STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIX. (1971)

Le problème de la synthèse et de la p-finesse pour certaines orbites de groupes linéaires dans $A_p(\boldsymbol{R}^n)$

par

F. LUST (Orsay)

Le principal résultat obtenu dans cet article est la synthèse des orbites de groupes linéaires à un paramètre dans les algèbres $A_p(\boldsymbol{R}^n)$ $(1 < p \leqslant 2,\ n > 1)$. Herz [3] et Varopoulos [6] ont montré que le cercle est de synthèse dans $A(\boldsymbol{R}^2)$. On utilisera essentiellement la technique de Varopoulos et un résultat de Herz [4] sur les mesures portées par une surface convexe de $\boldsymbol{R}^n$. On définira une régularisation pour les fonctions de $A_p(\boldsymbol{R}^n)$ et on montrera que les fonctions régularisées sont synthésables. A la fin du paragraphe III on montrera que la méthode ne s'étend pas à d'autres groupes.

Avec la même technique on montrera que les parties compactes convexes des hypersurfaces orbites de certains groupes linéaires sont des ensembles p-fins si et seulement si $p \geqslant \dfrac{2n}{n+1}$ $(1 \leqslant p < \infty,\ n > 1)$.

I. DÉFINITIONS

On identifiera l'espace affine $\boldsymbol{R}^n$ muni d'une origine à l'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^n$, et on désignera par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

un élément de $\boldsymbol{R}^n$.

Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ opère continuement et isométriquement dans $A_p(\boldsymbol{R}^n)$:

Pour toute $f \in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ et pour tout $G \in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ on pose $Gf(X) = f(G^{-1}X)$. Alors $Gf \in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ et $\|Gf\|_{A_p(\boldsymbol{R}^n)} = \|f\|_{A_p(\boldsymbol{R}^n)}$. On désigne par $\mathscr{G}$ un sous-groupe de Lie topologique, donc fermé, du groupe de Lie $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$. $\mathscr{G}$ est localement compact.

D'après [6], pour toute mesure bornée μ sur $\mathscr{G}$, et toute $f\in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ on définit le produit de convolution:

$$f_\mu(X) = \int_{\mathscr{G}} Gf(X)\,d\mu(G) \in A_p(\boldsymbol{R}^n).$$

Par dualité, pour tout convoluteur $S\in C_p(\boldsymbol{R}^n)$, on définit GS et S_μ:

$$\forall f\in A_p(\boldsymbol{R}^n):\quad \langle GS, f\rangle = \langle S, Gf\rangle, \qquad \langle S_\mu, f\rangle = \langle S, f_\mu\rangle.$$

Sous-espaces invariants par $\mathscr{G}$. A tout point X_0 de $\boldsymbol{R}^n$ on associe une orbite O_{X_0} de $\mathscr{G}$ dans $\boldsymbol{R}^n$:

$$O_{X_0} = \{X' = GX_0,\ G\in\mathscr{G}\}.$$

Un sous-espace affine H de $\boldsymbol{R}^n$ contenant l'origine est dit invariant par $\mathscr{G}$ si:

$$\forall X\in H,\quad \forall G\in\mathscr{G},\quad GX\in H.$$

Si X appartient à un sous-espace invariant H de dimension n', O_X est orbite de la restriction de $\mathscr{G}$ à H. Si une partie compacte de O_X est de synthèse dans $A_p(H) = A_p(\boldsymbol{R}^{n'})$ elle l'est encore dans $A_p(\boldsymbol{R}^n)$. Cela résulte du fait que $A_p(H) = A_p(\boldsymbol{R}^n)/I(H)$ et que H est de synthèse dans $A_p(\boldsymbol{R}^n)$. On supposera désormais que X_0 n'appartient à aucun sous-espace invariant par $\mathscr{G}$. Son orbite ne recontre alors aucun de ces sous-espaces.

II. REMARQUES SUR LES SOUS-GROUPES À UN PARAMÈTRE DE $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$

$\mathscr{G}$ désigne maintenant un groupe à un paramètre:

$$\mathscr{G} = \{G(u) = e^{uM}\ u\in\boldsymbol{R}\}\quad \text{où } M \text{ est un endomorphisme de } \boldsymbol{R}^n.$$

Précisons la structure de $\mathscr{G}$.

$\{u\in\boldsymbol{R}\mid G(u) = \text{identité}\}$ est un sous-groupe fermé de $\boldsymbol{R}$. $\mathscr{G}$ est donc isomorphe à $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{R}/a\boldsymbol{Z}$.

Tout endomorphisme M de $\boldsymbol{R}^n$ est somme d'un endomorphisme nilpotent N_n et d'un endomorphisme semi-simple S_n, commutatifs ([2], III. 1).

Il existe dans $\boldsymbol{C}^m$ une base telle que la matrice de S_n soit diagonale et que la matrice de N_n soit triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale principale. On vérifie facilement que:

$$e^{uS_n} = \begin{pmatrix} e^{a_1u} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_nu}\end{pmatrix},\qquad a_i\in\boldsymbol{C},$$

$$e^{uN_n} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{1,2}u & \dots & \lambda_{1,n}u^{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \lambda_{n-1,n}u \\ 0 & & & 1\end{pmatrix},\qquad \lambda_{i,j}\in\boldsymbol{C}.$$

En particulier lorsque e^{uM} n'est pas réduit à l'identité, les directions propres de e^{uM} sont indépendantes de u.

