

Beweis. Da Y mit einem linearen Teile von (C) isomorph — sogar äquivalent — ist, so ist wegen d) der Raum \bar{Y} ein lineares Bild von (\bar{C}) ; nach dem Satze 3 ist mithin \bar{Y} ein lineares Bild von (V) . Berücksichtigt man noch e), so ist nun mehr zu zeigen: (l) ist ein lineares Bild von (V) . Zum Beweise ordnen wir jedem $x \in (V)$ das durch die Formeln $\eta_n = x\left(\frac{1}{n}\right) - x\left(\frac{1}{n} - 0\right)$ ($n = 1, 2, \dots$) definierte $y = \{\eta_n\} \in (l)$ zu; dadurch ist eine lineare Abbildung von (V) auf (l) gegeben.

(Reçu par la Rédaction le 1. 9. 1933).

Sur les groupes linéaires bornés (I)

par

H. AUERBACH (Lwów).

Introduction.

La matrice d'une substitution linéaire

$$x'_i = \sum_{r=1}^n a_{ir} x_r \quad (i = 1, \dots, n)$$

peut être considérée comme un point d'un espace réel à $2n^2$ dimensions. Un groupe G de substitutions linéaires (ou matrices) est ainsi représenté par un ensemble de points E . Le groupe est dit *borné*, lorsque cet ensemble l'est. Nous dirons de même qu'une matrice A non singulière est *bornée*, si le groupe cyclique $\{A^m\}$ est borné. Les matrices d'un groupe borné sont évidemment bornées.

Tout groupe linéaire borné laisse invariante une forme d'Hermité définie positive. Si ses coefficients sont réels, le groupe admet une forme quadratique positive invariante¹⁾. Un groupe borné est par conséquent semblable à un groupe de matrices unitaires ou orthogonales réelles et complètement réductible. Lorsqu'il est commutatif, on peut le transformer en un groupe de matrices diagonales. Il en résulte que, pour qu'une matrice soit bornée, il faut et il suffit que ses racines caractéristiques aient le module un et que ses diviseurs élémentaires soient simples. Une matrice bornée est toujours semblable à une matrice diagonale. Son déterminant a le module un.

Le groupe G est *clos*, si l'ensemble E est borné et fermé.

¹⁾ H. Auerbach, Sur les groupes bornés de substitutions linéaires, Comptes Rendus 195 (1932) p. 1367.

Un groupe clos est *connexe*, lorsque l'ensemble E possède cette propriété; dans le cas contraire on a un groupe clos *mixte*²⁾.

Etant donné une matrice bornée A , nous désignerons par *groupe élémentaire* $[A]$ le plus petit groupe clos contenant A . C'est un groupe abélien formé par les puissances de A et leurs points d'accumulation. Un élément B du groupe $[A]$ engendre un groupe élémentaire $[B]$ contenu dans $[A]$. Si $[B] = [A]$, nous dirons que B est un *élément primitif* du groupe $[A]$. Un groupe élémentaire connexe sera appelé un *groupe normal*, nous dirons aussi dans ce cas que la matrice A est *normale*. Tout groupe linéaire clos contient évidemment les groupes élémentaires engendrés par ses éléments. Les groupes élémentaires fournissent le plus simple exemple des groupes linéaires clos. Il est aisé de voir que, dans toute représentation continue et isomorphe d'un groupe linéaire clos G sur un groupe linéaire H (nécessairement clos), à tout sous-groupe élémentaire (ou normal) de G correspond un sous-groupe élémentaire (ou normal) de H .

D'après les résultats importants de M. v. NEUMANN³⁾ tout groupe clos (infini) possède un sous-groupe invariant clos et connexe et se décompose suivant lui en un nombre fini de complexes. Ceux-ci sont les composantes du groupe au sens de M. HAUSDORFF. Le sous-groupe invariant est la composante qui contient l'élément unité. Deux éléments d'une même composante peuvent être joints par une courbe analytique appartenant entièrement à cette composante. Si l'on désigne par U_1, \dots, U_r une base infinitésimale du groupe G ⁴⁾, par t_1, \dots, t_r , r paramètres réels et par ϱ un nombre positif suffisamment petit, l'équation⁵⁾

²⁾ Pour la théorie des groupes clos voir E. Cartan, La Théorie des Groupes Finis et Continus et l'Analysis Situs (Mémoires des Sciences mathématiques 42, 1930) Chap. III.

