Quelques théorèmes de nature tauberienne

par

J. KARAMATA (Beograd).

Le présent travail fait en quelque sorte suite à ma Note parue dans les Studia Mathematica [1]). L'objet en est de donner quelques applications immédiates du théorème général 5, démontré dans la dite Note, dont l'énoncé est le suivant

Théorème A. *Soit* $\alpha_n(x)$, *pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n=1,2,3,\dots$, *une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$\alpha_n(1)=0,\ \textit{pour tout}\ n=1,2,3,\dots,$$

$$\liminf_{n=\infty} \min_{x<t\leqslant x^\lambda} \{\alpha_n(t)-\alpha_n(x)\} > -w(\lambda)\to 0 \quad (1>\lambda\to 1)$$

pour tout $0<x<1$, et

$$\int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\} \quad (n\to\infty),\ \textit{pour tout}\ k=1,2,3,\dots;$$

alors $\alpha_n(x)\to\alpha(x)$ $(n\to\infty)$ *en tout point de continuité* x *de* $\alpha(x)$.

En particulier, nous donnerons une réeponse à une question proposée par M. A. Zygmund, qui consiste à savoir à quelles conditions doit-on assujetir la suite de nombres s_ν $(\nu=0,1,2,3,\dots)$ pour qu'on puisse de la relation

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu r^\nu = s + o\{(1-r)^h\} \quad (r\to 1) \quad (h\geqslant 0)$$

conclure que

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu = s + o\{n^{-h}\} \quad (n\to\infty).$$

1) J. Karamata, Sur le rapport entre les convergences d'une suite de fonctions et de leurs moments avec application à l'inversion des procédés de sommabilité, Studia Mathematica 3 (1931) p. 68—76.

Pour pouvoir déduire du théorème A, d'une manière plus directe, les théorèmes de nature tauberienne, nous lui donnerons d'abord une autre forme, d'ailleurs équivalente. Ainsi, en remplaçant dans les fonctions et intégrales y figurant t par e^{-t}, $\alpha_n(e^{-t})$ par $A_n(t)$, et y faisant quelques autres légères modifications, l'on obtient le

Théorème B. *Soit* $A_n(x)$ $(n=1,2,3,\dots)$ *une suite de fonctions définies dans* $(0,\infty)$, *telles que les intégrales*

$$\int_0^\infty e^{-kt} d\{A_n(t)\} \quad (n,k=1,2,3,\dots)$$

existent, et

(1) $$A_n(0)=0,\ \textit{pour tout}\ n=1,2,3,\dots.$$

Si ces fonctions satisfont à la condition

(2) $$\liminf_{n=\infty} \min_{x<t<\lambda x} \{A_n(t)-A_n(x)\} > -w(\lambda)\to 0$$

lorsque $1<\lambda\to 1$, *pour tout* x, *alors des relations*

(3) $$\int_0^\infty e^{-kt} d\{A_n(t)\} \to \int_0^\infty e^{-kt} d\{A(t)\} \quad (n\to\infty),$$

pour tout $k=1,2,3,\dots$, *il résulte que*

(4) $A_n(x)\to A(x)$ $(n\to\infty)$ *en tout point de continuité* x *de* $A(x)$.

L'indice n figurant dans ce théoréme peut de même varier d'une manière continue de 0 à ∞, ce qui se présentera, du reste, dans les applications suivantes.

Appliquons, à présent, le théorème B à l'étude de la valeur asymptotique d'une fonction $A(x)$ qui satisfait à la relation suivante:

(5) $$\int_0^\infty e^{-\sigma t} d\{A(t)\} = o\left\{\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\} \quad (\sigma\to 0),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction positive telle que

(6) $$\varphi(ux) = O\{\varphi(x)\} \quad (x\to\infty),\ \text{pour tout}\ u>0.$$

A cet effet, posons dans (5) $\sigma=k/n$, $k>0$, puis remplaçons t/n par t; l'on en déduit alors la relation

$$\int_0^\infty e^{-kt} d\{A(nt)\} = o\{\varphi(n/k)\} \quad (n\to\infty),$$

valable pour tout $k > 0$. En divisant cette relation par $\varphi(n)$ et en tenant compte de (6), l'on obtient:

$$\int_0^\infty e^{-kt} d\left\{\frac{A(nt)}{\varphi(n)}\right\} \to 0 \quad (n\to\infty), \text{ pour tout } k>0.$$