On déduit aisément les formes réelles de $G(u) = e^{uS_n}e^{uN_n}$. Par exemple écrivons explicitement les sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})$:

$$G(u) = \begin{pmatrix} e^{a_1u} & 0 \\ 0 & e^{a_2u}\end{pmatrix}\qquad a_1, a_2\in\boldsymbol{R}.$$

Les orbites sont de la forme $y = Kx^{a'}$.

$$G(u) = e^{a_1u}\begin{pmatrix} \cos a_2u & \sin a_2u \\ -\sin a_2u & \cos a_2u\end{pmatrix}\qquad a_1, a_2\in\boldsymbol{R}.$$

Les orbites sont des cercles si $a_1 = 0$ et des spirales logarithmiques si $a_2\neq 0$.

$$G(u) = e^{au}\begin{pmatrix} 1 & \beta u \\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad a, \beta\in\boldsymbol{R}.$$

Si $a = 0$ les orbites sont des droites.
Si $a\neq 0$ ce sont des courbes d'équations:
$x = e^{au}(x_0 + y_0\beta u)$, $y = e^{au}y_0$.

On munira désormais $\boldsymbol{R}^n$ d'une base réelle associée aux vecteurs propres de S_n.

Orbites d'un groupe à un paramètre. On appelle $\mathscr{K}_{X_0} = \{G\in\mathscr{G}\mid GX_0 = X_0\}$ le groupe d'isotopie de X_0. C'est un sous-groupe fermé de $\mathscr{G}$, réduit à l'identité lorsque X_0 n'appartient pas à un sous-espace invariant.

Il existe alors un voisinage $w(X_0)\subset\boldsymbol{R}^n$ ne rencontrant aucun sous-espace invariant. $\mathscr{G}$ est un groupe de Lie de transformations de $\boldsymbol{R}^n$. D'après [2], II. B. 3 (exercices), les orbites rencontrant w sont difféomorphes à $\mathscr{G}$.

On va montrer *qu'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de O_{X_0} dans $\boldsymbol{R}^n$, un hyperplan affine H_{n-1} passant par X_0 et par l'origine, et un voisinage $v(X_0)\subset H_{n-1}$ tels que*:

$$\forall X\in\mathscr{U},\quad \exists!\, G\in\mathscr{G},\quad \exists!\, X'\in v(X_0)\subset H_{n-1},\quad X = GX'.$$

Si $n = 2$: Il est facile de voir qu'il existe un voisinage $v(1)\subset\boldsymbol{R}^+$ tel que $v(X_0) = \{rX_0\mid r\in v(1)\}$ ne rencontre O_{X_0} qu'en un point. Alors

$$\mathscr{U} = \{X = rGX_0\mid G\in\mathscr{G},\ r\in v(1)\}$$

répond à la question.

Si $n > 2$: Soit H_{n-2} (respectivement H_2) l'espace affine passant par l'origine associé à l'espace vectoriel réel engendré par les $(n-2)$ premiers vecteurs propres de M (respectivement les deux derniers). On note X'_0 et O'_{X_0} les projections de X_0 et O_{X_0} sur H_2. O'_{X_0} est orbite de la restriction $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$ à H_2. On lui associe les voisinages $v'(X_0')$ et $\mathscr{U}'(O'_{X_0})$ définis dans le cas $n=2$. Soit H_{n-1} l'hyperplan affine contenant H_{n-2} et X_0. On y définit

$$v(X_0) = w(X_0) \cap \{H_{n-2} \times v'(X_0')\} \subset H_{n-1}.$$

Alors

$$\mathscr{U} = \{GX \mid G \in \mathscr{G},\ X \in v(X_0)\} = \{GX \mid G \in \mathscr{G},\ X \in w(X_0)\} \cap H_{n-2} \times \mathscr{U}'(X_0')$$

répond à la question.

On définit dans H_{n-1} une base affine $(0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ telle que $X_0 = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$. Il existe un voisinage $v(1, \ldots, 1) \subset \boldsymbol{R}^{n-1}$ tel que

$$v(X_0) = \Big\{X = \sum_{i=1}^{n-1} r_i Y_i,\ (r_1, \ldots, r_{n-1}) \in v(1, \ldots, 1)\Big\}.$$

III. SYNTHÈSE DES ORBITES DE GROUPES À UN PARAMÈTRE

THÉORÈME. *Soit $\mathscr{G}$ un sous-groupe à un paramètre de* $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$. *Soient $X_0 \in \boldsymbol{R}^n$ et $\mathscr{H}$ un compact connexe de $\mathscr{G}$. La portion d'orbite*

$$\Omega = \{X = GX_0 \mid G \in \mathscr{H}\}$$

est de synthèse dans $A_p(\boldsymbol{R}^n)$.

