erfüllt, als $\psi(n)$ dagegen eine Permutation, die die Bedingungen

$$\psi(S_1)=S_3,\ \psi(S_2)=S_1+S_2,\ \psi(S_3)=S_4,\ \psi(S_4)=S_5\ldots$$

erfüllt. Daraus folgt:

$$\varphi^i(S_1)=S_1+S_2+\ldots+S_{i+1},\ \psi^i(S_1)=S_{i+2}. \tag{2}$$

Wir bezeichnen mit $\{T_k\}$ die Folge aller endlichen Systeme von $2r$ Zahlen (r beliebig) aus S_1: $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots A_r^{(k)}, B_1^{(k)}, B_2^{(k)}, \ldots B_r^{(k)}$, die die Bedingungen $A_\nu^{(k)} \neq A_\mu^{(k)}$, $B_\nu^{(k)} \neq B_\mu^{(k)}$ für $\nu \neq \mu$ erfüllen. Wir setzen

$$\psi^k(A_\nu^{(k)})=C_\nu^{(k)};\ \nu=1,2,\ldots r \tag{3}$$

und

$$\psi^k(B_\nu^{(k)})=D_\nu^{(k)};\ \nu=1,2,\ldots r. \tag{4}$$

Es ist nach (2) $C_\nu^{(k)}\subset S_{k+2}$ und $D_\nu^{(k)}\subset S_{k+2}$.

Als $\chi(n)$ nehmen wir eine beliebige Permutation, die jede der Mengen S_i in sich selbst überführt und dabei die Bedingung

$$\chi(C_\nu^{(k)})=D_\nu^{(k)} \quad (\nu=1,2,\ldots r). \tag{5}$$

erfüllt.

3. Beweis. Es seien die untereinander verschiedenen Zahlen $l_1, l_2, \ldots l_r$ gegeben. Man wähle ϱ so groß, daß die Menge $S_1+S_2+\ldots+S_\varrho$ die Zahlen $1,2,\ldots r$, $l_1, l_2, \ldots l_r$ enthält. Die Zahlen $\varphi^{-\varrho+1}(1), \varphi^{-\varrho+1}(2), \ldots \varphi^{-\varrho+1}(r), \varphi^{-\varrho+1}(l_1), \ldots \varphi^{-\varrho+1}(l_r)$, gehören laut (2) zu S_1, und bilden daher ein System T_j. Es ist also

$$\varphi^{-\varrho+1}(\nu)=A_\nu^{(j)} \ (\nu=1,2,\ldots r) \tag{6}$$

und

$$\varphi^{-\varrho+1}(l_\nu)=B_\nu^{(j)} \ (\nu=1,2,\ldots r.) \tag{7}$$

Wir setzen $p=\varrho-1$, $q=j$ und behaupten, daß die mit diesen Werten laut (1) gebildete Permutation $\alpha(n)$ die Bedingung $\alpha(\nu)=l_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots r)$ erfüllt. Man hat aber, zu diesem Zwecke nur nacheinander die Formeln (6), (3), (5), (4), (7) anzuwenden. Damit ist aber Satz 2 bewiesen.

(Reçu par la Rédaction le 16. 11. 1933).