Über schwache Konvergenz in den Räumen (L^p)

von

S. MAZUR (Lwów).

In einem linearen, normierten Raume X bildet der Durchschnitt eines Systems von Kugeln stets eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge; in euklidischen Räumen gilt hiervon bekanntlich die Umkehrung, die man auch so formulieren kann:

Satz 1. *Ist $W \subset X$ eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge, $x_0 \in X - W$, so gibt es eine Kugel K, so daß $W \subset K$, $x_0 \in X - K$.*

In dieser Note weise ich auf eine Klasse von linearen, normierten Räumen hin, in denen der obige Satz noch seine Gültigkeit behält; dieser Klasse gehören insbesondere die Räume (L^p) der mit der p-ten Potenz integrierbaren Funktionen für $p > 1$ an. Der Satz 1 impliziert jedenfalls[1]):

Satz 2. *Ist $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 \in X$, die Folge $\{x_n\}$ beschränkt, und enthält jede Kugel mit unendlich vielen Punkten x_n auch x_0, so konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen x_0 schwach.*

Dabei ist folgendes zu bemerken: Damit jede Kugel mit unendlich vielen Punkten x_n auch x_0 enthalte, ist notwendig und hinreichend, daß $\underline{\lim}_{n\to\infty} |x_n - x| \geq |x_0 - x|$ für $x \in X$ sei[2]). Nach dem Vorangehenden gilt der Satz 2 in den Räumen (L^p) für $p > 1$; es wird unten gezeigt, daß im Raume (L) der integrierbaren Funktionen dies nicht stattfindet. Die Umkehrung des Satzes 2, die allgemein gilt, ist wohlbekannt: Ist $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 \in X$ und

[1]) Siehe: S. Mazur, Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, Stud. Math. 4 (1933) p. 70—84, insb. p. 83.

[2]) Darauf hat mich Herr H. Steinhaus aufmerksam gemacht.

die Folge $\{x_n\}$ gegen x_0 schwachkonvergent, so ist sie beschränkt und jede Kugel enthält mit unendlich vielen Punkten x_n auch x_0.

Aus dem oben angeführten ergibt sich sofort:

Ist $x_n \in (L^p)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 \in (L^p)$, wo $p > 1$, so ist, damit die Folge $\{x_n\}$ gegen x_0 schwachkonvergent sei, notwendig und hinreichend, daß die folgenden Bedingungen erfüllt seien:

a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p\, dt \geq \int_0^1 |x_0(t) - x(t)|^p\, dt$ für $x \in (L^p)$;

b) $\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt \leq N$ für $n = 1, 2, \ldots$ bei konstantem N.

1. Sei $\varphi(x)$ ein in einem linearen, normierten Raume X erklärtes Funktional, $x_0 \in X$. Gibt es ein lineares Funktional $f(x)$ in X, mit $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}[\varphi(x_0 + x) - \varphi(x_0) - f(x)] = 0$, so sagt man, $\varphi(x)$ besitze in x_0 ein *starkes Differential* $f(x)$[3]).

Die in der Einleitung erwähnte Klasse von linearen, normierten Räumen, in denen der Satz 1 richtig bleibt, besteht aus denjenigen Räumen X, die die folgenden Eigenschaften aufweisen:

α) *Die Norm, als ein in X erklärtes Funktional aufgefaßt, besitzt in jedem von 0 verschiedenen Punkte ein starkes Differential;*

β) *In jeder beschränkten Punktfolge aus X gibt es eine gegen einen Punkt aus X schwachkonvergente Folge.*

Wir sagen: $\varphi(x)$ besitzt in x_0 ein *schwaches Differential*, wenn $\lim_{h\to 0} [\varphi(x_0 + hx) - \varphi(x_0)]$ für $x \in X$ existiert und ein lineares Funktional in X bildet; dieses heißt dann das schwache Differential von $\varphi(x)$ in x_0[4]). Wie leicht ersichtlich, damit $\varphi(x)$ in x_0 ein starkes Differential $= f(x)$ besitze, wo $f(x)$ ein lineares Funktional in X bezeichnet, ist notwendig und hinreichend, daß $\frac{1}{h}[\varphi(x_0 + hx) - \varphi(x_0)]$ gleichmäßig in der Einheitskugel mit $h \to 0$ gegen $f(x)$ strebe. Besitzt also $\varphi(x)$ in x_0 ein starkes Differential, so besitzt es auch ein schwaches und die beiden Differentiale stimmen dann überein; die Umkehrung davon gilt bekanntlich schon im 2-dimensionalen euklidischen Raume nicht.