Régularisation d'une fonction de $A_p(\boldsymbol{R}^n)$ par le groupe $\mathscr{G}$. On définit sur $\mathscr{G}$ et $\boldsymbol{R}^n$ respectivement deux fonctions à valeurs réelles $\tilde{h}(G)$ et $h(X)$ telles que:

(i) $\tilde{h}(G)$ a un support compact contenant $\mathscr{H}$,

(ii) $\tilde{h}(G) = 1$ dans un voisinage de $\mathscr{H}$,

(iii) $h(X) = \tilde{h}(G)$ pour tout X dans

$$\mathscr{U}' = \Big\{X = G\Big(\sum_{1}^{n-1} r_i Y_i\Big) \Big| \ G \in \mathscr{G},\ (r_1, \ldots, r_{n-1}) \in v' \subset v(1, \ldots, 1) \subset \boldsymbol{R}^{n-1}\Big\},$$

(iv) $h(X)$ a un support compact inclus dans

$$\Big\{X = G\Big(\sum_{1}^{n-1} r_i Y_i\Big) \Big| \ G \in \mathscr{H}_1,\ (r_1, \ldots, r_{n-1}) \in v(1, \ldots, 1) \subset \boldsymbol{R}^{n-1}\Big\}$$

où $\mathscr{H}_1$ est un compact de $\mathscr{G}$ contenant $\mathscr{H}$,

(v) $h(X)$ est indéfiniment différentiable.

On note γ le groupe dual de $\mathscr{G}$, Γ un élément de γ et 1 l'identité de γ. (dG) désigne une mesure de Haar de $\mathscr{G}$.

Pour toute $f \in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ et tout $X \in \boldsymbol{R}^n$ on définit:

$$(hf)_\Gamma(X) = \int_{\mathscr{G}} (hf)(G^{-1}X) \langle \Gamma^{-1}, G\rangle\, dG.$$

$h(X)(hf)(G^{-1}X)$ a un support inclus dans $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_1^{-1} \subset \mathscr{G}$.

D'après le paragraphe I,

$$h(X)(hf)_\Gamma(X) = h(X) \int_{\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_1^{-1}} (hf)(G^{-1}X) \langle \Gamma^{-1}, G\rangle\, dG \in A_p(\boldsymbol{R}^n).$$

De plus $\|h(X)(hf)_\Gamma(X)\|_{A_p(\boldsymbol{R}^n)}$ est bornée uniformément en Γ par

$$\|h\|^2_{A_p} \|f\|_{A_p} \times \mathrm{mesure}(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_1^{-1}).$$

DÉFINITION. Pour toute $f \in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ on appelle $h(X)(hf)_1(X)$ la *régularisée de f par $\mathscr{G}$.*

Calculons $(hf)_\Gamma(X)$ à l'aide d'une régularisée. A la fonction $\langle \Gamma^{-1}, G\rangle$ on associe la fonction $\tilde{\Gamma}^{-1}(X)$ définie dans $\mathscr{U}$:

Pour tout $X = G\big(\sum_{1}^{n-1} r_i Y_i\big)$, $\tilde{\Gamma}^{-1}(X) = \langle \Gamma^{-1}, G\rangle$. $\tilde{\Gamma}^{-1}(X)$ est indéfiniment différentiable dans $\mathscr{U}$ donc coïncide sur le support de $h(X)$ avec une fonction de $A_p(\boldsymbol{R}^n)$.

$$(hf)_\Gamma(X) = \int_{\mathscr{G}} (hf)(G'^{-1}X) \langle \Gamma, G'^{-1}G\rangle \langle \Gamma^{-1}, G\rangle\, dG' = \tilde{\Gamma}^{-1}(X)(hf\tilde{\Gamma})_1(X).$$

Synthèse et régularisation. La démonstration repose sur le lemme suivant:

LEMME ([6]). *Soit $\{\varphi_\nu(G)\}$ une suite de fonctions de $L^1(\mathscr{G})$, positives, à support compact, de norme 1, telles que pour tout voisinage v de $1_{\mathscr{G}}$ on ait*

$$\int_{v^c} \varphi_\nu(G)\, dG \to 0 \quad si \quad \nu \to \infty.$$

Alors pour toute $f \in A_p(\boldsymbol{R}^n)$,

$$\|f_{\varphi_\nu} - f\|_{A_p(\boldsymbol{R}^n)} \to 0 \quad si \quad \nu \to \infty,$$

pour tout $S \in C_p(\boldsymbol{R}^n)$

$$S_{\varphi_\nu} \to S \quad si \quad \nu \to \infty$$

pour la topologie faible $\sigma\big(C_p(\boldsymbol{R}^n), A_p(\boldsymbol{R}^n)\big)$.

