Über Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen

von

S. MAZUR und L. STERNBACH (Lwów).

Bekanntlich ist die Konvergenzmenge einer Folge stetiger, in einem metrischen Raume erklärter Funktionen, deren Werte ebenfalls einem metrischen Raume angehören, eine $F_{\sigma\delta}$-Menge; wenn andererseits R eine $F_{\sigma\delta}$-Menge in einem metrischen Raume X ist, so kann man in X eine Folge reeller stetiger Funktionen erklären, deren Konvergenzmenge R ist[1]). Insbesondere bildet also die Konvergenzmenge einer Folge linearer, in einem Raume vom Typus (B) erklärter Operationen, mit Werten aus ebenfalls einem solchen Raume, eine lineare $F_{\sigma\delta}$-Menge. In dieser Note beweisen wir vor allem, daß wenn eine lineare, nicht abgeschlossene, in einem Raume X vom Typus (B) gelegene Menge R Vereinigung abzählbar vieler linearer und abgeschlossener Mengen ist, so kann man in X keine Folge linearer Operationen mit Werten aus einem ebensolchen Raume so erklären, daß R Konvergenzmenge dieser Folge sei. Wir beweisen ferner den Satz, laut dessen die Konvergenzmenge einer Folge linearer, in einem beliebigen Raume vom Typus (B) erklärter Funktionale keine F_σ-Menge sein kann, ohne abgeschlossen zu sein. Wie wir zeigen, verbleibt dieser Satz in Kraft auch in dem Falle, wenn es sich nicht um eine Folge linearer Funktionale, sondern allgemeiner, linearer Operationen handelt, deren Werte einem Raume Y vom Typus (B) von folgender Eigenschaft angehören: wenn $\{y_n\}$ eine Folge von Elementen aus Y mit der Norm 1 ist, so gibt es eine solche Folge reeller Zahlen $\{\vartheta_n\}$, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n y_n$ divergiert und ihre Teilsummenfolge beschränkt ist. Einige Anwendungen hier bewiesener Sätze werden wir an anderer Stelle angeben[2]).

[1]) Vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin 1927, p. 271.

§ 1.

Satz 1. *Wenn die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume X vom Typus (B) erklärter Operationen $\{F_n(x)\}$ mit Werten aus einem ebensolchen Raume Vereinigung abzählbar vieler linearer und abgeschlossener Mengen ist, so ist sie selbst abgeschlossen.*

Beweis. Setzen wir $R=\sum_{n=1}^{\infty}R_n$, wo R_n lineare, abgeschlossene Mengen sind. Es ist leicht zu sehen, daß $|x|^*=|x|+\underset{n=1,2,\ldots}{\text{obere Grenze}}|F_n(x)|$ für $x\varepsilon R$ gesetzt, die Menge R einen Raum R^* vom Typus (B) bildet. Die Mengen R_n sind, in diesem Raume betrachtet, abgeschlossen. Aus der Gleichheit $R^*=\sum_{n=1}^{\infty}R_n$ folgt nun, daß eine der Mengen R_n nicht nirgendsdicht ist und also als lineare Menge mit R^* übereinstimmt. Die Menge R ist also abgeschlossen, entgegen der Voraussetzung.

Hilfssatz 1. *Es sei $\{a_{nm}\}$ eine Doppelfolge reeller Zahlen derart, daß 1) $|a_{nm}|\leqslant A\,(n,m=1,2,\ldots;$ A positive Konstante), 2) $\lim_{m\to\infty}a_{nm}=0\,(n=1,2,\ldots)$ und 3) $\overline{\lim_{m\to\infty}}\ \underset{n=1,2,\ldots}{\text{obere Grenze}}\,|a_{nm}|>0$ ist. Es gibt dann eine beschränkte reelle Zahlenfolge $\{\vartheta_m\}$ von der Eigenschaft, daß jede der Reihen $\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m a_{nm}$ konvergiert und, wenn wir $\Theta_{nm}=\sum_{k=1}^{m}\vartheta_k a_{nk}$, $\Theta_n=\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m a_{nm}$ $(n,m=1,2,\ldots)$ setzen, so gilt: 1*) $|\Theta_{nm}|\leqslant\Theta$ $(n,m=1,2,\ldots;$ Θ positive Konstante); 2*) die Folge $\{\Theta_n\}$ divergiert.*

Beweis. Wenn bei einem gewissen m_0 die Folge $\{a_{nm_0}\}$ divergent ist, so genügt es $\vartheta_m=1$ für $m=m_0$, $=0$ für alle anderen m zu setzen, um eine Folge mit geforderten Eigenschaften zu bekommen; man kann also voraussetzen, daß