³⁾ J. v. Neumann, Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen, Mathem. Zeitschr. 30 (1929) p. 3—42; p. 26—27. Un théorème plus général a été démontré par M. Cartan (l. c. ²⁾ p. 22—24).

⁴⁾ C'est-à-dire un système de matrices infinitésimales du groupe G tel que toute matrice infinitésimale U de ce groupe peut être représentée, et cela d'une seule manière, sous la forme $U = c_1 U_1 + \dots + c_r U_r$, les c_i étant des nombres réels.

⁵⁾ La fonction exponentielle est définie par l'équation $e^U = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{U^\nu}{\nu!}$,

$A = e^{t_1 U_1 + \dots + t_r U_r}$ établit une correspondance biunivoque entre la sphère $t_1^2 + \dots + t_r^2 < \varrho^2$ et un certain voisinage de l'élément unité. G est donc un groupe analytique réel de Lie⁶⁾. Le second membre représente d'ailleurs toujours un élément du groupe G , quels que soient les nombres réels t_1, \dots, t_r .

La généralité de la notion du groupe linéaire clos est mise en lumière par un théorème fondamental, démontré récemment par M. v. NEUMANN⁷⁾ que voici:

Tout groupe topologique clos à r paramètres peut être représenté d'une façon biunivoque, continue et isomorphe sur un groupe de substitutions unitaires.

On doit à KRONECKER⁸⁾ une représentation du groupe orthogonal réel connexe à n variables à l'aide de polynômes trigonométriques de $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres réels. Cette représentation, dans le cas $n = 3$ donnée déjà par EULER, s'étend aisément au groupe unitaire⁹⁾. En posant $\operatorname{tg} \frac{t_i}{2} = s_i$, on en obtient une représentation paramétrique rationnelle¹⁰⁾. Les groupes linéaires algébriques admettant une représentation paramétrique rationnelle ont été étudiées par MAURER dans deux mémoires importants¹¹⁾. M. CARTAN

U désignant une matrice quelconque. Si les matrices U, V sont échangeables, on a $e^{U+V} = e^U \cdot e^V$ Cf. v. Neumann l. c. ³⁾, p. 10.

⁶⁾ Il en résulte en particulier que, dans le cas d'un groupe clos, la définition d'une matrice infinitésimale employée par M. v. Neumann (l. c. ³⁾, p. 15.) est équivalente à celle de Lie. Voir toutefois plus loin (§ 3).

⁷⁾ J. v. Neumann, Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Annals of mathematics (2) 34 (1933) p. 170—190; p. 182.

⁸⁾ L. Kronecker, Über orthogonale Systeme, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1890 (=Werke 3, p. 369—459); XIII.

⁹⁾ A. Hurwitz, Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Gött. Nachr. 1897, p. 71—90; p. 82.

¹⁰⁾ D'autres représentations paramétriques rationnelles du groupe orthogonal ou unitaire ont été données par Cayley, Hermite et M. A. Loewy. Voir E. Pascal, Repert. d. höh. Math., 2-me éd. I, p. 132—136.

¹¹⁾ L. Maurer, a) Über allgemeinere Invariantensysteme, Münch. Ber. 1888, p. 103—150; b) Zur Theorie der kontinuierlichen, homogenen und linearen Gruppen, Münch. Ber. 1894, p. 297—341.

Le premier mémoire est résumé dans Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III, p. 801—803.

a établi dans sa Thèse l'existence d'une représentation rationnelle pour tout groupe linéaire semi-simple¹²⁾.

Dans le mémoire présent nous déterminons d'abord les groupes élémentaires, en nous servant d'un théorème de KRONECKER sur l'approximation simultanée des nombres réels. Nous étudions ensuite la représentation analytique des groupes normaux et nous démontrons que le plus petit groupe linéaire clos contenant un groupe linéaire borné e^{iU} est un groupe normal dont l'ordre dépend des propriétés arithmétiques de la matrice infinitésimale U . L'application de ce théorème aux matrices infinitésimales d'un groupe linéaire clos permet d'étendre la représentation de KRONECKER aux groupes linéaires clos quelconques, notamment de démontrer que l'on peut représenter le groupe aux environs d'un élément quelconque à l'aide de polynômes trigonométriques ou fonctions rationnelles de r paramètres réels essentiels et qu'une représentation semblable du groupe entier (supposé connexe) est possible, le nombre des paramètres étant dans ce dernier cas peut-être plus grand que r . L'idée de la démonstration est due à MAURER qui, cependant, n'avait considéré que des groupes algébriques aux paramètres complexes. De la représentation obtenue il résulte aisément que tout groupe abélien clos et connexe est un groupe normal. Une facile application de la théorie de la mesure permet d'établir que l'ensemble des éléments anormaux est de mesure nulle dans un certain voisinage de l'élément unité. Nous démontrons enfin que tout voisinage de l'élément unité d'un groupe linéaire clos et connexe d'ordre $r > 1$ contient $r-1$ ou un moindre nombre d'éléments constituant un sous-groupe dénombrable partout dense.