Setzen wir jetzt voraus, daß $\varphi(x)$ die folgenden Eigenschaften aufweist $(x, x', x'' \in X$, t eine Zahl$)$: 1° $\varphi(x' + x'') \leq \varphi(x') + \varphi(x'')$; 2° $\varphi(tx) = t\varphi(x)$

[3]) Dieser Begriff stammt von Herrn M. Fréchet; vgl. P. Lévy, Leçons d'analyse fonctionnelle, Paris 1922, insb. p. 50.

[4]) Vgl. zu dieser Begriffsbildung l. c.[3]), insb. p. 50—52.

für $t>0$; 3° $\varphi(x)\leqslant M|x|$ bei konstantem M; die letzte Eigenschaft ist übrigens mit der Stetigkeit von $\varphi(x)$ in X äquivalent. Man kann zeigen, daß wenn $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[\varphi(x_0+hx)-\varphi(x_0)]$ für $x\in X$ existiert, es bereits ein lineares Funktional in X darstellt; $\varphi(x)$ besitzt dann also ein schwaches Differential in x_0[5]). Ist X endlichviel-dimensional, so folgt aus der Existenz eines schwachen Differentials von $\varphi(x)$ in x_0 auch die eines starken. Augenscheinlich, wenn $\varphi(x)$ in x_0 ein schwaches (starkes) Differential besitzt, gilt dasselbe in jedem Punkte tx_0 für $t>0$.

Da der Norm $|x|$ die Eigenschaften 1°—3° zukommen, so gelten insbesondere für sie die vorhin festgestellten Tatsachen. Um nun den Sinn der Eigenschaft α) genauer zu erkennen, sei hier noch folgendes hinzugefügt. Damit die Norm in x_0 ein schwaches Differential besitze, ist notwendig und hinreichend, daß es eine durch x_0 gehende Tangentialhyperebene H der Kugel $|x|\leqslant|x_0|$ gebe; ist $f(x)$ das schwache Differential von $|x|$ in x_0, so ist H durch die Gleichung $f(x)-|x_0|=0$ bestimmt. Eine andere Formulierung dieser Bemerkung lautet: Damit die Norm in x_0 ein schwaches Differential besitze, ist notwendig und hinreichend, daß es ein und nur ein lineares Funktional $f(x)$ in X gebe mit $\|f\|=1$, $f(x_0)=|x_0|$; das schwache Differential von $|x|$ in x_0 erfüllt eben diese Bedingungen[6]). Aus der Eigenschaft α) folgt also: α^*) *Durch jeden Randpunkt der Einheitskugel K_0 geht eine Tangentialhyperebene von K_0.* Ist X endlichviel-dimensional, so sind nach dem vorigen die Eigenschaften α) und α^*) äquivalent; ob dies ganz allgemein gilt, scheint noch nicht entschieden zu sein.

Was die Eigenschaft β) anlangt, so kommt sie trivialerweise den endlichviel-dimensionalen Räumen zu. Aus dieser Eigenschaft folgt jedenfalls, daß, wenn $f(x)$ ein lineares Funktional $\not\equiv 0$ in X ist, es einen Punkt $x_0\in X$ gibt, so daß $|x_0|=1$, $f(x_0)=\|f\|$; damit ist gleichbedeutend: Ist H eine Stützhyperebene einer Kugel K, so geht H durch einen Randpunkt von K[7]). Die Eigenschaft β) impliziert also: β^*) *Jede Stützhyperebene der Einheitskugel K_0 geht durch einen Randpunkt von K_0.* Es ist nicht bekannt, ob auch umgekehrt die Eigenschaft β) aus β^*) folgt.

Beim Beweise des Satzes 1 können wir annehmen, daß W ein konvexer, beschränkter Körper und 0 ein innerer Punkt von W ist[8]). Sei a die größte Zahl mit $ax_0\in W$; dann ist $0<a<1$ und $y_0=ax_0$ gehört dem Rande von W an. Es bezeichne H eine durch y_0 gehende Stützhyperebene von W[9]); stellt die Gleichung $f(x)-1=0$, wo $f(x)$ ein lineares Funktional in X bedeutet, diese

[5]) Dies folgt sofort aus der Bemerkung 6, l. c.[1]), p. 75.

[6]) Dies ergibt sich leicht aus den Bemerkungen 5 und 8, l. c.[1]), p. 73 und 76; wir behalten in dieser Note die dort eingeführte Terminologie bei.