[2]) Was die Bezeichnungen und Terminologie betrifft, vgl.: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932. Vgl. insb. p. 235, sowie: Annales de la Société Polonaise de mathématique, 10 (1931) p. 127.

der $\lim_{n\to\infty} a_{nm}$ $(m=1,2,\ldots)$ existiert. Aus den Voraussetzungen des Hilfssatzes folgt offenbar, daß es eine wachsende Indexfolge $\{m_\mu\}$ gibt derart, daß $\alpha_{\nu\mu}=a_{\nu m_\mu}$ $(\nu,\mu=1,2,\ldots)$ gesetzt, die folgenden Bedingungen erfüllt sein werden: $\bar{1})$ $|\alpha_{\nu\mu}|\leqslant A$ $(\nu,\mu=1,2,\ldots)$; $\bar{2})$ $\sum_{\mu=1}^{\infty}|\alpha_{\nu\mu}|<+\infty$ $(\nu=1,2,\ldots)$; $\bar{3})$ obere Grenze$_{\nu=1,2,\ldots}$ $|\alpha_{\nu\mu}|>B$ $(\mu=1,2,\ldots;$ B positive Konstante). Setzen wir $\alpha_\mu=\lim_{\nu\to\infty}\alpha_{\nu\mu}$ $(\mu=1,2\ldots)$ und unterscheiden zwei Fälle:

(I). 0 *ist Häufungspunkt der Folge* $\{\alpha_\mu\}$. Mittels Induktion erklären wir zwei Folgen natürlicher Zahlen $\mu_0,\mu_1,\ldots$ und $\nu_0,\nu_1,\ldots$ auf folgende Weise. Es sei $\mu_0=\nu_0=1$ und setzen wir voraus, daß für ein gewisses natürliches k die Glieder μ_{k-1}, ν_{k-1} schon erklärt sind; wir definieren vor allem $\mu_k>\mu_{k-1}$, so daß

(1) $$|\alpha_{\mu_k}|<\frac{B}{2^{k+1}},$$

(2) $$\sum_{\mu=\mu_k}^{\infty}|\alpha_{\nu\mu}|<\frac{B}{k}\qquad(\nu=1,2,\ldots\,\nu_{k-1})$$

sei. Unter Berücksichtigung der Bedingung $\bar{3})$ gibt es dann einen Index ν'_k so, daß $|\alpha_{\nu'_k\mu_k}|>B$ ist; wir wählen jetzt für ν_k eine Zahl $>\nu'_k$, für die die Ungleichungen

(3) $$|\alpha_{\nu\mu_i}-\alpha_{\mu_i}|<\frac{B}{k^2}\qquad(\nu=\nu_k,\ \nu_k+1,\ldots;\ i=1,2,\ldots k)$$

erfüllt sind. Wenn wir $\vartheta_m=(-1)^k$ für $m=m_{\mu_k}$ $(k=1,2,\ldots)$, $=0$ für alle anderen m setzen, so besitzt die Folge $\{\vartheta_m\}$ die geforderten Eigenschaften [3]). Es ist offenbar stets

(4) $$|\Theta_{nm}|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{n\mu_i}|.$$

Bei gegebenem natürlichen n bedeute k den Index, für den $\nu_k\leqslant n<\nu_{k+1}$ gilt. Auf Grund (1), (3) ist bei natürlichem k

[3]) Man kann einfacher $\vartheta_m=1$ für $m=m_{\mu_1},\ m_{\mu_2},\ldots,$ $=0$ für alle anderen m setzen; der späteren Anwendungen wegen ist es aber vorteilhaft, daß die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m$ divergiert und beschränkte Teilsummen hat.

(5) $$\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{n\mu_i}|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{n\mu_i}-\alpha_{\mu_i}|+\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{\mu_i}|<\frac{B}{k}+\frac{B}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right),$$

und auf Grund (2)

(6) $$\sum_{i=k+2}^{\infty}|\alpha_{n\mu_i}|<\frac{B}{k+2};$$

aus der Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{n\mu_i}|=\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{n\mu_i}|+|\alpha_{n\mu_{k+1}}|+\sum_{i=k+2}^{\infty}|\alpha_{n\mu_i}|,$$

den Relationen (4), (5), (6) und den Bedingungen $\bar{1})$, $\bar{2})$ folgt sofort, daß die Bedingung 1*) erfüllt ist. Um die Bedingung 2*) zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß stets $\Theta_n=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\alpha_{n\mu_i}$ ist. In Anbetracht (2), (3) ist bei natürlichem k

$$|\Theta_{\nu_k}|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{\nu_k\mu_i}-\alpha_{\mu_i}|+\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{\mu_i}|+\sum_{i=k+1}^{\infty}|\alpha_{\nu_k\mu_i}|<\frac{B}{k}$$
$$+\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{\mu_i}|+\frac{B}{k+1},$$

und somit auf Grund (1)

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}|\Theta_n|<\frac{B}{2};$$

andererseits ist für natürliches $k>1$ auf Grund (2), (3)

$$|\Theta_{\nu'_k}|\geqslant|\alpha_{\nu'_k\mu_k}|-\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{\nu'_k\mu_i}|-\sum_{i=k+1}^{\infty}|\alpha_{\nu'_k\mu_i}|\geqslant|\alpha_{\nu'_k\mu_k}|$$
$$-\sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_{\nu'_k\mu_i}-\alpha_{\mu_i}|-\sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_{\mu_i}|-\sum_{i=k+1}^{\infty}|\alpha_{\nu'_k\mu_i}|>B-\frac{B}{k-1}$$
$$-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{\mu_i}|-\frac{B}{k+1},$$

und also wieder kraft (1)

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|\Theta_n|>\frac{B}{2}.$$

(II). 0 *ist kein Häufungspunkt der Folge* $\{\alpha_\mu\}$. Mittels Induktion erklären wir wieder zwei Folgen natürlicher Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots$ und $\nu_0, \nu_1, \ldots$ folgenderart: Wir setzen $\mu_0 = \nu_0 = 1$ und nehmen an, daß bei gewissem natürlichen k die Glieder μ_{k-1}, ν_{k-1} schon erklärt sind; wir wählen $\mu_k > \mu_{k-1}$ so, daß

$$(7) \qquad \sum_{\mu=\mu_k}^{\infty} |\alpha_{\nu\mu}| < \frac{1}{k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \nu_{k-1})$$

ist und weiter ein $\nu_k > \nu_{k-1}$ von der Eigenschaft, daß

$$(8) \qquad |\alpha_{\nu\mu_i} - \alpha_{\mu_i}| < \frac{1}{k^2} \qquad (\nu = \nu_k, \nu_k + 1, \ldots; \; i = 1, 2, \ldots k)$$

ist. *Es gibt eine reelle Zahlenfolge* $\{\tau_k\}$ *so, daß die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \alpha_{\mu_k}$ *divergiert und dabei ihre Teilsummen eine beschränkte Folge bilden:* $|\sum_{i=1}^{k} \tau_i \alpha_{\mu_i}| \leqslant C$ $(k = 1, 2, \ldots;$ C positive Konstante); die Folge $\{\tau_k\}$ ist dann ersichtlich beschränkt: $|\tau_k| \leqslant D$ $(k = 1, 2, \ldots;$ D positive Konstante). Wir behaupten, daß wenn wir $\vartheta_m = \tau_k$ für $m = m_{\mu_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $= 0$ für alle anderen m setzen, so erhalten wir eine die geforderten Eigenschaften besitzende Folge. In der Tat, bezeichnen wir bei gegebenen natürlichen n, m mit k, l solche Indexe, daß $\nu_k \leqslant n < \nu_{k+1}$, $\mu_l \leqslant m < \mu_{l+1}$ ist. Wenn k, l natürliche Zahlen sind, so ist für $l \leqslant k$ in Anbetracht (8)

$$(9\,a) \qquad |\Theta_{nm}| \leqslant \sum_{i=1}^{l} |\tau_i| \, |\alpha_{n\mu_i} - \alpha_{\mu_i}| + |\sum_{i=1}^{l} \tau_i \alpha_{\mu_i}| < D \frac{l}{k^2} + C,$$

für $l = k+1$ ist ebenfalls auf Grund (8)

$$(9\,b) \qquad |\Theta_{nm}| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\tau_i| \, |\alpha_{n\mu_i} - \alpha_{\mu_i}| + |\sum_{i=1}^{k} \tau_i \alpha_{\mu_i}| + |\tau_{k+1}| \, |\alpha_{n\mu_{k+1}}| < \frac{D}{k} + C + AD,$$

und endlich für $l > k+1$ haben wir kraft (7), (8)

$$(9\,c) \qquad |\Theta_{nm}| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\tau_i| \, |\alpha_{n\mu_i} - \alpha_{\mu_i}| + |\sum_{i=1}^{k} \tau_i \alpha_{\mu_i}| + |\tau_{k+1}| \, |\alpha_{n\mu_{k+1}}| + \sum_{i=k+2}^{8} |\tau_i| \, |\alpha_{n\mu_i}| < \frac{D}{k} + C + AD + \frac{D}{k+2}.$$

Aus den Relationen (9 a), (9 b), (9 c) und den Bedingungen $\overline{1}$), $\overline{2}$) folgt unmittelbar, daß die Bedingung 1*) erfüllt ist. Um sich davon zu überzeugen, daß auch 2*) stattfindet, bemerken wir, daß auf Grund (7), (8) bei natürlichem k die Ungleichungen

$$|\Theta_{\nu_k} - \sum_{i=1}^{k} \tau_i \alpha_{\mu_i}| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\tau_i| \, |\alpha_{\nu_k \mu_i} - \alpha_{\mu_i}| + \sum_{i=k+1}^{\infty} |\tau_i| \, |\alpha_{\nu_k \mu_i}| \leqslant \frac{D}{k} + \frac{D}{k+1}$$

gelten; da nun die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i \alpha_{\mu_i}$ divergent ist, so ist es die Folge $\{\Theta_{\nu_k}\}$ und also auch $\{\Theta_\nu\}$.

Hilfssatz 2. *Es sei* $\{a_{nm}\}$ *eine Doppelfolge reeller Zahlen derart, daß* 1) obere Grenze$_{n, m = 1, 2, \ldots}$ $|a_{nm}| = +\infty$, 2) obere Grenze$_{m=1,2,\ldots}$ $|a_{nm}| < +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *und* 3) obere Grenze$_{n=1,2,\ldots}$ $|a_{nm}| < +\infty$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *ist. Es gibt dann eine absolut konvergente Reihe reeller Zahlen* $\sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m$ *von der Beschaffenheit, daß wenn wir* $\Theta_{nm} = \sum_{k=1}^{m} \vartheta_k a_{nk}$, $\Theta_n = \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m a_{nm}$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$ *setzen, dann ist* 1*) $|\Theta_{nm}| \leqslant \Theta$ $(n, m = 1, 2, \ldots;$ Θ *positive Konstante) und* 2*) *die Folge* $\{\Theta_n\}$ *divergent.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes kann man eine wachsende Indexfolge $\{m_\mu\}$ so wählen, daß $A_\mu =$ obere Grenze$_{n=1,2,\ldots}$ $|a_{n m_\mu}|$ gesetzt, $A_\mu > 2^\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ ist. Bezeichnen wir bei gegebenem natürlichen μ mit n_μ einen Index, für den $|a_{n_\mu m_\mu}| > \frac{1}{2} A_\mu$ ist und setzen $\alpha_{\nu\mu} = \frac{1}{|a_{n_\mu m_\mu}|} a_{\nu m_\mu}$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots)$. Die Doppelfolge reeller Zahlen $\{\alpha_{\nu\mu}\}$ erfüllt die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1; es ist nämlich: $|\alpha_{\nu\mu}| < 2$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots)$, $|\alpha_{\nu\mu}| \leqslant \frac{1}{2^{\mu-1}}$ obere Grenze$_{m=1,2,\ldots}$ $|a_{\nu m}|$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots)$, obere Grenze$_{\nu=1,2,\ldots}$ $|\alpha_{\nu\mu}| \geqslant 1$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$. Demnach gibt es eine beschränkte reelle Zahlenfolge $\{\tau_\mu\}$ von der Eigenschaft, daß jede der Reihen $\sum_{\mu=1}^{\infty}\tau_\mu \alpha_{\nu\mu}$ konvergiert und, wenn wir

$$T_{\nu\mu}=\sum_{k=1}^{\mu}\tau_k \alpha_{\nu k},\ T_\nu=\sum_{\mu=1}^{\infty}\tau_\mu \alpha_{\nu\mu} \quad (\nu,\mu=1,2,\ldots)$$

setzen, so ist $|T_{\nu\mu}|\leqslant T$ ($\nu,\mu=1,2,\ldots$; T positive Konstante) und die Folge $\{T_\nu\}$ divergent. Es sei jetzt $\vartheta_m=\frac{\tau_\mu}{|a_{n_\mu m_\mu}|}$ für $m=m_\mu$ ($\mu=1,2,\ldots$), $=0$ für alle anderen m. Da $|\vartheta_m|\leqslant\frac{1}{2^{\mu-1}}|\tau_\mu|$ für $m=m_\mu$ ($\mu=1,2,\ldots$) ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m$ absolut; andererseits ist $\Theta_{nm}=0$ für $m<m_1$, $=T_{n\mu}$ für $m_\mu\leqslant m<m_{\mu+1}$ ($\mu=1,2,\ldots$) und $\Theta_n=T_n$ ($n=1,2,\ldots$), woraus offenbar folgt, daß die Bedingungen 1*) und 2*) erfüllt sind.

Satz 2. *Es sei $\{F_n(x)\}$ eine Folge linearer, in einem Raume X vom Typus (B) erklärter Funktionale, von der wir voraussetzen, daß ihre Konvergenzmenge R nicht abgeschlossen ist. Es gibt dann einen Punkt $x_0\in X-R$ sowie Punkte $x_m\in R$ ($m=1,2,\ldots$) derart, daß $\lim_{m\to\infty}x_m=x_0$, $|F_n(x_m)|\leqslant F$ ($n,m=1,2,\ldots$; F positive Konstante) ist.*

Beweis. Es gibt einen Punkt $y_0\in X-R$ sowie Punkte $y_m\in R$ ($m=1,2,\ldots$) von der Eigenschaft, daß $\lim_{m\to\infty}y_m=y_0$ ist. Es sei X_0 die Menge der linearen Kombinationen der Elemente $y_1,y_2,\ldots$ und es bezeichne $\overline{X_0}$ den Raum vom Typus (B), den die abgeschlossene Hülle von X_0 bildet. Offenbar enthält die Menge der Punkte z, für die $z\in X_0$, $|z|\leqslant 1$ ist, einen in ihr dichten abzählbaren Teil; wir ordnen seine Elemente in eine Folge $\{z_m\}$. Wir werden nun zeigen, daß $a_{nm}=F_n(z_m)$ ($n,m=1,2,\ldots$) gesetzt, die Doppelfolge reeller Zahlen $\{a_{nm}\}$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt. Es sei $|a_{nm}|\leqslant A$ ($n,m=1,2,\ldots$; A positive Konstante) und bezeichnen wir mit K die Menge der Punkte z, für die $z\in\overline{X_0}$, $|z|\leqslant 1$ ist. In Anbetracht dessen, daß die Menge der Punkte $z_1,z_2,\ldots$ in K dicht ist, erhalten wir $|F_n(z)|\leqslant A$ für $z\in K$ ($n=1,2,\ldots$). Die Normen der im Raume $\overline{X_0}$ betrachteten

Funktionale $F_n(x)$ bilden somit eine beschränkte Folge; da die Folge $\{F_n(x)\}$ in der im Raume $\overline{X_0}$ dichten Menge X_0 konvergent ist, so ist sie es auch in jedem Punkte des Raumes $\overline{X_0}$[4]). Das widerspricht aber den Relationen $y_0\in\overline{X_0}$, $y_0\in X-R$ und daher ist in der Tat die Bedingung 1) des Hilfssatzes 2 erfüllt; um sich davon zu überzeugen, daß die Bedingungen 2) und 3) dieses Hilfssatzes auch erfüllt sind, genügt es zu bemerken, daß $|a_{nm}|\leqslant|F_n|$ ($n,m=1,2,\ldots$) ist und dabei jede der Folgen $\{a_{n1}\}$, $\{a_{n2}\},\ldots$ konvergiert, da $z_m\in R$ ($m=1,2,\ldots$). Es bezeichne $\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m$ eine absolut konvergente Reihe reeller Zahlen, die die Bedingungen 1*) und 2*) des Hilfssatzes 2 erfüllt; setzen wir $x_m=\sum_{k=1}^{m}\vartheta_k z_k$ ($m=1,2,\ldots$), $x_0=\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m z_m$. Aus $F_n(x_0)=\Theta_n$ ($n=1,2,\ldots$) folgt $x_0\in X-R$ und außerdem ist $x_m\in R$ ($m=1,2,\ldots$), $\lim_{m\to\infty}x_m=x_0$; endlich haben wir $F_n(x_m)=\Theta_{nm}$ so, daß $|F_n(x_m)|\leqslant F$ ($n,m=1,2,\ldots$; $F=\Theta$) ist, w. z. b. w.

Satz 3. *Wenn die Konvergenzmenge R einer Folge $\{F_n(x)\}$ linearer, in einem Raume X vom Typus (B) erklärter Funktionale eine F_σ-Menge ist, so ist sie abgeschlossen.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß R keine abgeschlossene Menge ist; auf Grund des Satzes 1 gibt es einen Punkt $x_0\in X-R$ sowie Punkte $x_m\in R$ ($m=1,2,\ldots$) von der Eigenschaft, daß $\lim_{m\to\infty}x_m=x_0$, $|F_n(x_m)|\leqslant F$ ($n,m=1,2,\ldots$; F positive Konstante). Andererseits ist, im Einklang mit der Voraussetzung, $R=\sum_{k=1}^{\infty}R_k$, wo R_k abgeschlossene Mengen sind. Wenn wir die Norm eines Elementes $x\in R$ als $|x|^*=|x|+\text{obere Grenze}_{n=1,2,\ldots}|F_n(x)|$ erklären, so bildet die Menge R einen Raum vom Typus (B), welchen wir mit R^* bezeichnen. Die Mengen R_k sind, im Raume R^* betrachtet, abgeschlossen. Wegen der Relation $R^*=\sum_{k=1}^{\infty}R_k$ gibt es also einen solchen Index k_0, daß die Menge R_{k_0} eine Kugel enthält; dies bedeutet, daß es ein $z_0\in R^*$ sowie eine Zahl $r>0$ gibt von der Eigenschaft, daß die Ungleichung $|x-z_0|^*\leqslant r$ die Relation

[4]) S. das unter [2]) zitierte Buch, p. 79.

$x \in R_{k_0}$ zur Folge hat. Es gilt $x_m \in R^*$ $(m=1,2,\ldots)$ und dabei ist die Folge $\{|x_m|^*\}$ beschränkt. Wenn wir ein positives ε so klein wählen, daß stets $\varepsilon |x_m|^* \leqslant r$ ist, und $y_m = \varepsilon x_m + z_0$ setzen, so bekommen wir $|y_m - z_0|^* = \varepsilon |x_m|^* \leqslant r$ und somit $y_m \in R_{k_0}$ $(m=1, 2,\ldots)$. Es ist aber $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = \varepsilon x_0 + z_0$ und die Menge R_{k_0} abgeschlossen, daher ist $(\varepsilon x_0 + z_0) \in R_{k_0}$ und umsomehr $(\varepsilon x_0 + z_0) \in R$; daraus folgt $x_0 \in R$, im Widerspruch mit der Voraussetzung.

§ 2.

Bemerken wir, daß sich die Sätze 2 und 3 nicht verallgemeinern lassen auf den Fall, daß $\{F_n(x)\}$ eine Folge linearer Operationen bedeutet, deren Werte Elemente eines beliebigen Raumes Y vom Typus (B) sind. Sie bleiben aber wahr, wenn der Raum Y folgende Eigenschaft besitzt:

Eigenschaft (W). Wenn $\{y_m\}$ eine Folge von Elementen mit der Norm 1 ist, so gibt es eine reelle Zahlenfolge $\{\vartheta_m\}$ von der Eigenschaft, daß die Reihe $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \vartheta_m y_m$ divergiert und dabei beschränkte Teilsummen hat.

Bemerken wir nämlich, daß *die Hilfssätze* 1 *und* 2 *ihre Gültigkeit beibehalten, wenn die Glieder der Doppelfolge* $\{a_{nm}\}$ nicht reelle Zahlen, sondern allgemeiner *Elemente eines beliebigen, die Eigenschaft (W) besitzenden Raumes vom Typus (B) sind, und* ähnlich *die Sätze* 2 *und* 3, *wenn* $\{F_n(x)\}$ nicht *eine Folge* linearer Funktionale, sondern allgemeiner *linearer Operationen ist, deren Werte Elemente eines beliebigen, die Eigenschaft (W) besitzenden Raumes vom Typus (B) sind;* die Beweise bleiben ohne Änderung.

Offenbar *besitzen Räume vom Typus (B) von endlicher Dimension die Eigenschaft (W).* Dies folgt aus der Bemerkung, daß wenn Y ein Raum vom Typus (B), $y_m \in Y$, $|y_m| = 1$ $(m=1, 2,\ldots)$ ist und dabei die Folge $\{y_m\}$ Häufungspunkte besitzt, so gibt es eine reelle nicht gegen Null konvergente Zahlenfolge $\{\vartheta_m\}$ derart, daß die Teilsummen der Reihe $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \vartheta_m y_m$ beschränkt sind; es genügt nämlich eine wachsende Indexfolge $\{m_k\}$ so zu wählen, daß die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_{m_{2k-1}} - y_{m_{2k}}|$ konvergiert und $\vartheta_m = (-1)^{k-1}$ für $m = m_k$ $(k=1,2,\ldots)$, $=0$ für alle anderen m zu setzen.

Wir werden jetzt zeigen, daß *der Raum (c) der konvergenten Zahlenfolgen die Eigenschaft (W) besitzt.* Da der Raum (c) mit dem Raume (c_0) der gegen Null konvergenten Zahlenfolgen isomorph[5]) und die Eigenschaft (W) in bezug auf die isomorphen Abbildungen invariant ist, so genügt es zu beweisen, daß der Raum (c_0) die Eigenschaft (W) besitzt. Es sei $\{y_m\}$ eine Folge von Elementen aus (c_0) mit der Norm 1 ohne Häufungspunkte; setzen wir $y_m = \{a_{nm}\}$ $(m=1,2,\ldots)$. Nehmen wir zuerst an, daß $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm} = 0$ $(n=1,2,\ldots)$ ist; die Doppelfolge $\{a_{nm}\}$ genügt dann den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1. Wir behaupten, daß für eine den Bedingungen 1*) und 2*) der Behauptung des Hilfssatzes 1 genügende Folge $\{\vartheta_m\}$ die Reihe $\sum\limits_{m=}^{\infty} \vartheta_m y_m$ divergiert und beschränkte Teilsummen hat. In der Tat: es ist $\sum\limits_{k=1}^{m} \vartheta_k y_k = \{\Theta_{nm}\}$ $(m=1,2,\ldots)$; wenn die Reihe $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \vartheta_m y_m$ konvergierte, so wäre, indem man mit y_0 ihre Summe bezeichnet, $y_0 = \{\Theta_n\}$, und daher die Folge $\{\Theta_n\}$ (gegen Null) konvergent, entgegen der Behauptung des Hilfssatzes 1. Nehmen wir jetzt an, daß für ein gewisses n_0 die Folge $\{a_{n_0 m}\}$ einen von Null verschiedenen Häufungspunkt besitzt. Es gibt dann ersichtlich eine wachsende Indexfolge $\{m_\mu\}$ derart, daß für jedes natürliche n der $\lim\limits_{\mu\to\infty} a_{nm_\mu} = a_n$ existiert und dabei $a_{n_0} \neq 0$ ist. Die Doppelfolge $\{\alpha_{\nu\mu}\}$, wo $\alpha_{\nu\mu} = a_{\nu m_\mu}$ für $\nu > \mu$, $= a_{\nu m_\mu} - a_\nu$ für $\nu \leqslant \mu$ $(\nu, \mu = 1,2,\ldots)$ ist, erfüllt die Bedingungen des Hilfssatzes 1. Die Bedingungen 1) und 2) sind leicht zu verifizieren; wäre die Bedingung 3) nicht erfüllt, so wäre $\lim\limits_{\mu\to\infty} \underset{\nu=1,2,\ldots}{\text{obere Grenze}} |\alpha_{\nu\mu}| = 0$ und somit die Folge $\{y_{m_\mu}\}$ konvergent, entgegen der Voraussetzung, daß die Folge $\{y_m\}$ keine Häufungspunkte besitzt. Ferner ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_{\nu\mu} = 0$ $(\mu=1,2,\ldots)$, daher handelt es sich um den im Beweise des Hilfssatzes 1 hervorgehobenen Fall (I). Es gibt demnach eine divergente Reihe reeller Zahlen $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \tau_\mu$ mit beschränkten Teilsummen derart, daß jede der Reihen

---

[5]) l. c. [2]), p. 181.

$\sum_{\mu=1}^{\infty}\tau_{\mu}\alpha_{\nu\mu}$ konvergiert und, $T_{\nu\mu}=\sum_{k=1}^{\mu}\tau_k\alpha_{\nu k}$, $T_{\nu}=\sum_{\mu=1}^{\infty}\tau_{\mu}\alpha_{\nu\mu}$ $(\nu,\mu=1,2,\ldots)$ gesetzt, $|T_{\nu\mu}|\leqslant T$ $(\nu,\mu=1,2,\ldots;$ T positive Konstante) und die Folge $\{T_\nu\}$ divergent ist. Setzen wir $\vartheta_m=\tau_\mu$ für $m=m_\mu$ $(\mu=1,2,\ldots)$, $=0$ für alle anderen m. Die Teilsummen der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m y_m$ bilden eine beschränkte Folge; wir haben nämlich $\sum_{k=1}^{m}\vartheta_k y_k=0$ für $m<m_1$, $=\{T_{\nu i}-\varepsilon_{\nu i}\}$ für $m_i\leqslant m<m_{i+1}$, wo $\varepsilon_{\nu i}=a_\nu\sum_{k=\nu}^{i}\tau_k$ für $\nu\leqslant i$, $=0$ für $\nu>i$ $(\nu,i=1,2,\ldots)$ ist. Dabei divergiert aber die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m y_m$. Im Gegenfalle würde nämlich nach dem Vorangehenden für jedes natürliche ν die Folge $\{T_{\nu i}-\varepsilon_{\nu i}\}$ insbesondere also die Folge $\{T_{n_0 i}-\varepsilon_{n_0 i}\}$ konvergieren. In Anbetracht dessen, daß die Folge $\{T_{n_0 i}\}$ (gegen T_{n_0}) konvergiert, wäre die Folge $\{\varepsilon_{n_0 i}\}$ und, da $a_{n_0}\neq 0$, daher auch die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty}\tau_k$ konvergent, was unmöglich ist.

Bemerken wir weiter, daß, wie es einfache Beispiele lehren, die folgenden Räume z. B. die Eigenschaft (W) nicht besitzen: der Raum (C) der stetigen Funktionen, (L^p) $(p\geqslant 1)$ der mit der p-ten Potenz integrierbaren Funktionen, (M) der meßbaren beschränkten Funktionen, (l^p) $(p\geqslant 1)$ der mit der p-ten Potenz konvergenten Zahlenreihen und (m) der beschränkten Zahlenfolgen.

Fügen wir endlich eine Bemerkung hinzu, welche die Notwendigkeit der Voraussetzung im Satze 3 (also auch 2) betrifft, daß die Werte der Operationen $\{F_n(x)\}$ einem die Eigenschaft (W) besitzenden Raume vom Typus (B) angehören. Es seien X, Y zwei unendlichviel-dimensionale Räume vom Typus (B) und dabei besitze der Raum Y die Eigenschaft (W) nicht; wir behaupten, daß man im Raume X eine Folge linearer Operationen $\{F_n(x)\}$ mit dem Raume Y angehörigen Werten so erklären kann, daß die Konvergenzmenge dieser Folge eine nicht abgeschlossene F_σ-Menge ist. In der Tat, nehmen wir in X eine Folge von Elementen $\{x_n\}$ sowie eine Folge linearer Funktionale $\{\Phi_n(x)\}$ so, daß $|x_n|=1$, $\Phi_n(x_m)=n$ für $n=m$, $=0$ für $n\neq m$ $(n,m=1,2,\ldots)$

ist [6]). Nach der Voraussetzung gibt es eine Folge $\{y_m\}$ von Elementen aus Y mit der Norm 1 derart, daß für jede reelle Zahlenfolge $\{\vartheta_m\}$ die Beschränktheit der Teilsummen der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m y_m$ die Konvergenz dieser Reihe impliziert. Setzt man $F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(x)y_k$ für $x\in X$ $(n=1,2,\ldots)$, so erfüllt die Folge der linearen Operationen $\{F_n(x)\}$ die geforderten Bedingungen. Es bedeute nämlich R ihre Konvergenzmenge; aus der Definition der Elemente y_m folgt, daß wenn die Folge $\{F_n(x)\}$ in einem Punkte beschränkt ist, so konvergiert sie schon in ihm, daher ist R als die Menge der Punkte, in denen eine Folge stetiger Funktionen beschränkt ist, eine F_σ-Menge. Nehmen wir an, die Menge R sei abgeschlossen, und es bezeichne $\overline{X}_0$ die abgeschlossene Hülle der Menge X_0, die aus linearen Kombinationen der Elemente $x_1, x_2, \ldots$ besteht. Da ersichtlich $X_0\subset R$, so ist $\overline{X}_0\subset R$; die Folge linearer Operationen $\{F_n(x)\}$ ist also, im Raume vom Typus (B) betrachtet, welchen die Menge $\overline{X}_0$ bildet, in jedem Punkte dieses Raumes konvergent. Daraus folgt, daß diese Folge in der Einheitskugel des Raumes $\overline{X}_0$ gleichmäßig beschränkt ist [7]), im Widerspruch damit, daß stets $|x_n|=1$, $|F_n(x_n)|=n$ ist.

(Reçu par la Rédaction le 5. 5. 1933).

[6]) Die Existenz solcher Folgen ergibt sich durch entsprechende Verallgemeinerung des Schmidtschen Orthogonalisationsverfahrens.

[7]) S. das unter [2]) zitierte Buch, p. 80.