Über die Dichte fastperiodischer Zahlenfolgen

von

AUREL WINTNER (Baltimore).

Im Nachstehenden wird gezeigt, daß denjenigen reellen Zahlenfolgen, die von Herrn WALTHER[1]) als fastperiodisch bezeichnet worden sind, eine asymptotische Verteilungsfunktion zukommt.

Man kann dabei von dem folgenden allgemeinen Satz ausgehen:[2]) Ist $f(t)$ eine für $0 \leqslant t < +\infty$ erklärte, beschränkte, meßbare, reellwertige Funktion, deren positive ganzzahlige Potenzen einen Mittelwert

$$\mathfrak{M}(f^m) = \lim_{T=+\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T (f(t))^m \, dt \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

besitzen, und bezeichnet $\sigma_T(\xi)$ die für $-\infty < \xi < +\infty$ erklärte Funktion

$$\sigma_T(\xi) = \frac{\operatorname{mes}[f < \xi]_T}{T},$$

wobei $[f < \xi]_T$ die Punktmenge derjenigen t bedeutet, die den beiden Bedingungen

$$0 \leqslant t \leqslant T, \qquad f(t) < \xi$$

genügen, so gibt es genau eine, für $-\infty < \xi < +\infty$ erklärte, von rechts stetige Funktion $\sigma(\xi)$ derart, daß an allen Stetigkeitsstellen von $\sigma(\xi)$ (also, da σ offenbar monoton ist, bis auf eine höchstens abzählbare ξ-Menge) die Grenzgleichung

$$(*) \qquad \lim_{T=+\infty} \sigma_T(\xi) = \sigma(\xi)$$

gilt.

---

[1]) A. Walther, Hamb. Abh. 6 (1928) p. 217—234.

[2]) A. Wintner, Math. Ztschr. 36 (1933) p. 618—629.

Die Zahlenfolge

$\{a_n\}: \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

heißt fastperiodisch, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $\{N_k^{(\varepsilon)}\}$ von natürlichen Zahlen und eine Schranke M_ε gibt derart, daß einerseits

$$0 < N_{k+1}^{(\varepsilon)} - N_k^{(\varepsilon)} < M_\varepsilon \qquad (k=1,2,\ldots), \quad \lim_{k=+\infty} N_k = +\infty$$

und andererseits

$$|a_{n+N_k^{(\varepsilon)}} - a_n| < \varepsilon \qquad (n=1,\ 2,\ldots;\ k=1,\ 2,\ldots)$$

gilt. Aus der Theorie dieser Folgen, die zu der Bohrschen Theorie der fastperiodischen Funktionen durchaus analog ist[3]), erwähnen wir nur, daß jede fastperiodische Zahlenfolge beschränkt ist und einen Mittelwert

$$\mathfrak{M}(a) = \lim_{n=+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

besitzt und daß zugleich mit $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ auch $\{a_n b_n\}$ und daher auch $\{a_n^2\}$, $\{a_n^3\}, \ldots$ fastperiodisch sind. Ist also $\{a_n\}$ eine reelle fastperiodische Zahlenfolge und bezeichnet $f(t)$ die Treppenfunktion

$$f(t) = a_n \qquad (n-1 \leqslant t < n;\quad n=1,\ 2,\ldots)$$

(die, wenn a_n nicht unabhängig von n ist, nicht stetig, also im Bohrschen Sinne nicht fastperiodisch ist), so sind für $f(t)$ die Prämissen von (*) erfüllt. Es folgt daher die Existenz genau einer, für $-\infty < \xi < +\infty$ erklärten, von rechts stetigen monotonen Funktion $\sigma(\xi)$ derart, daß an allen Stetigkeitsstellen von $\sigma(\xi)$

$$(**) \qquad \lim_{n=+\infty} \frac{\nu_n(\xi)}{n} = \sigma(\xi)$$

gilt, wobei $\frac{\nu_n(\xi)}{n}$ die relative Häufigkeit der endlichen Folge

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_n$$

in dem Gebiet $a < \xi$ angibt, d. h. $\nu_n(\xi)$ die Anzahl derjenigen Zahlen a_k bedeutet, die den Bedingungen $k \leqslant n$, $a_k < \xi$ genügen. Offenbar ist

$$\sigma(\xi) \equiv 0 \text{ für } -\infty < \xi < \alpha = \text{fin inf } a_n \text{ und}$$
$$\sigma(\xi) \equiv 1 \text{ für } +\infty > \xi > \beta = \text{fin sup } a_n .$$

[3]) Vgl. Ingeborg Seynsche, Rend. Palermo 55 (1931) p. 395—421.

Durch Umschreibung eines Bohrschen Beispiels[4]) folgt leicht, daß der Grenzwertsatz (**) an den eventuellen Unstetigkeitsstellen von $\sigma(\xi)$ nicht notwendig gilt, indem dabei der Grenzwert nicht einmal zu existieren braucht. Die periodischen, d. h. diejenigen Zahlenfolgen, zu welchen eine von n unabhängige Zahl L mit $a_{n+L} = a_n$ existiert, sind trivialerweise fastperiodisch. Interessantere Beispiele fastperiodischer Zahlenfolgen, für die nämlich

$$\sigma(\xi) = \frac{\xi - \alpha}{\beta - \alpha} \qquad (\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta)$$

gilt, sind im Anschluss an die Weylsche Gleichverteilungstheorie durch Herrn Walther (loc. cit.) behandelt worden.

Es sei noch erwähnt, daß diejenigen fastperiodischen Zahlenfolgen, die nicht reell sind, sondern der Bedingung

$$|a_n| = 1, \text{ d. h. } a_n = e^{i\varphi_n} \qquad (0 \leqslant \varphi_n < 2\pi;\quad n=1,\ 2,\ldots)$$

genügen, auf eine analoge Weise behandelt werden können[5]). Diese Zahlenfolgen dürften u. a. für die Rotationsprobleme der von Poincaré inaugurierten Theorie der Flächentransformation von Bedeutung sein[6]).

(Reçu par la Rédaction le 25. 4. 1932).

[4]) H. Bohr, Danske Vid. Selsk. Medd. 10 (1930) Nr. 10 und 12.

[5]) Vgl. A. Wintner, Monatsh. f. Math. u. Phys., im Erscheinen.

[6]) Vgl. T. Levi-Civita, Annali di Mat. (3) 5 p. 225, Annales de l'Éc. Norm. Sup. (3) 28 (1911) p. 330; G. D. Birkhoff, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917) p. 268, Acta Math. 43 (1920) p. 1. Vgl. auch G. A. Hedlund, Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932) p. 79.