Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen

von

S. BANACH und S. MAZUR (Lwów).

Wir beweisen in dieser Note, daß wenn die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume vom Typus (B) erklärter Funktionale eine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist, so ist sie sogar abgeschlossen; dies bildet eine Verschärfung eines Resultates der Herren S. Mazur und L. Sternbach, laut dessen die Menge R nicht genau eine F_{σ}-Menge sein kann [1]). Als eine leichte Folgerung aus dem obigen Satze ergibt sich, für jeden unendlichvieldimensionalen Raum vom Typus (B), die Existenz einer linearen Menge die zwar eine $F_{\sigma\delta}$-aber dabei keine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist. Wir fügen noch gewisse Verallgemeinerungen des oben formulierten Satzes an und geben im Zusammenhang damit einige Beispiele [2]).

1. Seien X, Y zwei Räume vom Typus (B) und $\{F_n(x)\}$ eine Folge von linearen in X erklärten Operationen mit den Werten aus Y; wir bezeichnen mit R die Konvergenzmenge der Folge $\{F_n(x)\}$. Ferner sei x_0 ein Punkt aus R, r_0 eine positive Zahl und S_0 die Menge der $x \in R$, für welche $|x-x_0| \leqslant r_0$, $|F_n(x)-F_n(x_0)| \leqslant r_0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Hilfssatz 1. *Ist R eine $G_{\delta\sigma}$-Menge, so ist S_0 von zweiter Kategorie in ihrer abgeschlossenen Hülle $\overline{S}_0$; $\overline{S}_0 - S_0$ ist dabei von erster Kategorie in $\overline{S}_0$.*

Beweis. Sei $R = R_1 + R_2 + \ldots$, wo jede der Mengen R_n eine G_{δ}-Menge ist. Setzt man $|x|^* =$ obere Grenze $(|x|, |F_1(x)|,$

1) S. Mazur und L. Sternbach, Über Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen, Stud. Math. 4 (1933) p. 54–65, insb. p. 61.

2) Vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932, p. 235.

$|F_2(x)|, \ldots)$ für $x \in R$, so wird R bei dieser Normierung zu einem Raume vom Typus (B); wir bezeichnen ihn mit R^*. Aus $R^* = R_1 + R_2 + \ldots$ folgt, daß eine der Mengen R_n, etwa R_{n_0}, von zweiter Kategorie in R^* und umsomehr in einer Kugel dieses Raumes dicht ist; sei x_0^* ihr Mittelpunkt und r_0^* ihr Radius. Mit Z_0 bezeichnen wir die Menge der Elemente der Form $\frac{r_0}{r_0^*} x + x_0 - x_0^*$, wo $x \in R_{n_0}$; es ist $Z_0 \subset R$. Wie leicht einzusehen, ist die Menge Z_0 dicht in der Kugel vom Mittelpunkt x_0 und Radius r_0, d. h. in der Menge S_0. Die Menge $R_0 = Z_0 S_0$ ist also dicht in S_0 im Raume R^*; wegen $|x| \leqslant |x|^*$ für $x \in R$, folgt daraus sofort, daß R_0 in S_0 auch im Raume X dicht ist. Wir beschränken uns nun auf die Betrachtung des ursprünglichen Raumes X. Da nach Voraussetzung R_{n_0} eine G_{δ}-Menge ist, so besitzt die mit ihr homothetische Menge Z_0 dieselbe Eigenschaft; in Anbetracht dessen, daß die Menge R_0 den Durchschnitt der Menge Z_0 und der abgeschlossenen, aus allen $x \in X$, für die $|x-x_0| \leqslant r_0$ und stets $|F_n(x)-F_n(x_0)| \leqslant r_0$ gilt, bestehenden Menge bildet, folgern wir, daß auch R_0 eine G_{δ}-Menge ist. R_0 ist dicht in S_0, also auch in $\overline{S}_0$; als eine in der abgeschlossenen Menge $\overline{S}_0$ dichte G_{δ}-Menge ist R_0 von zweiter und dabei $\overline{S}_0 - R_0$ von erster Kategorie in $\overline{S}_0$; wegen $R_0 \subset S_0$ ist mithin auch $\overline{S}_0 - S_0$ von erster Kategorie in $\overline{S}_0$, w. z. b. w.