On supposera de plus dans ce qui suit que $\varphi_\nu \in A(\mathscr{G})\ \big(= \mathscr{F}L^1(\mathscr{G})\big)$. Soient $S \in C_p(\boldsymbol{R}^n)$ à support dans la portion d'orbite Ω et $f \in A_p(\boldsymbol{R}^n)$. D'après le lemme,

$$\langle S, f\rangle = \langle S, hf\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \langle S, (hf)_{\varphi_\nu}\rangle.$$

Calculons

$$(hf)_{\varphi_\nu}(X) = \int_{\mathscr{G}} \varphi_\nu(G)(hf)(G^{-1}X)\, dG.$$

$\varphi_\nu(G)$ et $(hf)(G^{-1}X)$ ayant un support compact dans $\mathscr{G}$ (pour X fixé), on a d'après la formule de Parseval:

$$(hf)_{\varphi_\nu}(X) = \int_{\gamma} \hat{\varphi}_\nu(\Gamma)(hf)_\Gamma(X)\, d\Gamma$$

$d\Gamma$ désignant la mesure de Haar de γ associée à dG. Comme la norme de $h(X)(hf)_\Gamma(X)$ est bornée uniformément par rapport à Γ et que $\hat{\varphi}_\nu(\Gamma)\in L^1(\gamma)$ on a:

$$\langle S, (hf)_{\varphi_\nu}\rangle = \int_\gamma \hat{\varphi}_\nu(\Gamma)\,\langle S, (hf)_\Gamma(X)\rangle\, d\Gamma.$$

Par définition, Ω est de synthèse dans $A_p(\boldsymbol{R}^n)$ si et seulement si pour tout $S\in C_p(\boldsymbol{R}^n)$ à support dans Ω, et pour toute $f\in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ nulle sur Ω, on a $\langle S, f\rangle = 0$. D'après ce qui précède il suffit que

$$0 = \langle S, (hf)_\Gamma(X)\rangle = \langle \tilde{\Gamma}^{-1}(X)S, (hf\tilde{\Gamma})_1(X)\rangle$$

ou encore que:

pour tout $S\in C_p(\boldsymbol{R}^n)$ à support dans Ω, pour toute $f\in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ nulle sur Ω, $\langle S, (hf)_1(X)\rangle = 0$.

Remarque: On peut supposer que f est nulle sur toute l'orbite O_{X_0}. En effet la frontière de Ω dans O_{X_0} se réduit à deux points (M_1, M_2), donc est de Ditkin dans $A_p(\boldsymbol{R}^n)$:

$\exists (u_n)\in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ telle que

$$\|u_n f - f\|_{A_p(\boldsymbol{R}^n)} \to 0 \quad \text{si} \quad n\to\infty,$$

$$u_n f = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \cup v_n(M_1) \cup v_n(M_2);$$

$\exists (w_n)\in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ telle que

$$w_n = 1 \quad \text{dans un voisinage de } \Omega,$$

$$w_n = 0 \quad \text{sur le complémentaire dans } O_{X_0} \text{ de } \Omega \cup v_n(M_1) \cup v_n(M_2);$$

$u_n w_n f$ s'annule sur O_{X_0}. Il est évident que

$$\langle S, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S, u_n w_n f\rangle.$$

Régularisation d'un convoluteur. A tout convoluteur $S\in C_p(\boldsymbol{R}^n)$ à support dans Ω on associe son régularisé S_1:

$$\forall f\in A_p(\boldsymbol{R}^n), \quad \langle S_1, f\rangle = \langle S(hf)_1\rangle.$$

Montrons que S_1 s'identifie à une distribution $\tilde{S}_1$ de $\boldsymbol{R}^{n-1}$, à support ponctuel:

Soit $\varphi(X)\in A_p(\boldsymbol{R}^n)$, constante sur les orbites situées dans $\mathscr{U}'$. D'après la définition de $h(X)$ et $\tilde{h}(G)$,

$$\forall X\in\mathscr{U}', \quad (h\varphi)_1(X) = \varphi(X)\int_{\mathscr{G}} \tilde{h}(G^{-1})\,dG.$$

Posons $\int_{\mathscr{G}} \tilde{h}(G^{-1})\,dG = \lambda$. On a

$$\langle S_1, \varphi\rangle = \lambda\langle S, \varphi\rangle.$$

Pour toute $f\in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ la régularisée $(hf)_1$ est constante sur les orbites dans $\mathscr{U}'$, donc:

$$\lambda\langle S, (hf)_1\rangle = \lambda\langle S_1, f\rangle = \langle S_1, (hf)_1\rangle.$$

$\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ désigne les fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\boldsymbol{R}^{n-1}$.

A toute $\tilde{\varphi}(r_1, \ldots, r_{n-1})\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^{n-1})$, à support dans v' on associe $\varphi(X)\in A_p(\boldsymbol{R}^n)$

$$\forall X\in\mathscr{U}', \quad X = G\Big(\sum_1^{n-1} r_i Y_i\Big), \quad \varphi(X) = \tilde{\varphi}(r_1, \ldots, r_{n-1}).$$

Définissons $\tilde{S}_1$ par:

$$\langle \tilde{S}_1, \tilde{\varphi}\rangle = \langle S_1, \varphi\rangle.$$

Il est clair que le support de $\tilde{S}_1$ est le point $(1, \ldots, 1)\in\boldsymbol{R}^{n-1}$. $\tilde{S}_1$ est donc une combinaison linéaire de dérivées de mesures de Dirac.

