Über die Borelschen Typen von linearen Mengen

von

S. MAZUR und L. STERNBACH (Lwów).

In dieser Note bringen wir einige die Existenz von Borelschen linearen Mengen in Räumen vom Typus (B) betreffende Ergebnisse. Das Problem der Existenz linearer Mengen von beliebig hohem Borelschen Typus ist bisher ungelöst. Wir wollen zeigen, daß es in jedem unendlichviel-dimensionalen Raume vom Typus (B) eine lineare F_σ-Menge gibt, welche sich nicht als Vereinigung abzählbar vieler linearer abgeschlossener Mengen darstellen läßt und ferner eine lineare Menge, welche zwar Durchschnitt einer linearen F_σ-Menge und einer G_δ-Menge, dagegen aber keine F_σ-Menge ist; es wird auch bewiesen, daß jede lineare G_δ-Menge schon abgeschlossen ist[1]).

1. Wir beweisen vor allem, daß *es eine lineare F_σ-Menge gibt, die keine Vereinigung abzählbar vieler linearer abgeschlossener Mengen ist.* Es sei $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen und $\{F_n(x)\}$ eine Folge von linearen Funktionalen mit der Eigenschaft: $|x_n|=1$, $F_n(x_m)=n$ für $n=m$, $=0$ für $n\neq m\ (n,m=1,2,\ldots)$[2]). Bezeichnen wir mit Ω die Menge der Punkte x, in denen die Folge $\{F_n(x)\}$ beschränkt ist, und mit Ω_m — bei gegebenem natürlichen m — die Menge der Punkte $x\in\Omega$, für die $|F_n(x)|\leqslant m$ $(n=1,2,\ldots)$ gilt. Da die Mengen Ω_m offenbar abgeschlossen sind, so ist $\Omega=\Omega_1+\Omega_2+\ldots+\Omega_m+\ldots$ eine F_σ-Menge. Nehmen wir an, die Menge Ω sei abgeschlossen, und es bezeichne $\overline{X}_0$ die abgeschlossene Hülle der Menge X_0, die aus linearen Kombinationen der Elemente $x_1, x_2,\ldots x_n\ldots$ besteht. Es ist $X_0\subset\Omega$, und daher auch $\overline{X}_0\subset\Omega$; infolgedessen ist die Folge von linearen Funktionalen $\{F_n(x)\}$ im Raume vom Typus (B), welchen die Menge $\overline{X}_0$ bildet, in jedem Punkte dieses Raumes beschränkt. Daraus folgt, daß die Folge $\{F_n(x)\}$ in der Einheitskugel des Raumes $\overline{X}_0$ gleichmäßig beschränkt ist[3]), im Widerspruch zur Annahme, daß stets $|x_n|=1$, $F_n(x_n)=n$ sein soll. Die Menge Ω ist aber nicht einmal Vereinigung abzählbar vieler linearer abgeschlossener Mengen. In der Tat setzen wir voraus, daß $\Omega=\Omega_1^*+\Omega_2^*+\ldots+\Omega_m^*+\ldots$ ist, wo Ω_m^* abgeschlossene lineare Mengen sind. Wenn wir

$$|x|^*=|x|+\underset{n=1,2,\ldots}{\text{obere Grenze}}\ |F_n(x)|$$

für $x\in\Omega$ setzen, so folgt sofort, daß die Menge Ω einen Raum vom Typus (B) bildet; wir bezeichnen ihn mit Ω^*. Die Mengen Ω_m^* sind, als Teilmengen des Raumes Ω^* betrachtet, abgeschlossen, und folglich, wegen der Relation $\Omega^*=\Omega_1^*+\Omega_2^*+\ldots+\Omega_m^*+\ldots$, ist eine von ihnen, z. B. $\Omega_{m_0}^*$, nicht nirgendsdicht. Da ferner die Menge $\Omega_{m_0}^*$ linear ist, so wäre $\Omega_{m_0}^*=\Omega^*$, was der vorigen Bemerkung widerspricht.

2. Um allein die Existenz einer linearen nichtabgeschlossenen F_σ-Menge zu beweisen, kann man einfacher auf folgende Weise vorgehen. Es sei $\{x_n\}$ eine Folge von linear unabhängigen Elementen; Ω bezeichne die aus linearen Kombinationen der Elemente $x_1, x_2,\ldots x_n\ldots$ gebildete lineare Menge, Ω_m dagegen die lineare Menge, welche aus linearen Kombinationen der Elemente $x_1, x_2,\ldots x_m$ besteht $(m=1, 2,\ldots)$. Die Mengen Ω_m sind

[1]) Wir gebrauchen die Terminologie und Bezeichnungen des Buches: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932; s. insb. p. 235. Vgl. auch: Annales de la Société Polonaise de mathématique, 9 (1930) p. 195 und 10 (1931) p. 127.

[2]) Die Existenz solcher Folgen ergibt das gewöhnliche Schmidtsche Orthogonalisationsverfahren.

[3]) Vgl. das unter [1]) zitierte Buch, p. 80.

abgeschlossen und dabei in der Menge Ω nirgendsdicht; aus der Gleichheit $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_m + \ldots$ folgt nun einerseits, daß Ω eine F_σ-Menge und andererseits, daß sie von erster Kategorie in der abgeschlossenen Hülle der Menge Ω, somit also nicht abgeschlossen ist.

3. Wir werden jetzt zeigen, daß *jede lineare G_δ-Menge abgeschlossen ist.* Es sei Ω eine gegebene lineare G_δ-Menge und es bezeichne S die Differenz $\overline{\Omega} - \Omega$, wobei $\overline{\Omega}$ die abgeschlossene Hülle der Menge Ω ist; da Ω in $\overline{\Omega}$ eine G_δ-Menge und dabei dicht ist, so ist die Menge S von erster Kategorie in $\overline{\Omega}$. Es sei $x_0 \in S$ und ferner Ω^* die Menge aller Elemente der Form $x_0 + x$, wo $x \in \Omega$. Aus der Relation $\Omega^* \subset S$ folgern wir, daß die Menge Ω^* und daher auch Ω eine Menge von erster Kategorie in $\overline{\Omega}$ ist; daraus folgt, daß die Menge $\overline{\Omega} = \Omega + S$ in sich von erster Kategorie ist, was mit der Abgeschlossenheit dieser Menge im Widerspruch steht. Es ist daher $S = 0$, d. h. $\Omega = \overline{\Omega}$, w. z. b. w.

4. Wir beweisen nun, daß *es eine lineare Menge gibt, welche Durchschnitt einer linearen F_σ-Menge und einer G_δ-Menge, dabei aber keine F_σ-Menge ist.* Wir bezeichnen mit X_0 eine lineare, abgeschlossene, separable und unendlichviel-dimensionale Menge. Es gibt eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen aus X_0 und eine Folge von in X_0 erklärten linearen Funktionalen $\{F_n(x)\}$, von der Eigenschaft: 1° $F_n(x_m) = 1$ für $n = m$, $= 0$ für $n \neq m$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$; 2° aus den Relationen $F_n(x) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ergibt sich $x = 0$; 3° $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ [2]). Bezeichnen wir jetzt mit Ω die Menge der Elemente $x \in X_0$, für die die Reihe $|F_1(x)| + |F_2(x)| + \ldots + |F_n(x)| + \ldots$ konvergiert und dabei $F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + \ldots = 0$ ist; wir werden zeigen, daß die lineare Menge Ω Durchschnitt einer linearen F_σ-Menge und einer G_δ-Menge, dabei aber keine F_σ-Menge ist. In der Tat sei L die lineare Menge der Elemente $x \in X_0$ von der Eigenschaft, daß die Reihe $|F_1(x)| + |F_2(x)| + \ldots + |F_n(x)| + \ldots$ konvergiert, und L_m der aus solchen Elementen x bestehende Teil von L, für die $|F_1(x)| + |F_2(x)| + \ldots + |F_n(x)| + \ldots \leqslant m$ ist $(m = 1, 2, \ldots)$. Da die Mengen L_m abgeschlossen sind, so ist $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_m + \ldots$ eine lineare F_σ-Menge. Indem wir $|x|^* = |F_1(x)| + |F_2(x)| + \ldots + |F_n(x)| + \ldots$ für $x \in L$ setzen, folgern wir — unter Bezugnahme auf 2° — daß die Menge L einen linearen, normierten, und dabei separablen Raum L^* bildet. Im Raume L^* betrachtet, ist die Menge Ω abgeschlossen und daher die Menge $L - \Omega$ offen; somit läßt sich $L - \Omega$ in Anbetracht der Separabilität des Raumes L^* als Vereinigung abzählbar vieler in ihm abgeschlossener Kugeln K_n $(n = 1, 2, \ldots)$ darstellen. Da jede Kugel K_n eine abgeschlossene Menge bildet, so ist $L - \Omega = K_1 + K_2 + \ldots + K_n + \ldots$ eine F_σ-Menge. Wir haben bewiesen, daß L und $L - \Omega$ F_σ-Mengen sind; aus $\Omega = L - (L - \Omega)$ folgt nun, daß Ω Durchschnitt einer linearen F_σ-Menge und einer G_δ-Menge ist. Es bleibt noch zu beweisen, daß Ω keine F_σ-Menge ist. Nehmen wir an, es sei $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_n + \ldots$, wo jede der Mengen Ω_n abgeschlossen ist. Es ist leicht einzusehen, daß wenn wir für $x \in \Omega$, $|x|^* = |x| + |F_1(x)| + |F_2(x)| + \ldots + |F_n(x)| + \ldots$ setzen, die Menge Ω einen Raum vom Typus (B) bildet; wir bezeichnen ihn mit Ω^*. Die Mengen Ω_n sind, als Teilmengen des Raumes Ω^* betrachtet, abgeschlossen, und, da $\Omega^* = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_n + \ldots$ ist, enthält eine von ihnen, z. B. Ω_{n_0}, eine Kugel; es gibt folglich ein $x_0 \in \Omega^*$ und eine Zahl $r > 0$ von der Eigenschaft, daß die Ungleichung $|x - x_0|^* \leqslant r$ die Relation $x \in \Omega_{n_0}$ impliziert. Aus den Bedingungen 1° und 3° folgt unmittelbar, daß $y_n = x_1 - x_n$ gesetzt $(n = 1, 2, \ldots)$, stets $y_n \in \Omega^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_1$ und dabei die Folge $\{|y_n|^*\}$ beschränkt ist. Es sei $z_n = x_0 + \varepsilon y_n$, wo $\varepsilon > 0$ so gewählt ist, daß $\varepsilon |y_n|^* \leqslant r$ $(n = 1, 2, \ldots)$ besteht. Wir haben dann $|z_n - x_0|^* \leqslant r$ und somit $z_n \in \Omega_{n_0}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, was im Zusammenhang damit, daß $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0 + \varepsilon x_1$, und die Menge Ω_{n_0} abgeschlossen ist, die Relation $x_0 + \varepsilon x_1 \in \Omega_{n_0}$ ergibt. Umsomehr ist $x_0 + \varepsilon x_1 \in \Omega$ und $x_1 \in \Omega$, was im Widerspruch mit der Definition von Ω steht. Ω kann also in der Tat keine F_σ-Menge sein.

5. Bemerken wir noch, daß die im vorigen Abschnitt erklärte

Menge Durchschnitt einer linearen F_σ-Menge und einer G_δ-Menge, dagegen aber keine F_σ-Menge ist, sogar in dem Falle, wenn man die Bedingung 3° durch die folgende schwächere ersetzt: $\overline{3}°$ die Folge $\{x_n\}$ konvergiert schwach gegen Null. Es gibt dann nämlich Zahlen $\vartheta_{n,m}$ $(m=1,2,..n;\ n=1,2,...)$ derart, daß stets $\vartheta_{n,m} \geqslant 0$, $\vartheta_{n,1}+\vartheta_{n,2}+..+\vartheta_{n,n}=1$ und dabei $w_n=\vartheta_{n,1}x_1+\vartheta_{n,2}x_2+...+\vartheta_{n,n}x_n$ $(n=1,2,...)$ gesetzt, $\lim_{n\to\infty} w_n=0$ ist[4]). Der im vorigen Abschnitt gegebene Beweis behält seine Gültigkeit, wenn wir $y_n=x_1-w_n$ statt $y_n=x_1-x_n$ setzen.

6. Wir geben hier noch einen anderen Beweis der Existenz einer linearen $F_{\sigma\delta}$-Menge, die keine F_σ-Menge ist. Es sei $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen und $\{F_n(x)\}$ eine Folge von linearen Funktionalen, derart daß $|x_n|=1$, $F_n(x_m)=n$ für $n=m$, $=0$ für $n \neq m$ $(n,m=1,2,...)$ ist[2]), und es bezeichne weiter Ω die Kovergenzmenge der Folge $\{F_n(x)\}$ d. h. die Menge der Punkte, in denen diese Folge konvergiert. Analog wie im Abschnitt 1 folgt, daß die Menge Ω nicht abgeschlossen ist, und da die Konvergenzmenge einer Folge linearer Funktionale keine F_σ-Menge sein kann, ohne abgeschlossen zu sein[5]), so ist Ω keine F_σ-Menge; dabei aber ist Ω als Konvergenzmenge einer Folge stetiger Funktionen bekanntlich eine $F_{\sigma\delta}$-Menge.

7. Die oben gegebenen Existenzbeweise von linearen Mengen gewisser Borelschen Typen enthalten zugleich eine Methode ihrer Konstruktion. Betrachten wir z. B. den Hilbertschen Raum (l^2). Nach 1 bildet die Menge der Punkte $x=\{\xi_n\}$, für welche die Folge $\{n\xi_n\}$ beschränkt ist, eine lineare F_σ-Menge, die sich nicht als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener linearer Mengen darstellen läßt. Weiter ist nach 4 die Menge der Punkte, für die die Reihe $1|\xi_1|+2|\xi_2|+..+n|\xi_n|+..$ konvergiert und die Gleichheit $1\xi_1+2\xi_2+..+n\xi_n+..=0$ stattfindet, Durchschnitt einer linearen F_σ-Menge und einer G_δ-Menge, dagegen aber keine F_σ-Menge; entsprechend 5 hat dieselbe Eigenschaft die Menge der Punkte, in denen die Reihe $|\xi_1|+|\xi_2|+..+|\xi_n|+..$ konvergiert und $\xi_1+\xi_2+..+\xi_n+..=0$ ist. Endlich ist nach 6 die Menge der Punkte, wo die Folge $\{n\xi_n\}$ konvergiert, eine $F_{\sigma\delta}$-Menge, ohne eine F_σ-Menge zu sein.

[4]) S. Mazur, Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, diese Studia 4 (1933) p. 70—84, insb. p. 81.

[5]) S. Mazur und L. Sternbach, Über Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen, diese Studia 4 (1933) p. 54—65, insb. p. 61.

(Reçu par la Rédaction le 28. 4. 1933).