Wir sagen, daß die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E) besitzt, wenn es Punkte $z_m \in R$ $(m=1, 2, \ldots)$ und $z_0 \in X-R$ gibt mit $\lim_{m\to\infty} z_m = z_0$, $|F_n(z_m)| \leqslant 1$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$.

Hilfssatz 2. *Besitzt die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E), so ist S_0 von erster Kategorie in $\overline{S}_0$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, daß S_0 mit der Menge aller $x \in R$, für die $|x| \leqslant 1$, $|F_n(x)| \leqslant 1$ $(n=1, 2, \ldots)$ gilt, identisch ist. Nehmen wir an, daß S_0 von zweiter Kategorie in $\overline{S}_0$ ist. Bei natürlichen p, q sei S_{pq} die Menge der $x \in X$, für die $|x| \leqslant 1$, $|F_n(x)| \leqslant 1$ $(n=1, 2, \ldots)$ und $|F_i(x) - F_k(x)| \leqslant \frac{1}{q}$ $(i, k = p, p+1, \ldots)$; offenbar ist $S_0 = (S_{11} + S_{21} + \ldots)(S_{12} + S_{22} + \ldots) \ldots$. Daraus folgt, daß $\overline{S}_0 (S_{1q} + S_{2q} + \ldots)$ von zweiter Kategorie in $\overline{S}_0$ ist, also — da die Mengen $\overline{S}_0 S_{pq}$ abgeschlossen in $\overline{S}_0$ sind —, daß für ein natürliches p_q die Menge

$W_q = \overline{S}_0 S_{p_q q}$ einen Punkt x_q enthält, der ein innerer Punkt von W_q in $\overline{S}_0$ ist; wie leicht einzusehen ist $\frac{1}{2} x_q$ auch ein innerer Punkt von W_q in $\overline{S}_0$ $(q=1,2,\ldots)$. Nach Voraussetzung besitzt die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E); es gibt also Punkte $z_m \in R$ $(m=1,2,\ldots)$ und $z_0 \in X-R$, so daß $\lim\limits_{m\to\infty} z_m = z_0$, $|F_n(z_m)| \leqslant 1$ $(n, m=1, 2, \ldots)$; man kann annehmen, daß stets $|z_m| \leqslant \frac{1}{4}$, $|F_n(z_m)| \leqslant \frac{1}{4}$. Wir setzen $z_{qmr} = \frac{1}{2} x_q + z_m - z_r$, $z_{qm} = \frac{1}{2} x_q + z_m - z_0$ $(q, m, r=1,2,\ldots)$; wegen $|x_q| \leqslant 1$, $|F_n(x_q)| \leqslant 1$ $(q, n=1,2,\ldots)$ ist stets $|z_{qmr}| \leqslant 1$, $|F_n(z_{qmr})| \leqslant 1$ und da außerdem $z_{qmr} \in R$, so ist $z_{qmr} \in S_0$; aus $z_{qm} = \lim\limits_{r\to\infty} z_{qmr}$ folgt nun $z_{qm} \in \overline{S}$ $(q, m=1,2,\ldots)$. Da $\lim\limits_{m\to\infty} z_{qm} = \frac{1}{2} x_q$ und $\frac{1}{2} x_q$ ein innerer Punkt von W_q in $\overline{S}_0$ ist, gibt es eine natürliche Zahl m_q, so daß $z_{qm_q} \in W_q$ $(q=1,2,\ldots)$. Es ist stets $z_0 = \frac{1}{2} x_q + z_{m_q} - z_{qm_q}$ und folglich $|F_i(z_0) - F_k(z_0)| \leqslant \frac{1}{2} |F_i(x_q) - F_k(x_q)| + |F_i(z_{m_q}) - F_k(z_{m_q})| + |F_i(z_{qm_q}) - F_k(z_{qm_q})|$; aus $x_q \in W_q$ folgt $|F_i(x_q) - F_k(x_q)| \leqslant \frac{1}{q}$, ebenso ergibt sich aus $z_{qm_q} \in W_p$ die Ungleichung $|F_i(z_{qm_q}) - F_k(z_{qm_q})| \leqslant \frac{1}{q}$ $(i, k = p_q, p_q+1, \ldots;\ q=1,2,\ldots)$. Wir haben also $|F_i(z_0) - F_k(z_0)| \leqslant \frac{3}{2q} + |F_i(z_{m_q}) - F_k(z_{m_q})|$ $(i, k = p_q, p_q+1, \ldots;\ q=1,2,\ldots)$; wegen $z_{m_q} \in R$ folgt hieraus sofort