Les théorèmes IV, V et VIII ont été publiés antérieurement sans démonstration¹³⁾.

§ 1.

Soit A une matrice bornée et $e^{i\alpha_1}, \dots, e^{i\alpha_n}$ ses racines caractéristiques. Comme les angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne sont déterminés qu'à des multiples entiers de 2π près, la matrice A admet une infinité de systèmes d'angles équivalents.

¹²⁾ E. CARTAN, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Nony, Paris 1894 (Réimpression 1933 chez Vuibert) p. 133.

¹³⁾ Comptes Rendus 196 (1933) p. 1862.

Un système d'angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sera dit *normal*, lorsque, dans toute relation linéaire $b \cdot 2\pi + b_1\alpha_1 + \dots + b_n\alpha_n = 0$ à coefficients entiers, le coefficient $b = 0$.

Supposons que l'on a exactement $n-r$ relations linéaires indépendantes

$$(1) \quad b_k \cdot 2\pi + \sum_{v=1}^n b_{kv} \alpha_v = 0 \quad (k=1, \dots, n-r)$$

à coefficients entiers b_k, b_{kv} . D'après un théorème bien connu les matrices (b_{kv}) et (b_k, b_{kv}) ont le même rang $n-r$. Il en résulte aisément que, pour deux systèmes équivalents d'angles, le nombre r est le même. Nous l'appellerons *l'ordre* de la matrice A . On a $0 \leq r \leq n$ dans le cas général et $0 \leq r \leq n/2$ dans celui d'une matrice réelle, les racines caractéristiques étant alors conjuguées deux à deux. Deux matrices semblables sont évidemment du même ordre.

Nous allons maintenant déterminer le groupe élémentaire $[A]$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que A est une matrice diagonale aux éléments diagonaux $e^{i\alpha_1}, \dots, e^{i\alpha_n}$. Elle sera désignée dans la suite simplement par $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Les éléments du groupe $[A]$ sont aussi des matrices diagonales. En particulier, $A^p = (p\alpha_1, \dots, p\alpha_n)$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice (t_1, \dots, t_n) appartienne au groupe $[A]$ peut évidemment s'exprimer de la manière suivante:

Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, les inégalités

$$(2) \quad |t_1 - p\alpha_1 - 2l_1\pi| < \varepsilon, \dots, |t_n - p\alpha_n - 2l_n\pi| < \varepsilon$$

admettent toujours une solution en nombres entiers p, l_1, \dots, l_n .

Or, en vertu d'un théorème de KRONECKER¹⁴⁾, on peut affirmer:

Lorsque les nombres $2\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont linéairement indépendants, les inégalités (2) sont toujours solubles. Dans le cas où il y a exactement $n-r$ relations linéaires indépendantes (1) à coefficients entiers, la condition nécessaire et suffisante pour la possibilité des inégalités (2) est que l'on ait

$$(3) \quad 2b_k g \pi + \sum_{v=1}^n b_{kv} (t_v - 2g_v \pi) = 0 \quad (k=1, \dots, n-r),$$

g, g_1, \dots, g_n désignant des entiers, d'ailleurs quelconques.

¹⁴⁾ O. PERRON, Irrationalzahlen, Berlin, W. de Gruyter 1921, p. 157.

Pour $r = n$ on a donc

$$[A] = (t_1, \dots, t_n).$$

C'est un groupe normal d'ordre n .

Dans le cas $r = 0$ les angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont, d'après les équations (1), des multiples rationnels de 2π , par conséquent $[A] = \{A^m\}$.

Nous supposons maintenant $0 < r < n$. Comme deux systèmes équivalents d'angles donnent la même matrice, on peut remplacer le système linéaire (3) par le système plus simple

$$(4) \quad 2b_k g \pi + \sum_{v=1}^n b_{kv} t_v = 0 \quad (k=1, \dots, n-r)$$

contenant encore l'entier arbitraire g .

