und hinreichend ist, daß die Mengen K', K'' affin seien[14]). Dabei nennen wir zwei Mengen *affin*, wenn es eine isomorphe Abbildung des Raumes E auf sich selbst gibt, die eine von ihnen in die andere überführt. Umgekehrt sei nun ein in E erklärtes Funktional $F(x)$ eine mit $|x|$ äquivalente Norm; auf Grund von 3, 4 und dessen, daß stets $K(-x) = K(x)$, ist die durch $K(x) \leqslant 1$ bestimmte Menge K ein konvexer beschränkter Körper mit 0 als Mittelpunkt; $K(x)$ ist das Minkowskische Funktional von K. Endlich bezeichne E^* einen linearen normierten mit E isomorphen Raum und $U(x)$ eine isomorphe Abbildung von E auf E^*; es ist klar, daß die durch $|U(x)| \leqslant 1$ bestimmte Menge einen konvexen beschränkten Körper K mit 0 als Mittelpunkt bildet; ferner ist E^* mit $E(K)$ isometrisch. Zusammenfassend sieht man, daß *wenn M die Klasse aller Räume $E(K)$* (K ein konvexer beschränkter Körper mit 0 als Mittelpunkt) *bezeichnet, so ist jeder Raum der Klasse M mit E isomorph; jeder lineare normierte mit E isomorphe Raum ist mit einem gewissen Raume der Klasse M isometrisch.* Wenn E speziell der n-dimensionale euklidische Raum ist, so besteht die Klasse M aus allen n-dimensionalen Minkowskischen Räumen; da alle n-dimensionalen, linearen, normierten Räume isomorph sind, so ist nach dem Vorangehenden jeder n-dimensionale lineare normierte Raum mit einem n-dimensionalen Minkowskischen Raume isometrisch.

(Reçu par la Rédaction le 6. 6. 1933).

[14]) Wenn $U(x)$ eine isometrische Abbildung des linearen normierten Raumes X auf einen ebensolchen Raum Y bildet und $U(0) = 0$, so ist $U(x)$ linear: S. Mazur et S. Ulam, Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés, C. R. 194 (1932) p. 946—948.

Eine Bemerkung zum starken Gesetz der großen Zahlen

von

Z. W. BIRNBAUM und J. SCHREIER (Lwów).

Die von Herrn R. v. Mises formulierte „Regellosigkeitsforderung", welche von ihm auch als das „Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem" bezeichnet wird, hat zu einer lebhaften Diskussion und zahlreichen Einzeluntersuchungen Anlaß gegeben. Es dürfte deshalb vielleicht nicht ohne Interesse sein, das Verhalten einer Folge von Wiederholungen desselben Spieles gegenüber einer, auf Grund eines im voraus gegebenen Spielsystems vorgenommenen Stellenauswahl zu untersuchen. In der Folge soll gezeigt werden, daß das „starke Gesetz der großen Zahlen" auch in diesem Falle gilt.

Wir betrachten ein gerechtes Spiel, bei welchem nur zwei Ergebnisse e bzw. $\bar{e}$ mit den Wahrscheinlichkeiten p bzw. $1-p=q$ möglich sind (der Fall eines Spieles mit mehr als zwei möglichen Ergebnissen kann ganz analog behandelt, oder auch auf den Fall eines zweiwertigen Spieles zurückgeführt werden). Einem solchen Spiel entspricht eine auf den Erwartungswert Null normierte Zufallsvariable, welche den Wert $1/p$ mit der Wahrscheinlichkeit p und den Wert $-1/q$ mit der Wahrscheinlichkeit q annimmt. Dem abzählbar oft wiederholten Spiel kann bekanntlich folgendes arithmetische Modell zugeordnet werden:

Das Intervall $\langle 0, 1\rangle$ wird in zwei Teile, I_0 von der Länge $|I_0| = p$ und I_1 von der Länge $|I_1| = q$ zerlegt. I_0 teilt man in I_{00} mit der Länge $|I_{00}| = p^2$ und I_{01} mit der Länge $|I_{01}| = pq$, I_1 wird in I_{10} mit der Länge $|I_{10}| = qp$ und I_{11} mit der Länge $|I_{11}| = q^2$ zerlegt. Eine Fortsetzung dieses Verfahrens liefert die Intervalle $I_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}$ für beliebige natürliche n und alle möglichen