[7]) Wie aus der Bemerkung 5, l. c.[1]), p. 73 hervorgeht.

[8]) l. c.[1]), p. 80, Bemerkung 10.

[9]) l. c.[1]), p. 73, Satz 1.

Hyperebene dar, so ist also $f(y_0)=1$, $f(x)\leqslant 1$ für $x\in W$. Vermöge der Eigenschaft β) gibt es ferner einen Punkt $w_0\in X$ mit $|w_0|=1$, $f(w_0)=\|f\|$. Sei nun $a<b<1$, $z_0=bx_0$ und K_r für $r>0$ die Kugel vom Mittelpunkt z_0-rw_0 und Radius r. Wir wollen zeigen, daß, wenn r hinreichend groß ist, die Kugel K_r schon das Verlangte leistet, d. h. den Bedingungen $W\subset K_r$, $x_0\in X-K_r$ genügt. Zunächst ist stets $x_0\in X-K_r$; in der Tat, aus $x_0-z_0=\frac{1-b}{a}y_0$, $f(y_0)=1, f(w_0)=\|f\|$ folgt $f(x_0-z_0+rw_0)=\frac{1-b}{a}+r\|f\|$ und mithin $f(x_0-z_0+rw_0)>r\|f\|$; da außerdem $f(x_0-z_0+rw_0)\leqslant\|f\|\,|x_0-z_0+rw_0|$, so ist $|x_0-z_0+rw_0|>r$, wie behauptet[10]). Angenommen, es gäbe eine gegen $+\infty$ divergente Folge $\{r_n\}$ positiver Zahlen und eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen aus X, mit $x_n\in W-K_{r_n}$, also $x_n\in W$ und $|x_n-z_0+r_nw_0|>r_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Setzen wir $g(x)=\frac{1}{\|f\|}f(x)$ für $x\in X$, so bildet $g(x)$ ein lineares Funktional in X und es ist $\|g\|=1$, $g(w_0)=|w_0|$, weil $f(w_0)=\|f\|$, $|w_0|=1$; wegen der Eigenschaft α) ist also $g(x)$ das starke Differential von $|x|$ in w_0 und somit, $\omega(x)=|x_0+x|-1-g(x)$ für $x\in X$ gesetzt, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}\omega(x)=0$. Sei $y_n=\frac{1}{r_n}(x_n-z_0)$ $(n=1,2,\ldots)$; aus $|w_0+y_n|=1+g(y_n)+\omega(y_n)$ ergibt sich $|x_n-z_0+r_nw_0|=r_n+\frac{1}{\|f\|}f(x_n)-\frac{1}{\|f\|}\frac{b}{a}+r_n\omega(y_n)$, da $g(x_n)=\frac{1}{\|f\|}f(x_n)$, $g(z_0)=\frac{1}{\|f\|}f(z_0)$, $f(z_0)=\frac{b}{a}$; wegen $x_n\in W$ ist aber $f(x_n)\leqslant 1$, also $|x_n-z_0+r_nw_0|\leqslant r_n+\left(1-\frac{b}{a}\right)\frac{1}{\|f\|}+r_n\omega(y_n)$ und, wenn man die Relation $|x_n-z_0+r_nw_0|>r_n$ beachtet, $\frac{1}{|y_n|}\omega(y_n)>\left(\frac{b}{a}-1\right)\frac{1}{\|f\|\,|y_n|}$. Dies führt sofort zu einem Widerspruch; denn wegen $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=+\infty$ und der Beschränkheit der Folge $\{x_n\}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, somit nach

[10]) Man erkennt leicht: Die Translation um z_0-y_0 führt H in die durch die Gleichung $\frac{a}{b}f(x)-1=0$ bestimmte Hyperebene H^* über; H^* geht durch den Randpunkt z_0 von K_r und ist eine Stützhyperebene von K_r.

dem Vorangehenden $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|y_n|}\omega(y_n)=0$; dabei ist $\frac{b}{a}-1>0$. Damit ist aber der Satz 1, und folglich auch der Satz 2, für jeden linearen, normierten Raum mit den Eigenschaften α) und β) vollständig bewiesen.