Si, par exemple, le déterminant formé par les $n-r$ dernières colonnes de la matrice $(b_{k,v})$ est différent de zéro, la résolution des équations (4) donne

$$(5) \quad t_i = \sum_{v=1}^r c_{iv} t_v + 2c_i g \pi \quad (i=r+1, \dots, n),$$

c_{iv} , c_i désignant des nombres rationnels.

Lorsque le système $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est normal, on a $b_1 = \dots = b_{n-r} = 0$, donc aussi $c_{r+1} = \dots = c_n = 0$. Par conséquent, le groupe $[A]$ est représenté par l'expression

$$(6) \quad \left(t_1, \dots, t_r, \sum_{v=1}^r c_{r+1,v} t_v, \dots, \sum_{v=1}^r c_{n,v} t_v \right).$$

C'est un groupe normal d'ordre r .

Un élément (t_1^0, \dots, t_n^0) du groupe $[A]$ est d'ordre r alors et alors seulement, si les nombres $2\pi, t_1^0, \dots, t_r^0$ sont linéairement indépendants. Dans ce cas il est évidemment normal et, comme il satisfait aux mêmes équations

$$(7) \quad \sum_{v=1}^n b_{kv} t_v = 0 \quad (k=1, \dots, n-r)$$

que l'élément $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, son groupe élémentaire se confond avec $[A]$. En particulier, tout élément du groupe cyclique $\{A^m\}$, à l'exception de l'élément unité, est un élément primitif et normal du groupe $[A]$.

Réciproquement, en vertu des remarques précédentes, le groupe (6) est un groupe normal d'ordre r , quels que soient les nombres rationnels c_{iv} .

Si la matrice A n'admet pas de système normal d'angles, le groupe (6) est contenu dans $[A]$ ($g=0$), mais il ne contient plus la matrice A . En effet, tout élément du groupe (6) satisfait d'après (4) aux équations (7) et, par conséquent, ou bien est d'ordre r et admet un système normal d'angles, ou bien est d'ordre $< r$, donc aussi diffère de A .

D'après (5), tout élément du groupe $[A]$ peut être écrit sous la forme

$$(8) \quad \left(t_1, \dots, t_r, \sum_{v=1}^r c_{r+1,v} t_v, \dots, \sum_{v=1}^r c_{n,v} t_v \right) (0, \dots, 0, 2c_{r+1}\pi, \dots, 2c_n\pi)^g.$$

Le groupe $[A]$ consiste donc du groupe (6) et de ses complexes, le groupe facteur correspondant étant fini et cyclique.

Les angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ remplissant les équations (4) pour $g=1$, on a d'après (5)

$$A = \left(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \sum_{v=1}^r c_{r+1,v} \alpha_v, \dots, \sum_{v=1}^r c_{n,v} \alpha_v \right) (0, \dots, 0, 2c_{r+1}\pi, \dots, 2c_n\pi).$$

Les nombres $2\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont linéairement indépendants, car autrement l'ordre de A serait moindre que r . Le premier facteur est donc un élément primitif (et normal) du groupe (6).

Théorème I. *Pour qu'une matrice bornée A d'ordre r soit normale, il faut et il suffit qu'elle admette un système normal d'angles. Dans ce cas on peut transformer le groupe $[A]$ dans la forme*

$$(6) \quad \left(t_1, \dots, t_r, \sum_{v=1}^r c_{r+1,v} t_v, \dots, \sum_{v=1}^r c_{n,v} t_v \right)$$

à coefficients rationnels c_{iv} . Réciproquement, (6) est un groupe normal d'ordre r , quels que soient les nombres rationnels c_{iv} .

Si la matrice A est anormale, le groupe $[A]$ contient le groupe (6) et se décompose suivant lui en un nombre fini de complexes, le groupe facteur correspondant étant cyclique.

Toute puissance A^m ($m \neq 0$) d'une matrice normale A est une matrice normale du même ordre et un élément primitif du groupe $[A]$. Une matrice bornée anormale est ou bien cyclique, ou bien le produit d'une matrice normale du même ordre et d'une matrice cyclique échangeable avec celle-ci.

§ 2.