Werte $\nu_i = 0, 1$. Die Funktionen $c_n(x)$ werden nun durch die Beziehungen definiert:

$$(1) \quad \begin{aligned} c_n(x) &= 1/p \text{ in allen Intervallen } I_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}, \text{ für welche } \nu_n = 0 \text{ ist} \\ c_n(x) &= -1/q \text{ in allen Intervallen } I_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}, \text{ für welche } \nu_n = 1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei der ersten, 2-ten, ..., i-ten, ..., n-ten Wiederholung des Spieles beziehungsweise die Ergebnisse $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ zustandekommen, gleich ist $|I_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}|$, wo $\nu_i = 0$ wenn $\alpha_i = e$ und $\nu_i = 1$ wenn $\alpha_i = \bar{e}$ ist.

Bei diesen Verabredungen kann das starke Gesetz der großen Zahlen folgendermaßen ausgedrückt werden: Für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null gilt die Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_1(x) + c_2(x) + \dots + c_n(x)}{n} = 0;$$

die übliche wahrscheinlichkeitstheoretische Formulierung lautet:

Wenn k_n die Anzahl derjenigen unter den n ersten Spielen, in welchen das Ergebnis e war, ist „fast sicher"

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{k_n}{n} - p \right) = 0.$$

Unter einem *Spielsystem* verstehen wir eine Folge von reellen Funktionen $A_n(x)$, welche mit Hilfe der durch (1) definierten Funktionen $c_n(x)$ folgendermaßen erklärt werden:

$$A_n(x) = A_n[c_1(x), c_2(x), \dots c_{n-1}(x)].$$

Dabei bedeutet $A_n(x)$, falls $A_n(x) \neq 0$, den Einsatz, welcher bei Befolgung des Spielsystems bei der n-ten Wiederholung des Spieles auf das Erscheinen des Ergebnisses e, wenn $A_n(x) > 0$, bzw. auf das Erscheinen der Ergebnisses $\bar{e}$, wenn $A_n(x) < 0$, zu setzen ist. Wenn $A_n(x) = 0$ ist, so bedeutet das, daß bei der n-ten Wiederholung des Spieles bei Befolgung des Spielsystems überhaupt nicht mitgespielt werden soll. Das so erklärte Spielsystem ist so konstruiert, daß auf Grund der Kenntnis der $n-1$ bisherigen Spielergebnisse $c_1(x), \dots, c_n(x)$ die Weisung erteilt wird, ob in der n-ten Wiederholung des Spieles auf e oder auf $\bar{e}$ gesetzt werden soll, wie hoch der Einsatz sein soll, oder ob eventuell überhaupt nicht gespielt werden soll; ein solches Spielsystem scheint ziemlich genau dem zu entsprechen, was man unter diesem Ausdruck verstehen möchte.

Wir definieren noch: $I[A_n(x)] = \begin{matrix} 0 \text{ wenn } A_n(x) = 0 \\ 1 \text{ wenn } A_n(x) \neq 0. \end{matrix}$

Satz.

Voraussetzung: 1. $A_n(x) < C < +\infty$

2. für jedes x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null existiert eine (von x abhängige) Folge natürlicher Zahlen $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i, \dots$, so daß $A_{n_i}(x) \neq 0$ ist für $i = 1, 2, \dots$

Behauptung:

$$(2) \quad \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} A_n(x) \cdot c_n(x)}{\sum_{n=1}^{N} I[A_n(x)]} = 0$$

für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null.

Bemerkungen: Die Voraussetzung 1 kann — mit Hilfe bekannter schärferer Sätze über Orthogonalentwicklungen — durch allgemeinere Annahmen über die Größenordnung der Einsätze ersetzt werden. Es ist jedoch von vornherein klar, daß nicht beliebig anwachsende Einsätze zugelassen werden dürfen, da z. B. bei einem Einsatz von n^n in der n-ten Wiederholung des Spieles das Gesetz der großen Zahlen bestimmt nicht mehr gilt. Die Voraussetzung 2 kann nicht abgeschwächt werden, da sie nur zum Ausdruck bringt, daß bei Befolgung des Systems „fast sicher" in unendlich vielen Wiederholungen des Spieles wirklich mitgespielt werden soll. Die Behauptung des Satzes hat folgende Bedeutung: der Zähler $\sum_{n=1}^{N} A_n(x) c_n(x)$ ist gleich dem Saldo des nach dem System $\{A_n(x)\}$ spielenden Spielers nach n Wiederholungen des Spieles, während der Nenner $\sum_{n=1}^{N} I[A_n(x)]$ die Anzahl derjenigen Wiederholungen angibt, bei welchen wirklich mitgespielt (gesetzt) wurde; die Beziehung (2) kann daher in Worten so ausgedrückt werden, daß unter den Voraussetzungen 1 und 2, bei einem gerechten Spiel trotz der Anwendung eines Spielsystems „fast sicher" der Saldo nach n Wiederholungen des Spieles, dividiert durch die Anzahl derjenigen Wiederholungen, bei welchen tatsächlich mitgespielt wurde, mit wachsendem n gegen Null konvergiert.

Beweis: Wir definieren die Funktionen $l_n(x)$ für $n=1, 2, \dots$ durch die Beziehungen

$$\sum_{\nu=1}^{l_n(x)} I[A_\nu(x)] = n$$

und setzen

$$A_{l_n(x)}(x) \cdot c_{l_n(x)}(x) = \varphi_n(x).$$

Wir zeigen zunächst, daß

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = 0 \tag{3}$$

für alle $n > m$ gilt. E_{ni} sei die Menge derjenigen x, für welche $l_n(x) = i$ ist. E_{ni} zerfällt in höchstens abzählbar viele Intervalle $E_{ni} = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{ni}^{(\nu)}$, wobei in jedem Intervall $d_{ni}^{(\nu)}$ alle Funktionen $c_1(x)$, $c_2(x), \dots, c_{l_n(x)-1}(x)$ konstant sind. Es ist

$$\int_{d_{ni}^{(\nu)}} \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_{d_{ni}^{(\nu)}} A_{l_m(x)}(x) \cdot c_{l_m(x)}(x) \cdot A_{l_n(x)}(x) \cdot c_{l_n(x)}(x)\,dx = 0,$$

denn $A_{l_m(x)}(x) \cdot c_{l_m(x)}(x) \cdot A_{l_n(x)}(x)$ ist in $d_{ni}^{(\nu)}$ konstant, da $l_m(x) < l_n(x)$ ist und

$$\int_{d_{ni}^{(\nu)}} c_{l_n(x)}(x)\,dx = |\,d_{ni}^{(\nu)}| \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot p - \frac{1}{q} \cdot q\right) = 0$$

ist. Wegen $\langle 0, 1\rangle = \sum_{(n,i)} E_{ni} = \sum_{(n,i,\nu)} d_{ni}^{(\nu)}$, gilt daher (3). Die Funktionen $\varphi_n(x)$ bilden demnach ein gemeinsam beschränktes, orthogonales Funktionensystem mit $\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = 0$. Für solche Systeme gilt bekanntlich [1]) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) = 0$ fast überall. Wegen

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)}{n} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} A_{l_\nu(x)}(x) \cdot c_{l_\nu(x)}(x)}{\sum_{\nu=1}^{l_n(x)} I[A_{\nu(x)}]} = \frac{\sum_{\nu=1}^{l_n(x)} A_\nu(x) \cdot c_\nu(x)}{\sum_{\nu=1}^{l_n(x)} I[A_\nu(x)]}$$

gilt daher (2).

Wird insbesondere $A_n(x) \equiv 1$, $p = q = 1/2$ gesetzt, so erhält man die folgende Verschärfung eines Borelschen Satzes: Entfernt man auf beliebige Weise in den dyadischen Entwicklungen aller reellen Zahlen des Intervalles $\langle 0, 1\rangle$ gewisse Ziffern, mit der einzigen Beschränkung, daß, falls die n-te Ziffer in einer Zahl x gestrichen wird, in allen anderen Zahlen, die dieselben $(n-1)$ ersten Ziffern wie x haben, ebenfalls die n-te Ziffer gestrichen wird, so *ist für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null der Grenzwert der relativen Häufigkeiten der Nullen und Einser unter den nicht gestrichenen Ziffern* gleich $1/2$.

(Reçu par la Rédaction le 14. 6. 1933).

[1]) Dies ist genau das starke Gesetz der großen Zahlen in einer Formulierung, wie sie z. B. bei Al. Rajchman, Zaostrzone prawo wielkich liczb, Mathesis Polska, 6 (1932) p. 145—161 gegeben wird. Für den dort angewendeten Satz über Orthogonalsysteme vgl. S. Banach, Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales, Bull. Ac. Crac., 1919, p. 66—72.