2. Bekanntlich besitzen die Räume (L^p) für $p>1$ die Eigenschaft β); wir wollen uns nun überzeugen, daß ihnen auch die Eigenschaft α) zukommt. Zum Beweise sei $x_0\in(L^p)$, $x_0\neq 0$. Sei ferner zunächst $p\leqslant 2$ und betrachten wir die in der Menge R aller reellen Zahlen ξ erklärte Funktion $|\xi|^{-p}[|1+\xi|^p-1-p\xi]$; eine einfache Überlegung zeigt, daß sie auf R beschränkt ist, d. h. $|1+\xi|^p-1-p\xi=O(|\xi|^p)$ für $\xi\in R$. Setzt man hierin $\xi=\frac{x(t)}{x_0(t)}$, wo $x\in(L^p)$, $t\in\langle 0,1\rangle$ mit $x_0(t)\neq 0$, so folgt $|x_0(t)+x(t)|^p-|x_0(t)|^p-p\,x(t)|x_0(t)|^{p-1}\operatorname{sgn}x_0(t)=O(|x(t)|^p)$; dies bleibt offenbar richtig für alle $x\in(L^p)$, $t\in\langle 0,1\rangle$; durch Integration ergibt sich daraus sofort

$$(*)\qquad |x_0+x|^p-|x_0|^p-p\int_0^1 x(t)|x_0(t)|^{p-1}\operatorname{sgn}x_0(t)\,dt=O(|x|^p)$$

für $x\in(L^p)$. Nun ist aber auch die Funktion $|\xi|^{-p}[|1+\xi|^{\frac{1}{p}}-1-\frac{1}{p}\xi]$ auf R beschränkt, d. h. $|1+\xi|^{\frac{1}{p}}-1-\frac{1}{p}\xi=O(|\xi|^p)$ für $\xi\in R$, so daß, wenn wir $\xi=|x_0|^{-p}[|x_0+x|^p-|x_0|^p]$ setzen, $|x_0+x|-|x_0|-\frac{1}{p}|x_0|^{1-p}[|x_0+x|^p-|x_0|^p]=O([|x_0+x|^p-|x_0|^p]^p)$ für $x\in(L^p)$ gilt. Aus (*) und der letzten Relation entnehmen wir durch eine einfache Rechnung

$$|x_0+x|-|x_0|-|x_0|^{1-p}\int_0^1 x(t)|x_0(t)|^{p-1}\operatorname{sgn}x_0(t)\,dt=O(|x|^p)$$

für $x\in(L^p)$; die Norm $|x|$ besitzt also in x_0 das starke Differential $=|x_0|^{1-p}\int_0^1 x(t)|x_0(t)|^{p-1}\operatorname{sgn}x_0(t)\,dt$. Dies behält seine Gültigkeit für $p>2$; der Beweis verläuft analog. Wir gehen aus von der Bemerkung $|1+\xi|^p-1-p\xi=O(|\xi|^p+\xi^2)$ für $\xi\in R$; daraus folgt dann

$$|x_0+x|^p-|x_0|^p-p\int_0^1 x(t)|x_0(t)|^{p-1}\operatorname{sgn}x_0(t)\,dt=O(|x|^p+|x|^2)$$

für $x\in(L^p)$. Berüchsichtigt man nun, daß die Funktion

$$\xi^{-2}[|1+\xi|^{\frac{1}{p}}-1-\frac{1}{p}\xi]$$

auf R beschränkt ist, so bekommt man, wie vorher,

$$|x_0+x|-|x_0|-|x_0|^{1-p}\int_0^1 x(t)|x_0(t)|^{p-1}\operatorname{sgn}x_0(t)\,dt=O(|x|^2)$$

für $x\in(L^p)$.

Im Raume (L) gilt der Satz 2 und daher auch der Satz 1 nicht. In der Tat, sei $x_n(t)=n$ für $0\leqslant t<\frac{1}{n}$, $=0$ für $\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1$ $(n=1,2,\ldots)$; es ist stets $x_n\in(L)$. Sei $x\in(L)$ und $|x_n-x|\leqslant r$ für unendlich viele n, wo r eine positive Zahl ist; da stets $|x_n-x|=\int_0^{1/n}|n-x(t)|\,dt+\int_{1/n}^{0}|x(t)|\,dt$, so folgt daraus sofort $1+|x|\leqslant r$; ist also $x_0\in(L)$ und $|x_0|\leqslant 1$, so ist $|x_0-x|\leqslant|x_0|+|x|\leqslant 1+(r-1)=r$. Damit ist bewiesen, daß jede Kugel mit unendlich vielen Punkten x_n die ganze Einheitskugel enthält.

(Reçu par la Rédaction le 10. 10. 1933).