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\underset{i,\,k=n,\,n+1,\ldots}{\text{obere Grenze}} |F_i(z_0) - F_k(z_0)|\Big] \leqslant \frac{3}{2q} \qquad (q=1,2,\ldots),$$

was schließlich $z_0 \in R$ ergibt, in Widerspruch mit dem Vorangehenden.

Wir beweisen jetzt den

Satz: *Ist die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume X vom Typus (B) erklärter Funktionale $\{F_n(x)\}$ eine $G_{\delta\sigma}$-Menge, so ist sie abgeschlossen.*

Beweis. Angenommen, es sei R nicht abgeschlossen; nach einem Satze der Herren S. Mazur und L. Sternbach besitzt dann die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E) [3]. Behalten wir die vorige Bezeichnungsweise bei, so ist nach dem Hilfssatze 2 die Menge S_0 von erster Kategorie in $\overline{S}_0$; also nach dem Hilfssatze 1 kann R nicht eine $G_{\delta\sigma}$-Menge sein, entgegen der Voraussetzung.

2. Der im vorigen Abschnitte gegebene Satz behält seine Gültigkeit, wenn $\{F_n(x)\}$ eine Folge linearer Operationen ist, deren Werte einem Raume Y vom Typus (B) von folgender Eigenschaft angehören: ist $y_n \in Y$, $|y_n| = 1$ $(n=1,2,\ldots)$, so gibt es eine reelle Zahlenfolge $\{t_n\}$, so daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ divergiert und dabei ihre Teilsummenfolge beschränkt ist. Der Beweis verbleibt übrigens ohne Änderung, da bei den in Rede stehenden Voraussetzungen die Folge $\{F_n(x)\}$ noch die Eigenschaft (E) besitzt [4].

Aus den Hilfssätzen 1 und 2 folgt noch die

Bemerkung. *Ist die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume X vom Typus (B) erklärter Operationen $\{F_n(x)\}$, mit Werten aus einem ebensolchen Raume Y, eine $G_{\delta\sigma}$-Menge, so ist sie schon eine F_σ-Menge.* — In der Tat sei R_p die Menge der $x \in R$, für welche stets $|F_n(x)| \leqslant p$ $(p=1,2,\ldots)$; offenbar ist $R = R_1 + R_2 + \ldots$. Wir behaupten, daß jede der Mengen R_p abgeschlossen ist. Anderenfalls gibt es nämlich Punkte $z_m^* \in R_p$ $(m=1,2,\ldots)$ und $z_0^* \in X - R_p$, so daß $\lim\limits_{m\to\infty} z_m^* = z_0^*$. Es ist $|F_n(z_m^*)| \leqslant p$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$, also auch stets $|F_n(z_0^*)| \leqslant p$; folglich $z_0^* \in X - R$. Setzt man $z_m = \frac{1}{p} z_m^*$ $(m=1,2,\ldots)$, $z_0 = \frac{1}{p} z_0^*$, so ist $z_m \in R$ $(m=1,2,\ldots)$, $z_0 \in X-R$, $\lim\limits_{m\to\infty} z_m = z_0$ und $|F_n(z_m)| \leqslant 1$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$; die Folge $\{F_n(x)\}$ besitzt also die Eigenschaft (E). Von da aus folgt alles wie beim Beweise von Satz 1.