Le régularisé d'un convoluteur à support dans Ω est une mesure. On va montrer que S_1 ne peut être une pseudomesure que si $\tilde{S}_1$ est proportionnel à la mesure de Dirac δ au point $\{1\}$. S_1 sera alors proportionnel à la mesure

$$f \mapsto (hf)_1(X_0).$$

Pour toute $f\in A_p(\boldsymbol{R}^n)$ nulle sur O_{X_0} on aura $\langle S, (hf)_1\rangle = 0$ d'où la synthèse de Ω.

Supposons que $\tilde{S}_1$ soit une dérivée d'ordre un de la mesure de Dirac, par exemple $\delta^{(1)}_{r_1}$:

$$\forall\tilde{\varphi}(r_1, \ldots, r_{n-1})\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^{n-1}), \quad \langle\delta^{(1)}_{r_1}, \tilde{\varphi}\rangle = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r_1}(1, \ldots, 1).$$

Notons σ_1 la distribution de $\boldsymbol{R}^n$ associée à $\delta^{(1)}_{r_1}$, et $[X]_i$ la $i$ème composante d'un vecteur X de $\boldsymbol{R}^n$.

Pour toute $f\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$

$$\langle\sigma_1, f\rangle = \Big[\frac{\partial}{\partial r_1}\int_{\mathscr{G}} (hf)\Big(G^{-1}\sum_{j-1}^{n-1} r_i Y_i\Big)\,dG\Big]_{r_1=\ldots=r_{n-1}=1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\int \frac{\partial(hf)}{\partial x_j}(G^{-1}X_0)[G^{-1}Y_1]_j\,dG$$

$\mathscr{G}$ est isomorphe à $\boldsymbol{R}$ (ou $\boldsymbol{R}/\alpha\boldsymbol{Z}$). L'image de la mesure de Haar dG est la mesure de Haar du de $\boldsymbol{R}$ (ou $\boldsymbol{R}/\alpha\boldsymbol{Z}$). D'où

$$\langle\sigma_1, f\rangle = \sum_{j=1}^{n}\int\frac{\partial(hf)}{\partial x_j}\big(G^{-1}(u)X_0\big)[G^{-1}(u)Y_1]_j\,du$$

σ_1 est une pseudomesure si et seulement si sa transformée de Fourier $\hat{\sigma}_1$ est bornée.

On évalue $\hat{\sigma}_1$ à l'aide du théorème suivant, démontré par Herz [4].

THÉORÈME. *Soit C une surface de classe $\mathscr{C}^\infty$, frontière d'une partie compacte convexe de $\boldsymbol{R}^{n'}$ ($n' \geqslant 2$), à courbure gaussienne positive. Soit $d\mu$ la mesure d'un élément de surface.*

Alors

$$|\hat{\mu}(z')| = 0\left(|z'|^{-(n'-1)/2}\right) \quad \textit{lorsque} \quad |z'| \to \infty.$$

Il est facile de voir que le résultat est encore valable pour une surface C' de classe $\mathscr{C}^\infty$, à courbure gaussienne positive, non nécessairement fermée.

Il suffit de montrer que $\hat{\sigma}_1(z)$ est non borné lorsque z varie dans le plan $(0, \ldots 0, z_{n-1}, z_n)$. Vérifions que l'ordre de grandeur de $\hat{\sigma}_1(0, \ldots 0, z_{n-1}, z_n)$ ne dépend que de la projection $O'_{X_0} = \big(0, \ldots 0, X_{n-1}(u), X_n(u)\big)$ de O_{X_0}. O'_{X_0} est une orbite du groupe à un paramètre $\mathscr{G}'$, restriction de $\mathscr{G}$ au plan $(0, \ldots 0, X_{n-1}, X_n)$ — c'est donc une droite ou une réunion d'arcs convexes. On peut supposer que:

La projection

$$\big(X_1(u), \ldots X_n(u)\big) \to \big(0, \ldots 0, X_{n-1}(u), X_n(u)\big)$$

est une bijection de $O_{X_0} \cap \operatorname{Support} h$ sur $\Omega' \subset O'_{X_0}$.

L'image Ω' est un arc convexe du plan $(0, \ldots, 0, X_{n-1}, X_n)$ ou un segment de droite.

En effet soit $k(X)$ une fonction indéfiniment différentiable dans $\boldsymbol{R}^n$, à support compact, nulle sur le complémentaire dans O_{X_0} d'un arc inclus dans le support de h, vérifiant les conditions précédentes. Si $\hat{\sigma}_1(z)$ était borné, $\widehat{k\sigma_1}(z) = (\hat{k} * \hat{\sigma}_1)(z)$ le serait aussi.