Un groupe normal (6) d'ordre r peut être mis sous la forme plus symétrique

$$(9) \quad \left(\sum_{\nu=1}^r a_{1\nu} t_\nu, \dots, \sum_{\nu=1}^r a_{n\nu} t_\nu \right),$$

$a_{i\nu}$ désignant des nombres rationnels tels que la matrice

$$(10) \quad \begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & \end{array}$$

a le rang r . Un groupe normal à un paramètre

$$(11) \quad (a_1 t, \dots, a_n t)$$

peut être représenté par e^{tU} , U étant la matrice diagonale aux éléments $i a_1, \dots, i a_n$. C'est la matrice infinitésimale du groupe (11). Ses racines caractéristiques sont de la forme αi (α réel) et ses diviseurs élémentaires sont simples.

Nous appellerons toute matrice remplissant ces deux conditions une *matrice elliptique*. Une matrice elliptique dont les racines caractéristiques sont de la forme αi (α entier) sera dite *régulière*¹⁶⁾. Un groupe normal à un paramètre (11) est donc engendré par une matrice infinitésimale elliptique à racines commensurables. On peut toujours supposer qu'elle est régulière, puisqu'on peut multiplier les nombres a_ν par leur plus petit dénominateur commun. Dans ce cas, on obtient tous éléments du groupe en faisant varier t de 0 à 2π . Les éléments de la matrice (11) sont évidemment des polynômes trigonométriques du paramètre t ou des fonctions rationnelles du paramètre $s = \operatorname{tg} t/2$.

En attribuant dans (9) à tous paramètres sauf un seul la valeur zéro, on obtient r sous-groupes normaux à un paramètre: $e^{t_1 U_1}, \dots, e^{t_r U_r}$. Les éléments diagonaux de la matrice infinitésimale U_ν sont respectivement égaux aux éléments de la ν -ième colonne de la matrice (10), multipliés par i . On peut représenter le groupe par

$$(12) \quad e^{t_1 U_1 + \dots + t_r U_r} = e^{t_1 U_1} \dots e^{t_r U_r}.$$

Les matrices U_1, \dots, U_r sont elliptiques, indépendantes et échangeables. On peut évidemment supposer, ce que nous ferons désormais, qu'elles sont régulières, c'est-à-dire que les éléments de la matrice (10) sont des entiers. Réciproquement, étant donné r matrices elliptiques régulières, indépendantes et échangeables U_1, \dots, U_r , on peut affirmer que (12) est un groupe normal d'ordre r . En effet, il est d'abord évident que c'est un groupe clos et connexe d'ordre r , car il suffit de faire varier les paramètres t_ν de 0 à 2π pour obtenir tous ses éléments. Si les nombres $2\pi, t_{10}^0, \dots, t_{r0}^0$ sont linéairement indépendants, on pourra, d'après le théorème de KRONECKER employé dans le § 1, approcher indéfiniment tout élément du groupe par des puissances de l'élément $A_0 = e^{t_1^0 U_1 + \dots + t_r^0 U_r}$. Le groupe se confond donc avec le groupe élémentaire $[A_0]$.

En formant r combinaisons linéaires indépendantes à coefficients réels des matrices U_1, \dots, U_r , on obtient une autre base infinitésimale du groupe normal (12). Si le groupe est mis dans la forme diagonale, cela revient à remplacer chaque colonne de la matrice (10) par la combinaison linéaire correspondante des colonnes. On peut le faire toujours de manière à obtenir une nouvelle matrice aux éléments entiers, dont les déterminants d'ordre r n'ont pas de diviseur commun. Aux deux systèmes des paramètres: t_1, \dots, t_r et τ_1, \dots, τ_r , correspondent alors deux éléments différents du groupe, à moins que les différences $t_1 - \tau_1, \dots, t_r - \tau_r$ soient des multiples entiers de 2π ¹⁶⁾. Le groupe est donc le produit direct des groupes $e^{t_1 U_1}, \dots, e^{t_r U_r}$.

Théorème II. *Le groupe normal d'ordre r le plus général est représenté par l'expression*

$$(12) \quad e^{t_1 U_1 + \dots + t_r U_r} = e^{t_1 U_1} \dots e^{t_r U_r},$$

U_1, \dots, U_r désignant des matrices elliptiques régulières, indépendantes et échangeables, d'ailleurs quelconques. On peut choisir ces matrices de manière que le groupe soit le produit direct des groupes $e^{t_1 U_1}, \dots, e^{t_r U_r}$. Par conséquent, tous groupes normaux du même ordre r sont isomorphes, leurs variétés étant homéomorphes au produit de r circonférences.

¹⁶⁾ Cf. L. MAURER, l. c. 11b), p. 299.

¹⁶⁾ L. MAURER, l. c. 11b), p. 314–19.

§ 3.