3. Wir bringen jetzt einige Anwendungen der vorigen Sätze. Zuerst zeigen wir, daß es *in jedem unendlichviel-dimensionalen Raume X vom Typus (B) eine lineare Menge R gibt, die zwar eine $F_{\sigma\delta}$- aber dabei keine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist.* Sei $\{F_n(x)\}$ eine Folge linearer in X erklärter Funktionale derart, daß die Konvergenz-

[3] S. die unter [1] zitierte Arbeit, p. 60.

[4] S. die unter [1] zitierte Arbeit, p. 62.

menge R dieser Folge nicht abgeschlossen ist[5]). Als Konvergenzmenge einer Folge stetiger Funktionen ist R eine $F_{\sigma\delta}$-Menge; aus dem im vorigen Abschnitte bewiesenen Satze folgt aber, daß R keine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist. Z. B. bildet also die Menge R aller Punkte $x=\{\xi_n\}$ des Hilbertschen Raumes (l^2), für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ konvergiert, eine $F_{\sigma\delta}$- aber dabei keine $G_{\delta\sigma}$-Menge. Betrachten wir jetzt im Raume X der stetigen Funktionen von der Periode 1 die Menge R, die aus allen stetig-differenzierbaren Funktionen besteht. Setzt man $F_n(x)=n[x(t+\frac{1}{n})-x(t)]$ für $x\in X$, $(n=1,2,\ldots)$, so sind $F_n(x)$ lineare Operationen in X, mit den wieder diesem Raume angehörenden Werten, und R ist mit der Konvergenzmenge der Folge $\{F_n(x)\}$ identisch. R ist eine $F_{\sigma\delta}$- aber keine $G_{\delta\sigma}$-Menge, da ersichtlich die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E) besitzt. *Die Menge der stetig-differenzierbaren Funktionen von der Periode* 1 *ist im Raume aller stetigen Funktionen von der Periode* 1 *eine $F_{\sigma\delta}$- dabei aber keine $G_{\delta\sigma}$-Menge.*

(Reçu par la Rédaction le 21. 6. 1933).

[5]) S. Mazur und L. Sternbach, Über die Borelschen linearen Mengen, Stud. Math. 4 (1933) p. 48—53, ins. p. 48.

Sur la structure des ensembles linéaires

par

S. BANACH et C. KURATOWSKI (Lwów).

Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues $y=f(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, la distance de deux fonctions f et g étant supposée égale à $\max|f(x)-g(x)|$. Nous allons définir dans cet espace un ensemble linéaire $\mathcal{L}$ qui est un complémentaire analytique non borelien [1]).

L'intérêt de cet exemple se rattache, d'une part, au problème de M. Lebesgue de définir un ensemble non borelien jouissant de la propriété de Baire sur tout ensemble parfait [2]), problème qui a été résolu dans l'espace des nombres réels; l'ensemble $\mathcal{L}$ que nous définirons répond non seulement aux conditions imposées par M. Lebesgue [3]) mais est, en outre, un ensemble *linéaire*. D'autre part, le même exemple présente une contribution à l'étude de la structure des ensembles linéaires au point de vue de leur *classification* (en ensembles boreliens des différentes classes, en ensembles analytiques, projectifs etc.). L'existence des ensembles linéaires fermés ou des F_σ (non fermés) ne présente aucune difficulté; quant aux ensembles G_δ, on prouve

[1]) Un ensemble de fonctions est dit *linéaire* s'il contient avec $f(x)$ et $g(x)$ chaque fonction de la forme $\lambda f(x)+\mu g(x)$, λ et μ réels. Les ensembles *boreliens* s'obtiennent à partir des ensembles fermés à l'aide des opérations: somme et produit dénombrables. Les images continues des ensembles boreliens sont dits *analytiques*; les complémentaires de ceux-ci sont dits des *complémentaires analytiques.*

[2]) Journ. de Math. (6) 1 (1905) p. 188.

[3]) puisque chaque complémentaire analytique jouit de la propriété de Baire; v. p. ex. E. Szpilrajn, C. R. du I Congr. math. pays slaves, Varsovie 1930, p. 299.