σ_1 est la somme d'une mesure et d'une distribution σ telle que:

$$|\hat{\sigma}(0, \ldots 0, z_{n-1}, z_n)| = \Big|\sum_{j=n-1}^{n} z_j \int h\big(G^{-1}(u)X_0\big) e^{-i\langle G^{-1}(u)X_0, z\rangle} [G^{-1}(u)Y_1]_j\, du\Big|.$$

En posant

$$h'\big(G'^{-1}(u)X_0\big) = h\big(G^{-1}(u)X_0\big),$$

$$|\hat{\sigma}(0, \ldots 0, z_{n-1}, z_n)| = \Big|\sum_{j=n-1}^{n} z_j \int_{\mathscr{G}'} h'(G'^{-1}X_0) e^{-i\langle G'^{-1}X_0, z\rangle} [G'^{-1}Y_1]_j\, dG'\Big|.$$

Soit $d\mu$ la mesure élémentaire de Ω'. On a $d\mu = \theta(u)du$ où $\theta(u)$ est une fonction indéfiniment dérivable de signe constant.

$$|\hat{\sigma}_1(0, \ldots, 0, z_{n-1}, z_n)| = \Big|\sum_{j=n-1}^{n} z_j \widehat{h'(X')[G'^{-1}X_1]_j \frac{d\mu(X')}{\theta}}\Big|$$

$\hat{\sigma}$ est non borné d'après le théorème de Herz ($n' = z$) si Ω' est un arc convexe, d'après la synthèse de Ω' si Ω' est un segment de droite. Ceci achève la démonstration.

Rappelons que, pour $n \geqslant 3$, les surfaces de $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant les conditions du théorème de Herz ne sont pas de synthèse dans $A(\boldsymbol{R}^n)$. Un raisonnement analogue à celui fait pour la sphère [1] montre qu'elles ne sont pas de synthèse dans $A_p(\boldsymbol{R}^n)$ pour $2 \geqslant p > \dfrac{n-1}{n-2}$.

Limites de la méthode. La méthode précédente peut-elle s'appliquer à d'autres groupes que les groupes à un paramètre?

Soit $\mathscr{G}$ un sous-groupe de Lie topologique de $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ de dimension k vérifiant la condition (C) suivante:

les coefficients $g_{ij}(u_1, \ldots, u_k)$ d'une matrice représentant $G(u_1, \ldots, u_k) \in \mathscr{G}$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\boldsymbol{R}^k$. $\mathscr{G}$ est donc connexe.

$X_0 \in \boldsymbol{R}^n$ n'appartenant pas à un sous-espace invariant par $\mathscr{G}$, supposons que l'orbite O_{X_0} soit une variété de dimension 1. On sait que O_{X_0} est difféomorphe à $\mathscr{G}/\mathscr{K}_{X_0}$, où $\mathscr{K}_{X_0}$ est le groupe d'istopie de X_0.

Pour définir $h(X)$ on a besoin des conditions suivantes:

(i) $\mathscr{K}_{X_0}$ est compact.

(ii) Il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de O_{X_0} tel que $\mathscr{U}$ soit une réunion d'orbites difféomorphes à $\mathscr{G}/\mathscr{K}_{X_0}$.

La condition (ii) entraîne que pour tout $X \in \mathscr{U}$, $\mathscr{K}_X$ et $\mathscr{K}_{X_0}$ sont conjugués. L'ensemble $\{X \in \mathscr{U};\, \mathscr{K}_X = \mathscr{K}_{X_0}\}$ est donc inclus dans un sous-espace affine de $\boldsymbol{R}^n$ passant par l'origine, rencontrant toutes les orbites de $\mathscr{U}$. $\mathscr{U}$ étant un voisinage de X_0 dans $\boldsymbol{R}^n$, l'espace est nécessairement de dimension $n-1$.

Les éléments de $\mathscr{K}_{X_0}$ ont $(n-1)$ vecteurs propres réels communs associés à la valeur propre 1. La condition (i) entraîne que la dernière valeur propre est ± 1. Si $\mathscr{K}_{X_0}$ est réduit à l'identité, $\mathscr{G}$ est nécessairement un groupe à un paramètre. Si $\mathscr{K}_{X_0}$ est formé de deux éléments, soit $\mathscr{G}_1$ le sous-groupe ouvert et fermé de $\mathscr{G}$ formé des endomorphismes $G(u)$ de déterminant positif. C'est encore un groupe de Lie. Les orbites de $\mathscr{U}$ sont engendrées par $\mathscr{G}_1$. On est ramené au cas précédent.

IV. LE PROBLÈME DE LA p-FINESSE

La technique précédente permet de compléter le résultat obtenu par Khalil pour les sphères [5].

$\mathscr{C}(\boldsymbol{R}^n)$ désigne l'algèbre des fonctions continues bornées dans $\boldsymbol{R}^n$.

DÉFINITION. Posons $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $1 \leqslant p < \infty$. Un sous-ensemble E

de $\boldsymbol{R}^n$ est p-*fin* si les conditions

(i) $\varphi \in L^q(\boldsymbol{R}^n) \cap \mathscr{C}(\boldsymbol{R}^n)$,

(ii) spectre $\varphi \subset E$

entraînent $\varphi = 0$.