Soit e^{tU} un groupe borné à un paramètre. Comme c'est un groupe abélien, on peut le transformer dans la forme diagonale.

En faisant cette transformation sur l'équation $e^{tU} = E + \sum_{p=1}^r \frac{t^p}{p!} U^p$,

on voit que U devient une matrice diagonale et que ses racines caractéristiques sont de la forme $i\alpha$ (α réel). Inversement, si la matrice U est elliptique, le groupe e^{tU} est borné.

Le groupe e^{tU} est déjà borné, lorsqu'à une valeur particulière $t_0 \neq 0$ il correspond une matrice bornée. En effet, si t est une valeur quelconque du paramètre, on peut écrire $e^{tU} = (e^{t_0 U})^m e^{tU}$, m étant un entier et $0 \leq \nu < |t_0|$. Par conséquent, si la matrice $e^{t_0 U}$ est bornée, U est une matrice elliptique et réciproquement. Pour que $e^{tU} = E$, il faut et il suffit que $\frac{1}{2\pi} U$ soit une matrice elliptique régulière.

Nous supposons maintenant que U est une matrice diagonale et nous désignons par $i\alpha_1, \dots, i\alpha_n$ ses racines caractéristiques. On a alors $e^{tU} = (t\alpha_1, \dots, t\alpha_n)$. Les valeurs de t admettant une

relation de la forme $b \cdot 2\pi + \sum_{r=1}^n b_r t \alpha_r = 0$ à coefficients entiers,

$b \neq 0, b_1, \dots, b_n$ forment évidemment un ensemble dénombrable D .

Soit t_0 une valeur n'appartenant pas à cet ensemble. Les angles $t_0 \alpha_1, \dots, t_0 \alpha_n$ sont alors ou bien linéairement indépendants, ou bien ils remplissent un système de $n-r$ équations linéaires homogènes indépendantes à coefficients entiers, r désignant l'ordre de la matrice normale $e^{t_0 U}$. Cela a lieu aussi pour toute autre valeur de t n'appartenant pas au ensemble D , le système d'équations étant manifestement le même. Par conséquent (voir p. 118), le groupe e^{tU} est contenu dans le groupe normal $[e^{t_0 U}]$. C'est évidemment le plus petit groupe clos contenant e^{tU} .

Théorème III. *Pour que le groupe e^{tU} soit borné, il faut et il suffit que la matrice U soit elliptique¹⁷⁾. Dans ce cas, les éléments du groupe, à l'exception d'un certain ensemble dénombrable, sont tous normaux et du même ordre r . Le plus petit groupe clos*

¹⁷⁾ Cela était connu. Cf. E. Cartan, Journ. de math. (9) 8 (1929) p. 5.

renfermant le groupe e^{tU} est un groupe normal d'ordre r . On a par conséquent

$$(13) \quad U = c_1 U_1 + \dots + c_r U_r,$$

U_1, \dots, U_r désignant une base infinitésimale régulière du groupe normal et c_1, \dots, c_r des constantes réelles.

Nous appellerons r l'ordre de la matrice infinitésimale U . Il est aisé de voir que r est le plus petit nombre de matrices régulières et échangeables pour lequel l'équation (13) est possible et que ces r matrices sont nécessairement des matrices infinitésimales du groupe normal en question¹⁸⁾. Si $r=1$, le groupe e^{tU} est un groupe normal et réciproquement. Lorsque $r>1$, la matrice $e^{tU} = e^{c_1 t U_1} \dots e^{c_r t U_r}$ est presque périodique. La courbe représentant le groupe dans l'espace à $2n^2$ dimensions revient une infinité de fois au voisinage de l'élément unité, ce qui donne lieu à des matrices infinitésimales au sens de M. v. NEUMANN, autres que U . Cependant, U est la seule matrice infinitésimale au sens de LIE, parce que la courbe n'admet qu'une seule tangente au point représentant l'élément unité.