En posant donc

$$A_n(t) = \frac{A(nt)}{\varphi(n)}$$

et en appliquant à cette fonction le théorème B, on en déduit le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit $\varphi(x)$ une fonction positive et telle que*

((6)) $\qquad \varphi(ux) = O\{\varphi(x)\} \quad (x\to\infty)$, *pour tout* $u > 0$;

de la relation

((5)) $$\int_0^\infty e^{-\sigma t} d\{A(t)\} = o\left\{\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\} \quad (\sigma\to 0)$$

il résulte

(7) $\qquad A(x) = o\{\varphi(x)\} \quad (x\to\infty)$

toutes les fois que l'on a

(8) $$\liminf_{x=\infty} \min_{x<x'<\lambda x} \left\{\frac{A(x')-A(x)}{\varphi(x)}\right\} > -w(\lambda) \to 0$$

lorsque $1 < \lambda \to 1$.

En ce qui concerne la condition (8), on peut la remplacer, dans le cas où $A(x)$ possède une dérivée première, par une plus simple, mais moins générale:

Théorème 2. *Si la fonction $\varphi(x)$ satisfait à la condition* (6), *de la relation* (5) *il résultera* (7) *toutes les fois que $A(x)$ possède une dérivée première telle que*

(9) $\qquad A'(x) > O\{\varphi(x)/x\} \quad (x\to\infty)$.

On peut, en effet, montrer que la condition (8) est satisfaite toutes les fois que (9) est rempli. Car, en intégrant cette dernière inégalité entres les limites x et $x' \leqslant \lambda x$, $\lambda > 1$, l'on en déduit, en tenant compte de (6),

$$A(x') - A(x) > -M\int_x^{x'} \varphi(t)\, dt/t > -M\int_1^\lambda \varphi(xt)\, dt/t > -M'\varphi(x)\lg\lambda \to 0$$

avec $\lambda \to 1$, ce qui montre bien que la condition (8) est satisfaite dès que (9) l'est.

En posant, à présent, dans les théorèmes 1 et 2

$$A'(x) = s(x) - s \quad \text{et} \quad \psi(x) = \varphi(x)/x,$$

l'on en déduit le

Théorème 3. *De la relation*

(10) $$\sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t} s(t)\, dt = s + o\left\{\psi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\} \quad (\sigma\to 0)$$

il résulte que

(11) $$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\, dt = s + o\{\psi(x)\} \quad (x\to\infty)$$

si la fonction $s(x)$ satisfait à l'une des deux conditions suivantes:

(12) $$\liminf_{x=\infty} \min_{x<x'<\lambda x} \frac{1}{x}\int_x^{x'} s(t)\, dt \geqslant s(\lambda-1) - w(\lambda)\,\psi(x)$$
$$(w(\lambda)\to 0,\ 1<\lambda\to 1),$$

où bien

(13) $\qquad s(x) \geqslant s - M\psi(x) \quad (M>0)$, *pour tout* x,

$\psi(x)$ satisfaisant à la condition que

(14) $\qquad \psi(ux) = O\{\psi(x)\} \quad (x\to\infty)$, *pour tout* $u > 0$.

En particulier, si l'on pose dans ce théorème

$$s(x) = s_n \text{ lorsque } n \leqslant x < n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et $e^{-\sigma} = r$, l'on en déduit que de la relation

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^\infty s_\nu r^\nu = s + o\left\{\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\} \quad (r\to 1)$$

il résultera

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^n s_\nu = s + o\{\psi(n)\} \quad (n\to\infty)$$

toutes les fois que la suite s_n satisfait à la condition

$$s_n \geqslant s - M\psi(n), \text{ pour tout } n = 0, 1, 2, \ldots \ (M > 0),$$

$\psi(x)$ étant une fonction positive satisfaisant à la condition (14).

Si l'on pose dans ce dernier résultat $\psi(x) = x^{-h}$ $(h \geqslant 0)$, l'on obtient une réponse à la question posée au début de cette Note.

(Reçu par la Rédaction le 8. 6. 1932).