THÉORÈME. *Soit $\mathscr{G}$ un sous-groupe de Lie de* $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ *tel que:*

(i) *$\mathscr{G}$ vérifie la condition* C (cf. III),

(ii) *l'orbite par $\mathscr{G}$ d'un point X_0 de $\boldsymbol{R}^n$ est une variété de dimension* $(n-1)$,

(iii) *le groupe d'isotopie $\mathscr{K}_{X_0}$ de X_0 est compact.*

Alors une partie Ω compacte, convexe, à courbure gaussienne positive, de l'orbite est un ensemble p-fin si et seulement si $p \geqslant 2n/(n+1)$ $(n > 1)$.

Supposons que l'hyperplan tangent en X_0 à Ω ne passe pas par l'origine O. Alors

$$\mathscr{U} = \{X = rGX_0 \mid G \in \mathscr{G},\ r \in v(1) \subset \boldsymbol{R}^+\}$$

est un voisinage de O_{X_0}.

Dans $\mathscr{U}$ les orbites se déduisent de O_{X_0} par une homothétie de centre 0, de rapport r. Il est évident qu'elles sont en bijection avec l'espace homogène $\mathscr{G}/\mathscr{K}_{X_0}$.

Régularisation d'une fonction et d'une pseudomesure. Soient Ω, Ω' deux parties compactes convexes de O_{X_0}, à courbure gaussienne positive, telles que $\Omega \subset \Omega'$. Les ensembles $\mathscr{H}$ (respectivement $\mathscr{H}'$) $= \{G \in \mathscr{G} \mid GX_0 \in \Omega$ (resp. Ω')$\}$ sont des compacts de $\mathscr{G}$ à cause de l'hypothèse (iii) sur $\mathscr{K}_{X_0}$.

Définissons une fonction $h(X)$ à valeurs réelles telle que:

(i) $h(X)$ a un support compact inclus dans $\{rX \mid r \in v(1),\ X \in \Omega'\}$,

(ii) $\forall X \in \Omega'$, $\forall r \in v'(1) \subset v(1)$ $h(rX) = h(X)$,

(iii) $h(X) = 1$ dans un voisinage de Ω,

(iv) $h(X)$ est indéfiniment différentiable dans $\boldsymbol{R}^n$.

k étant la dimension de $\mathscr{G}$, dG désigne une k-forme différentielle positive invariante à gauche par $\mathscr{G}$ (unique à une constante près) ([2], X. 1). Il existe $F(u_1, \ldots, u_k) \in \mathscr{C}^\infty_{(\boldsymbol{R}^k)}$ telle que l'image de la mesure dG dans $\boldsymbol{R}^k$ soit $F(u_1, \ldots, u_k)\,du_1 \wedge \ldots \wedge du_k$.

D'autre part soit $d\mu$ la mesure élémentaire de O_{X_0}. D'après les hypothèses faites sur Ω', il existe $\theta(u_1 \ldots u_k)$ indéfiniment différentiable sur $\boldsymbol{R}^k$, ne s'annulant pas sur Ω', telle que

$$(h\,d\mu)\big(X(u_1 \ldots u_k)\big) = h\,\theta(u_1 \ldots u_k)\,du_1 \wedge \ldots \wedge du_k.$$

Pour toute $f \in A(\boldsymbol{R}^n)$ et toute pseudomesure S à support dans Ω on définit à l'aide de $h(X)$ et de dG une régularisée comme dans le paragraphe III.

La régularisée S_1 de S s'identifie encore à une distribution $\tilde{S}_1$ sur $\boldsymbol{R}$, combinaison linéaire de dérivées de mesures de Dirac $\delta^{(k)}$ au point $\{1\}$. Soit σ_k la distribution de $\boldsymbol{R}^n$ associée à $\delta^{(k)}$. Comme précédemment:

Pour toute $f \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$,

$$\langle \sigma_k, f\rangle = \sum_{(i_1 \ldots i_k) \in \{1 \ldots n\}} \int \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} (hf)(X) \prod_{j=1} x_{ij} \frac{F}{\theta}\, d\mu(x).$$

D'après le théorème de Herz,

$$\left| h \widehat{\frac{\partial^k \mu}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}} \right| = O\Big(|z|^{-\frac{n-1}{2}+k}\Big).$$

D'où

$$|\hat{\sigma}_k(z)| = O\Big(|z|^{-\frac{n-1}{2}+k}\Big) \quad \text{si} \quad |z| \to \infty.$$

Démonstration du théorème. Supposons que Ω ne soit pas p-fin: il existe une pseudomesure S à support dans Ω, telle que $\hat{S} \in L^q(\boldsymbol{R}^n) \cap \mathscr{C}(\boldsymbol{R}^n)$. Montrons que sa régularisée S_1 vérifie: $\hat{S}_1 \in L^q(\boldsymbol{R}^n) \cap \mathscr{C}(\boldsymbol{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
\hat{S}_1(z) &= \Big\langle S, \int_{\mathscr{H}' \times \mathscr{H}'^{-1}} h(G^{-1}X)\, e^{-i\langle G^{-1}X, Z\rangle}\, dG \Big\rangle \\
&= \int_{\mathscr{H}' \times \mathscr{H}'^{-1}} \langle S, h(G^{-1}X)\, e^{-i\langle G^{-1}X, Z\rangle}\rangle\, dG \\
&= \int_{\mathscr{H}' \times \mathscr{H}'^{-1}} \hat{h} \times \widehat{(GS)}(Z)\, dG = \hat{h} * \int_{\mathscr{H}' \times \mathscr{H}'^{-1}} \widehat{GS}\, dG
\end{aligned}$$

or

$$\widehat{GS}(Z) = \hat{S}(G^{-1}Z); \qquad \int_{\mathscr{H}' \times \mathscr{H}'^{-1}} \widehat{GS}\, dG \in L^q(\boldsymbol{R}^n) \cap \mathscr{C}(\boldsymbol{R}^n), \qquad \text{et} \qquad \hat{h} \in \mathscr{C}(\boldsymbol{R}^n).$$