Dans son mémoire¹⁹⁾ M. v. NEUMANN donne un exemple d'un groupe borné e^{tU} avec $r=2$ et remarque que le groupe infinitésimal $\{\alpha U\}$, quoique remplissant les conditions bien connues de LIE, n'est pas le groupe infinitésimal d'aucun groupe linéaire. On voit que cela est vrai seulement si l'on définit les matrices infinitésimales comme le fait M. v. NEUMANN. Or, la définition de M. v. NEUMANN, bien que très utile dans l'étude des groupes fermés, n'est, pour ainsi dire, que provisoire. Si l'on sait déjà que le groupe considéré est un groupe de Lie, c'est celle de LIE qu'il faut adopter, puisqu'elle ne dépend que du voisinage de l'élément unité dans la variété du groupe. On peut alors affirmer que tout groupe infinitésimal formel de matrices engendre un groupe linéaire du même ordre. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à répéter la première partie de la démonstration du troisième théorème de LIE donnée par M. CARTAN²⁰⁾,

¹⁸⁾ L'équation (13) est un cas particulier de la décomposition d'une matrice quelconque en matrices régulières, établie par MAURER (l. c.^{11 a}), p. 123—125). Cette décomposition s'obtient d'ailleurs aisément en partant de la forme canonique de Jordan.

¹⁹⁾ L. c.³⁾, p. 41.

²⁰⁾ L. c.²⁾, p. 18.

en y remplaçant les matrices infinitésimales du groupe adjoint par celles du groupe infinitésimal donné.

§ 4.

Soit G un groupe linéaire clos d'ordre r et U_1, \dots, U_r une base infinitésimale de G . En vertu du théorème III, toute matrice infinitésimale du groupe G s'exprime linéairement par des matrices infinitésimales régulières de ce groupe. On en conclut que le groupe G admet une base infinitésimale régulière. Nous supposons dorénavant que les matrices U_1, \dots, U_r sont régulières. Les groupes à un paramètre $e^{t_1 U_1}, \dots, e^{t_r U_r}$ sont alors normaux et admettent une représentation paramétrique à l'aide de polynômes trigonométriques ou fonctions rationnelles.

D'après un théorème connu, le groupe G est le produit direct de groupes du premier ordre aux environs de l'élément unité, c'est-à-dire, l'équation

$$(14) \quad A = e^{t_1 U_1} e^{t_2 U_2} \dots e^{t_r U_r}$$

établit une correspondance biunivoque entre la sphère $t_1^2 + \dots + t_r^2 < \rho^2$ et un certain voisinage V_ρ de l'élément unité, pourvu que ρ soit assez petit. Le groupe G est ainsi représenté dans V_ρ à l'aide de polynômes trigonométriques ou fonctions rationnelles. Si B est un élément quelconque du groupe, l'équation

$$A = B e^{t_1 U_1} e^{t_2 U_2} \dots e^{t_r U_r}$$

représente le groupe de la même manière dans un voisinage de B .

Supposons maintenant que le groupe G soit connexe. Il existe alors un nombre m tel que tout élément du groupe est un produit de m ou d'un moindre nombre d'éléments du voisinage V_ρ ²¹⁾. Si l'on désigne par $t_1^1, \dots, t_r^1; \dots; t_1^m, \dots, t_r^m$ m systèmes à r paramètres réels, l'équation

$$(15) \quad A = \left(e^{t_1^1 U_1} \dots e^{t_r^1 U_r} \right) \dots \left(e^{t_1^m U_1} \dots e^{t_r^m U_r} \right)$$

²¹⁾ En effet, d'après un théorème de O. Schreier (Abh. math. Seminar Hamburg 4 (1926) p. 19), tout élément du groupe G est le produit d'un nombre fini d'éléments appartenant au voisinage V_ρ . Soit $m(A)$ le plus petit nombre d'éléments nécessaires pour représenter ainsi l'élément A . La fonction $m(A)$ est évidemment semi-continue supérieurement et par conséquent bornée.

donne une représentation trigonométrique ou rationnelle du groupe entier.

Théorème IV. *Un groupe linéaire clos d'ordre r peut être représenté au voisinage d'un élément quelconque à l'aide de polynômes trigonométriques ou fonctions rationnelles de r paramètres réels essentiels. Il existe aussi une représentation semblable du groupe entier (supposé connexe), le nombre des paramètres nécessaires étant peut-être plus grand que r .*

Si le groupe G est commutatif, on peut effectuer la multiplication dans (15) en ajoutant les exposants. Il en résulte que le groupe entier est représenté déjà par l'équation (14). On a donc, en vertu du théorème II, le

Théorème V. *Tout groupe linéaire abélien clos et connexe est un groupe normal.*

D'après le théorème IV, l'ensemble représentatif E (cf. p. 113) d'un groupe linéaire clos et connexe est une variété algébrique et même rationnelle. En éliminant les paramètres on obtiendra un système d'équations algébriques à coefficients réels, auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des points de la variété E , c'est à dire les parties réelles et imaginaires des coefficients du groupe G . Ce système d'équations définit un certain nombre de variétés algébriques réelles bornées et connexes dont les dimensions sont au plus égales à r . L'ensemble E est nécessairement contenu dans une de ces variétés. Etant à la fois ouvert et fermé relativement à cette variété, il se confond avec elle.

Théorème VI. *Tout groupe linéaire clos et connexe est un groupe algébrique.*

§ 5.

La variété E peut être considérée comme un *espace homogène*, transformé transitivement par le premier ou le second groupe des paramètres²²⁾. On y peut définir d'une façon élémentaire une mesure invariante par ces deux groupes. En effet, dans le cas d'un groupe de matrices orthogonales réelles, la mesure r -dimensionnelle au sens ordinaire est invariante²³⁾. Or, nous savons que

²²⁾ Voir E. Cartan, l. c.²⁾, p. 13—14.

²³⁾ A. Hurwitz, l. c.¹⁰⁾, p. 72—73.

le groupe G est semblable ou bien à un groupe de cette espèce, ou bien à un groupe de matrices unitaires. Dans le dernier cas on peut le ramener à un groupe de matrices orthogonales réelles à $2n$ variables.

La mesure étant ainsi définie, considérons l'équation $A = e^{U_1 t_1 + \dots + U_r t_r}$. Cette équation établit une correspondance biunivoque entre la sphère $t_1^2 + \dots + t_r^2 < \rho^2$ et un certain voisinage de l'élément unité, pourvu que ρ soit assez petit (Voir p. 114—15). D'après le théorème III, les points de la sphère correspondant aux éléments anormaux forment sur tout rayon un ensemble dénombrable. Par conséquent, presque tout point de la sphère représente un élément normal. La correspondance en question étant régulière au sens de la théorie de la mesure, il s'ensuit que l'ensemble des éléments anormaux du voisinage considéré est de mesure nulle. Si tout élément du groupe G est engendré par une matrice infinitésimale, la conclusion s'applique au groupe entier.

Théorème VII. *Soit G un groupe linéaire clos. L'ensemble des éléments anormaux contenus dans un suffisamment petit voisinage de l'élément unité est de mesure nulle. Il en est de même de l'ensemble de tous éléments anormaux du groupe G , lorsque ce groupe est tout entier engendré par ses matrices infinitésimales.*

L'expression „élément normal“ se trouve ainsi justifiée.

§ 6.

Nous conservons les notations du paragraphe 4. Prenons dans chaque groupe $e^{t_r U_r}$ un élément primitif A_r . Les éléments A_1, A_2, \dots, A_r engendrent un groupe dénombrable qui, en vertu de la représentation (15), est un sous-groupe partout dense de G . On peut choisir les éléments A_r aussi voisins de l'élément unité qu'on le veut.

Nous désignerons par s le plus petit nombre tel que tout voisinage de l'élément unité contient s éléments constituant un sous-groupe dénombrable partout dense de G et nous dirons alors que G est un groupe à s générateurs. Nous venons de voir que $s \leq r$. Si $r > 1$, on a même $s < r$. Cela résulte de la remarque suivante :

Un groupe de Lie à deux paramètres réels, clos et connexe, est nécessairement commutatif.

En effet, la variété d'un groupe non commutatif à deux paramètres étant homéomorphe au plan euclidien, un tel groupe est toujours ouvert.

Supposons donc que G soit un groupe non commutatif d'ordre $r > 2$. Il admet alors deux matrices infinitésimales régulières non échangeables, soit U_1 et U_2 . Le plus petit groupe clos contenant les groupes $e^{t_1 U_1}$ et $e^{t_2 U_2}$ est d'ordre plus grand que deux, d'après la remarque que nous venons de faire²⁴⁾. Il admet par suite, en dehors de U_1 et U_2 , au moins une troisième matrice infinitésimale régulière du groupe G , soit U_3 . Il est donc possible d'approcher indéfiniment tout élément du groupe $e^{t_3 U_3}$, et en particulier A_3 , par des produits de puissances de A_1 et A_2 . Par conséquent, les $r-1$ éléments $A_1, A_2, A_4, \dots, A_n$ engendrent déjà un sous-groupe dénombrable partout dense.

Théorème VIII. *Tout groupe linéaire clos et connexe d'ordre r est un groupe à s générateurs, le nombre s étant moindre que r , dès que $r > 1$.*

(Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1933).

²⁴⁾ L'idée de considérer ce groupe nous a été suggérée par une remarque de M. S. Ulam.