S_1 étant combinaison linéaire des distributions σ_k, on a nécessairement: $\dfrac{n-1}{2}q > n$ d'où $p < \dfrac{2n}{n+1}$.

Réciproquement prenons $p < \dfrac{2n}{n+1}$ et $\varphi = \widehat{h_1 \mu}$ où h_1 est une fonction indéfiniment différentiable, à support dans Ω, valant 1 sur une partie compacte convexe de Ω.

Alors

$$|\varphi(z)| = O\,(|z|^{-(n-1)/2}) \quad \text{si} \quad |z| \to \infty \ \text{et}\ \varphi(z) \in L^q(\boldsymbol{R}^n) \cap \mathscr{C}(\boldsymbol{R}^n).$$

Bibliographie

[1] P. Eymard, *Spectral synthesis for multipliers*. Symposium, Warwick, July 1968.
[2] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, New York 1962.
[3] C. S. Herz, *Spectral synthesis for the circle*, Ann. of Math. 68 (1958), p. 709-712.
[4] — *Fourier transforms related to convex sets*, Ann. of Math. 75 (1962), p. 81-92.
[5] X. X. Khalil, *Thèse*, Nancy 1969.
[6] N. Th. Varopoulos, *Spectral synthesis on spheres*, Proc. Camb. Phil. Soc. 62 (1966), p. 379-387.

Reçu par la Rédaction le 5. 12. 1969

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIX. (1971)

On the extension of Lipschitz-Hölder maps on L^P spaces

by

LYNN WILLIAMS, J. H. WELLS and T. L. HAYDEN (Lexington, Ky.)

1. Introduction. Let (M_1, d_1) and (M_2, d_2) be metric spaces and, for each subset D of M_1 and positive number α, define $\mathrm{Lip}(D, M_2; \alpha)$ to be the set of all maps $f\colon D \to M_2$ which satisfy a Lipschitz-Hölder continuity condition of order α, that is,

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leqslant [d_1(x_1, x_2)]^\alpha \quad \text{for all } x_1, x_2 \in D.$$

The statement that "extension holds for α" or simply "$e(M_1, M_2; \alpha)$ holds" means that, for arbitrary $D \subset M_1$, every map in $\mathrm{Lip}(D, M_2; \alpha)$ extends to a map in $\mathrm{Lip}(M_1, M_2; \alpha)$. The problem of extending Lipschitz (contraction) and Lipschitz-Hölder maps was first considered by MacShane [5] and Banach [1] in the case M_2 is the real line, and it follows from a well-known result of Kirszbraun [4] that $e(H, H; 1)$ holds for H a Hilbert space. A review of other related results and a basic bibliography to the subject is given in [2]. In [3] it was shown that if M_1 is an L^q space, $2 \leqslant q < \infty$, and M_2 is a Hilbert space H, then $e(L^q, H; \alpha)$ holds for $0 < 2\alpha \leqslant q/(q-1)$; and also that $e(L^q, H; \alpha)$ holds for $0 < 2\alpha \leqslant q$ and $1 \leqslant q \leqslant 2$. In this paper we generalize these results as follows:

THEOREM 1. *Let (M_1, d_1) be a metric space and let (X, μ) and (Y, ν) be two σ-finite measure spaces. Then*

(a) *$e(L^q(\mu), L^p(\nu); \alpha)$ holds for*

(i) *$0 < \alpha \leqslant q/p$ if $1 < q \leqslant 2$ and $2 \leqslant p < \infty$;*

(ii) *$0 < \alpha \leqslant q'/p$ if $2 \leqslant p < \infty$ and $2 \leqslant q < \infty$;*

(iii) *$0 < \alpha \leqslant q/p'$ if $1 < p \leqslant 2$ and $1 < q \leqslant 2$;*

(iv) *$0 < \alpha \leqslant q'/p'$ if $1 < p \leqslant 2$ and $2 \leqslant q < \infty$,*

where $1/p+1/p' = 1/q+1/q' = 1$. Furthermore the range of α is sharp if the respective L^p spaces are infinite dimensional. Also

(b) *$e(M_1, L^p(\nu); \alpha)$ holds for $0 < \alpha \leqslant 1/p$ when $2 \leqslant p < \infty$ and for $0 < \alpha < 1/p'$ when $1 < p \leqslant 2$.*

We shall show in Section 2 that this extension theorem is a direct consequence of the following fundamental L^p space inequalities: