STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVIII. (1970)
Colloquium on
Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras

Ideale von S_p-Operatoren in Banachräumen

von

ALBRECHT PIETSCH (Jena)

Die Idealtheorie im Operatorenring des unendlichdimensionalen separablen Hilbertraumes wurde durch J. W. Calkin begründet (vgl. [2]). Schon dieser Spezialfall zeigt, daß es eine unübersehbare Menge von Operatorenidealen gibt. Wenn man die Betrachtungen auf beliebige Banachräume ausdehnt, wird die Situation noch wesentlich komplizierter. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß bis jetzt noch keine abgerundete Theorie der Operatorenideale über Banachräumen existiert. Trotzdem — oder gerade deshalb — soll im folgenden über einige Grundzüge dieser Theorie berichtet werden. Dabei handelt es sich im wesentlichen um Untersuchungen über spezielle Ideale, deren Operatoren durch günstige Eigenschaften ausgezeichnet sind. Das gilt ganz besonders für Verallgemeinerungen der S_p-Operatoren, die bisher nur in Hilberträumen definiert wurden.

1. Operatorenideale. Im folgenden ist $\boldsymbol{L}$ die Klasse aller beschränkten linearen Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen, und mit $\boldsymbol{L}(E, F)$ wird die Menge derjenigen Operatoren $T \in \boldsymbol{L}$ bezeichnet, die den Banachraum E in den Banachraum F abbilden.

Eine Klasse $\boldsymbol{A}$ von beschränkten linearen Operatoren heißt *Ideal*, wenn für die Mengen

$$\boldsymbol{A}(E, F) = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{L}(E, F)$$

die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(A) Aus $S, T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ folgt $S+T \in \boldsymbol{A}(E, F)$.

(I_1) Aus $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{L}(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{A}(E, G)$.

(I_2) Aus $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{A}(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{A}(E, G)$.

Eine Abbildung α, die jedem Operator T eines Ideals $\boldsymbol{A}$ eine nicht negative Zahl $\alpha(T)$ zuordnet, nennt man *Quasinorm*, wenn sie die nachstehenden Eigenschaften besitzt:

(O) Aus $\alpha(T) = 0$ folgt $T = 0$.

(NA) Für $S, T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ gilt $\alpha(S+T) \leqslant \varrho[\alpha(S)+\alpha(T)]$.

(NI$_1$) Für $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{L}(F, G)$ gilt $\boldsymbol{\alpha}(ST) \leqslant \|S\|\ \boldsymbol{\alpha}(T)$.

(NI$_2$) Für $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{A}(F, G)$ gilt $\boldsymbol{\alpha}(ST) \leqslant \boldsymbol{\alpha}(S)\|T\|$.

Besteht sogar die Ungleichung $\boldsymbol{\alpha}(S+T)^p \leqslant \boldsymbol{\alpha}(S)^p + \boldsymbol{\alpha}(T)^p$ mit $0 < p \leqslant 1$, dann kann $\varrho = 2^{1/p-1}$ gesetzt werden, und man bezeichnet $\boldsymbol{\alpha}$ als *p-Norm* $(0 < p < 1)$ bzw. *Norm* $(p = 1)$.

Ein Operatorenideal $\boldsymbol{A}$, auf dem eine Quasinorm bzw. p-Norm bzw. Norm $\boldsymbol{\alpha}$ gegeben ist, heißt *Quasinormideal* bzw. *p-Normideal* bzw. *Normideal* $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\alpha}]$. Ein Quasinormideal $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\alpha}]$ ist *vollständig*, wenn die einzelnen Komponenten $\boldsymbol{A}(E, F)$ vollständig sind.

2. Einige spezielle Operatorenideale. Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, daß man keine befriedigende Übersicht über alle möglichen Operatorenideale gewinnen kann. Eine allgemeine Theorie muß deshalb mit einer schwächeren Zielstellung aufgebaut werden, und es liegt nahe, daß man sich zuerst mit einigen speziellen Operatorenidealen beschäftigt.

$\boldsymbol{K}$ = *Ideal der kompakten Operatoren* (vgl. [3]): Ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ heißt kompakt, wenn er jede beschränkte Teilmenge von E in eine relativ kompakte Teilmenge von F überführt.

$\boldsymbol{V}$ = *Ideal der vollstetigen Operatoren* (vgl. [3] und [9]): Ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ heißt vollstetig, wenn er jede schwach konvergente Folge aus E in eine normkonvergente Folge aus F abbildet.

$\boldsymbol{Z}$ = *Ideal der streng singulären Operatoren* (vgl. [6] und [10]): Ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ heißt streng singulär, wenn es keinen unendlich-dimensionalen Teilraum M von E gibt, auf dem mit einer positiven Konstanten ϱ die Ungleichung $\|Tx\| \geqslant \varrho\, \|x\|$ besteht.

$\boldsymbol{W}$ = *Ideal der schwach kompakten Operatoren* (vgl. [3]): Ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ heißt schwach kompakt, wenn er jede beschränkte Teilmenge von E in eine relativ schwach kompakte Teilmenge von F abbildet.

Die bisher angeführten Ideale sind vollständig, wenn man auf ihnen die Operatorennorm $\|\cdot\|$ verwendet. Wir geben nun noch einige Operatorenideale an, deren Norm auf andere Weise definiert wird.

$\boldsymbol{N}$ = *Ideal der nuklearen Operatoren* (vgl. [7] und [27]): Ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ heißt nuklear, wenn er sich in der Form

$$Tx = \sum_1^\infty \langle x, a_n \rangle y_n$$

darstellen läßt, so daß für die Linearformen $a_n \in E'$ und die Elemente $y_n \in F$ die Ungleichung

$$\sum_1^\infty \|a_n\|\ \|y_n\| < \infty$$

gilt. Wird das Infimum

$$\boldsymbol{\nu}(T) = \inf \sum_1^\infty \|a_n\|\ \|y_n\|$$

über alle möglichen Darstellungen gebildet, so ist $[\boldsymbol{N}, \boldsymbol{\nu}]$ ein volständiges Normideal.

$\boldsymbol{I}$ = *Ideal der integralen Operatoren* (vgl. [7] und [27]): Ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ heißt integral, wenn eine nicht negative Konstante ϱ existiert, so daß für alle endliche Systeme von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in E$ und Linearformen $b_1, \ldots, b_n \in F'$ die Ungleichung

$$\left| \sum_1^n \langle Tx_i, b_i \rangle \right| \leqslant \varrho \sup \left\{ \left| \sum_1^n \langle x_i, a \rangle \langle y, b_i \rangle \right| : \|a\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1 \right\}$$

besteht. Mit

$$\boldsymbol{\iota}(T) = \inf \varrho$$

ist $[\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\iota}]$ ein vollständiges Normideal.

$\boldsymbol{\Pi}_p$ = *Ideal der absolut-p-summierenden Operatoren* (vgl. [20]): Ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ heißt absolut-p-summierend, wenn es eine nicht negative Konstante ϱ gibt, so daß für jedes endliche System von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in E$ die Ungleichung

$$\left\{ \sum_1^n \|Tx_i\|^p \right\}^{1/p} \leqslant \varrho \sup_{\|a\| \leqslant 1} \left\{ \sum_1^n |\langle x_i, a \rangle|^p \right\}^{1/p}$$

besteht. Mit

$$\boldsymbol{\pi}_p(T) = \inf \varrho$$

ist $[\boldsymbol{\Pi}_p, \boldsymbol{\pi}_p]$ ein vollständiges Normideal.

$\boldsymbol{F}_p$ = *Ideal der l_p-faktorisierbaren Operatoren* (vgl. [23]): Ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ heißt l_p-faktorisierbar, wenn er sich als Produkt $T = YA$ mit $A \in \boldsymbol{L}(E, l_p)$ und $Y \in \boldsymbol{L}(l_p, F)$ schreiben läßt. Wird das Infimum

$$\boldsymbol{\varphi}_p(T) = \inf \|A\|\ \|Y\|$$

über alle möglichen Faktorisierungen gebildet, so ist $[\boldsymbol{F}_p, \boldsymbol{\varphi}_p]$ ein vollständiges Normideal.

3. S_p-Operatoren in Banachräumen. Ein interessanter Zugang zu vielen Problemen ergibt sich, wenn man nach Fortsetzungen der Operatorenideale $\boldsymbol{S}_p(H, H)$ sucht. Die durch J. v. Neumann und R. Schatten (vgl. [3], [5], [12] und [26]) nur in Hilberträumen H eingeführten S_p-Operatoren sind bekanntlich dadurch charakterisiert, daß sie sich mit zwei Orthonormalfolgen (e_n) und (f_n) sowie einer Zahlenfolge $(\tau_n) \in l_p$ in der

Form

$$Tx = \sum_1^\infty \tau_n(x, e_n) f_n$$

schreiben lassen. Durch den Ansatz

$$\sigma_p(T) = \Big\{\sum_1^\infty |\tau_n|^p\Big\}^{1/p}$$

erhält man auf $S_p(H, H)$ eine p-Norm $(0 < p < 1)$ (vgl. [12] und [25]) bzw. Norm $(1 \leqslant p < \infty)$. Im Fall $p = \infty$, wird l_p durch c_0 ersetzt, und es gilt

$$\sigma_\infty(T) = \|T\| = \sup|\tau_n|.$$

Die vielfältigen Fortsetzungsmöglichkeiten für die Operatorenideale $S_p(H, H)$ sollen durch die folgenden Beispiele illustriert werden:

(1) Die Operatorenideale K, V, Z und F_p $(1 < p < \infty,\ p \neq 2)$ sind Fortsetzungen von $S_\infty(H, H)$ (vgl. [6] und [23]).

(2) Die Operatorenideale F_1, F_∞ und $\Pi_p (1 \leqslant p < \infty)$ sind Fortsetzungen von $S_2(H, H)$ (vgl. [8], [11] und [18].)

(3) Die Operatorenideale N und I sind Fortsetzungen von $S_1(H, H)$ (vgl. [7] und [27]).

4. Die maximale Fortsetzung von $S_p(H, H)$. Wir betrachten die Mengen $S_p^{\max}(E, F)$ aller Operatoren $T \in L(E, F)$ mit der folgenden Eigenschaft:

Für $X \in L(H, E)$ und $B \in L(F, H)$ gilt stets $BTX \in S_p(H, H)$. Dann ergibt sich durch den Ansatz

$$\sigma_p^{\max}(T) = \sup\{\sigma_p(BTX) : \|X\| \leqslant 1,\ \|B\| \leqslant 1\}$$

eine p-Norm $(0 < p < 1)$ bzw. Norm $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, für die $S_p^{\max}$ vollständig ist. Außerdem zeigt sich, daß man mit $S_p^{\max}$ die größte Fortsetzung von $S_p(H, H)$ zu einem Operatorenideal gewonnen hat.

Für $1 \leqslant p < \infty$ gehört ein Operator T genau dann zu $S_p^{\max}(E, F)$, wenn eine nicht negative Konstante ϱ existiert, so daß für alle endlichen Systeme von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in E$ und Linearformen $b_1, \ldots, b_n \in F'$ die Ungleichung

$$\Big\{\sum_1^n |\langle Tx_i, b_i\rangle|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \varrho \sup_{\|a\| \leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle x_i, a\rangle|^2\Big\}^{1/2} \sup_{\|y\| \leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle y, b_i\rangle|^2\Big\}^{1/2}$$

besteht. Dabei gilt

$$\sigma_p^{\max}(T) = \inf \varrho.$$

Bezeichnet man ein Operatorenideal A als *eigentlich*, wenn für jeden Banachraum E aus $A(E, E) = L(E, E)$ stets $\dim E < \infty$ folgt, so sind die Operatorenideale $S_p^{\max}$ für $p < 2$ eigentlich und für $p \geqslant 2$ uneigentlich. Der zweite Teil dieser Behauptung folgt aus der Tatsache, daß die identischen Abbildungen aller Banachräume von Typ $\mathscr{L}_1$ und $\mathscr{L}_\infty$ zu $S_2^{\max}$ gehören (vgl. [8] und [11]).

5. Die minimale Fortsetzung von $S_p(H, H)$. Wir betrachten die Mengen $S_p^{\min}(E, F)$ aller Operatoren $T \in L(E, F)$, die sich als Produkt $T = YSA$ von drei Operatoren $A \in L(E, H)$, $S \in S_p(H, H)$ und $Y \in L(H, F)$ darstellen lassen, und setzen

$$\sigma_p^{\min}(T) = \inf \|A\| \sigma_p(S) \|Y\|,$$

wobei das Infimum über alle möglichen Faktorisierungen gebildet wird. Dann ist $[S_p^{\min}, \sigma_p^{\min}]$ ein vollständiges Quasinormideal, und wir haben damit die kleinste Fortsetzung von $S_p(H, H)$ zu einem Operatorenideal gefunden.

Ein Operator T gehört genau dann zu $S_p^{\min}(E, F)$ wenn er sich in der Form

$$Tx = \sum_1^\infty \tau_n \langle x, a_n\rangle y_n$$

darstellen läßt, so daß die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\sum_1^\infty |\langle x, a_n\rangle|^2 < \infty \text{ für } x \in E, \qquad \sum_1^\infty |\langle y_n, b\rangle|^2 < \infty \text{ für } b \in F',$$

$$\sum_1^\infty |\tau_n|^p < \infty.$$

Weil $[N, \nu]$ das kleinste vollständige Normideal ist, folgt aus der Beziehung $N \not\subset S_p^{\min}$ für $0 < p < \infty$, daß es keine Norm gibt, die $S_p^{\min}$ zu einem vollständigen Normideal macht.

6. Die minimale normierte Fortsetzung von $S_p(H, H)$. Wir betrachten die Mengen $S_p^{\mathrm{norm}}(E, F)$ aller Operatoren $T \in L(E, F)$, die sich mit Operatoren $T_n \in S_p^{\min}(E, F)$ in der Form

$$Tx = \sum_1^\infty T_n x$$

darstellen lassen, so daß die Ungleichung

$$\sum_1^\infty \sigma_p^{\min}(T_n)^p < \infty \quad \text{für } 0 < p < 1$$

bzw.

$$\sum_{1}^{\infty} \sigma_p^{\min}(T_n) < \infty \qquad \text{für } 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

besteht. Setzt man außerdem

$$\sigma_p^{\mathrm{norm}}(T) = \inf\Big\{\sum_{1}^{\infty} \sigma_p^{\min}(T_n)^p\Big\}^{1/p} \qquad \text{für } 0 < p < 1$$

bzw.

$$\sigma_p^{\mathrm{norm}}(T) = \inf\Big\{\sum_{1}^{\infty} \sigma_p^{\min}(T_n)\Big\} \qquad \text{für } 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

wobei das Infimum über alle möglichen Darstellungen gebildet wird, so ist $[\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{norm}}, \sigma_p^{\mathrm{norm}}]$ die kleinste Fortsetzung von $\boldsymbol{S}_p(H, H)$ zu einem vollständigen p-Normideal $(0 < p < 1)$ bzw. Normideal $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Für $0 < p \leqslant 1$ ergeben sich die p-nuklearen Operatoren (vgl. [7]), denn ein Operator T gehört genau dann zu $\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{norm}}(E, F)$, wenn er sich in der Form

$$Tx = \sum_{1}^{\infty} \tau_n \langle x, a_n\rangle y_n$$

darstellen läßt, so daß die Ungleichungen

$$\sum_{1}^{\infty} |\tau_n|^p < \infty, \qquad \|a_n\| \leqslant 1 \qquad \text{und} \qquad \|y_n\| \leqslant 1$$

bestehen. Dabei gilt

$$\sigma_p^{\mathrm{norm}}(T) = \inf\Big\{\sum_{1}^{\infty} |\tau_n|^p\Big\}^{1/p},$$

wobei das Infimum über alle möglichen Darstellungen gebildet wird.

7. Interpolationsideale. Die Operatorenideale $\boldsymbol{S}_p(H, H)$ mit $1 < p < \infty$ können durch verschiedene Interpolationsmethoden aus den Operatorenidealen $\boldsymbol{S}_1(H, H)$ und $\boldsymbol{L}(H, H)$ erzeugt werden (vgl. [5], [24] und [28]). Zur Konstruktion einer einheitlichen Fortsetzung der Operatorenideale $\boldsymbol{S}_p(H, H)$ benötigt man deshalb nur eine Fortsetzung von $\boldsymbol{S}_1(H, H)$. Die dazwischen liegenden Operatorenideale $\boldsymbol{S}_p$ ergeben sich dann durch Interpolation.

Als ausgezeichnete Fortsetzungen von $\boldsymbol{S}_1(H, H)$ bieten sich die Ideale $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{I}$ an. Wir setzen deshalb

$$\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{cald}} = [\boldsymbol{L}, \boldsymbol{I}]_\theta \text{ und } \boldsymbol{S}_p^{\mathrm{peet}} = (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{I})_{\theta,p} \qquad \text{mit } \theta = 1/p$$

(vgl. [1] und [17]). Falls die zugrunde liegenden Banachräume die metrische Approximationseigenschaft besitzen, bestehen die Ideale

$$[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{N}]_\theta \qquad \text{und} \qquad (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{N})_{\theta,p} \qquad \text{mit } \theta = 1/p$$

aus denjenigen Operatoren, die sich in $\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{cald}}$ bzw. $\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{peet}}$ durch ausgeartete Operatoren approximieren lassen.

8. Approximationsideale. Wir betrachten die Mengen $\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{appr}}(E, F)$ aller Operatoren $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$, so daß für die Approximationszahlen (vgl. [21])

$$a_n(T) = \inf\{\|T - A\|:\ \dim B(A) < n\}$$

die Ungleichung

$$\sum_{1}^{\infty} a_n(T)^p < \infty$$

besteht, und setzen

$$\sigma_p^{\mathrm{appr}}(T) = \Big\{\sum_{1}^{\infty} a_n(T)^p\Big\}^{1/p}.$$

Dann ist das vollständige Quasinormideal $[\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{appr}}, \sigma_p^{\mathrm{appr}}]$ eine Fortsetzung von $\boldsymbol{S}_p(H, H)$.

Werden anstelle der Approximationszahlen die Durchmesser (im Sinne von Kolmogorov oder Gelfand, vgl. [13], [14] und [16]) der Menge $\{Tx: \|x\| \leqslant 1\}$ verwendet, so erhält man ebenfalls vollständige Quasinormideale, die Fortsetzungen von $\boldsymbol{S}_p(H, H)$ sind.

9. Zwischenbemerkung. Die angeführten Beispiele zeigen, daß es sehr viele sinnvolle Fortsetzungen der Operatorenideale $\boldsymbol{S}_p(H, H)$ gibt. Von einer "guten Fortsetzung" muß man deshalb zusätzlich verlangen, daß bei ihr möglichst alle vorteilhaften Eigenschaften der Ausgangsideale erhalten bleiben. Aus diesem Grunde besprechen wir im folgenden einige spezielle Eigenschaften von Operatorenidealen.

10. Symmetrische Operatorenideale. Ein Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ heißt *symmetrisch*, wenn die Aussagen $T \in \boldsymbol{A}$ und $T' \in \boldsymbol{A}$ äquivalent sind. Ein klassisches Beispiel ist das Ideal $\boldsymbol{K}$ der kompakten Operatoren (Satz von Schauder).

Alle Ideale von Operatoren in Hilberträumen sind symmetrisch. Im allgemeinen Fall gibt es dagegen auch unsymmetrische Operatorenideale: $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{\Pi}_p$ und $\boldsymbol{F}_p$ $(p \neq 2)$. Die von uns beschriebenen Operatorenideale $\boldsymbol{S}_p^{\min}$, $\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{norm}}$, $\boldsymbol{S}_p^{\max}$, $\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{cald}}$, $\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{peet}}$ und $\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{appr}}$ sind vermutlich alle symmetrisch, falls die zugrunde liegenden Banachräume die metrische Approximationseigenschaft besitzen.

11. Multiplikationseigenschaften. Sind $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ drei Operatorenideale, so schreiben wir $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}$, falls aus $S \in \boldsymbol{A}(F, G)$ und $T \in \boldsymbol{B}(E, F)$ stets $ST \in \boldsymbol{C}(E, G)$ folgt. Als Beispiele führen wir die folgenden Beziehungen an (vgl. [7] und [19]): $\boldsymbol{V} \circ \boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{W} \circ \boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{N}$.

Besonders interessant sind Multiplikationsaussagen für einparametrige Scharen von Operatorenidealen $\boldsymbol{A}_p (0 < p < \infty)$:

$$\boldsymbol{A}_p \circ \boldsymbol{A}_q \subset \boldsymbol{A}_r \quad \text{mit } 1/r = 1/p + 1/q.$$

Diese Beziehung gilt für die Scharen $\boldsymbol{S}_p^{\min}$ und $\boldsymbol{S}_p^{\text{appr}}$ (vgl. [21]). Im Fall $r \geqslant 1$ ist sie auch für $\boldsymbol{S}_p^{\text{norm}}$, $\boldsymbol{S}_p^{\text{cald}}$, $\boldsymbol{S}_p^{\text{vect}}$ (wahrscheinlich) und $\boldsymbol{\Pi}_p$ richtig (vgl. [20] und [24]). Die Operatorenideale $\boldsymbol{S}_p^{\max}$ besitzen dagegen die angegebene Multiplikationseigenschaft nicht. Es wäre denkbar, daß die schwächere Aussage

$$\boldsymbol{S}_p^{\max} \circ \boldsymbol{S}_q^{\max} \subset \boldsymbol{S}_r^{\max} \quad \text{mit } 1/r = 1/p + 1/q - 1/2$$

gilt. Das gleiche Multiplikationsgesetz wird von A. Grothendieck (vgl. [7]) auch für die Operatorenideale $\boldsymbol{S}_p^{\text{norm}}$ mit $0 < p \leqslant 1$ vermutet (unwahrscheinlich).

Für die Theorie der nuklearen lokalkonvexen Räume ist es wichtig, ob zu einem Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ eine natürliche Zahl n mit $\boldsymbol{A}^n \subset \boldsymbol{N}$ existiert. In diesem Fall bezeichnet man $\boldsymbol{A}$ als *$\boldsymbol{N}$-potent*. Man kann sich leicht einige Beispiele ($\boldsymbol{S}_p^{\text{norm}}$, $\boldsymbol{S}_1^{\max}$, $\boldsymbol{\Pi}_p, \ldots$) und Gegenbeispiele ($\boldsymbol{S}_2^{\max}$, $\boldsymbol{F}_p, \ldots$) überlegen. Ungeklärt ist die Situation für $\boldsymbol{S}_p^{\max}$ mit $1 < p < 2$.

12. Adjungierte Operatorenideale. Für jedes Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ setzen wir

$$\boldsymbol{A}^*(E, F) = \{T \in \boldsymbol{L}(E, F) \colon ST \in \boldsymbol{I}(E, F) \text{ für } S \in \boldsymbol{A}(F, E)\}.$$

Dabei ist $\boldsymbol{I}$ das Ideal der integralen Operatoren, und die Banachräume E und F sollen die metrische Approximationseigenschaft besitzen. Auf diese Weise erhalten wir das zu $\boldsymbol{A}$ adjungierte Operatorenideal $\boldsymbol{A}^*$ mit

$$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A}^* \subset \boldsymbol{I} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A}^* \circ \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{I}.$$

Für ein vollständiges Normideal $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\alpha}]$ wird auch $\boldsymbol{A}^*$ durch Einführung der Norm

$$\boldsymbol{\alpha}^*(T) = \sup\{\iota(ST) \colon S \in \boldsymbol{A}(F, E) \text{ mit } \boldsymbol{\alpha}(S) \leqslant 1\}$$

zu einem vollständigen Normideal.

Für die Ideale $\boldsymbol{S}_p(H, H)$ und $1 < p < \infty$ gilt

$$[\boldsymbol{S}_p^*(H, H), \boldsymbol{\sigma}_p^*] = [\boldsymbol{S}_{p^*}(H, H), \boldsymbol{\sigma}_{p^*}] \quad \text{mit } 1/p + 1/p^* = 1.$$

Von einer guten Fortsetzung sollte man deshalb das gleiche Verhalten fordern. Dieser Sachverhalt ist jedoch für die Ideale $\boldsymbol{S}_p^{\max}$, $\boldsymbol{S}_p^{\min}$ und $\boldsymbol{S}_p^{\text{norm}}$ nicht erfüllt, weil die Beziehungen

$$(\boldsymbol{S}_p^{\min})^* = (\boldsymbol{S}_p^{\text{norm}})^* = \boldsymbol{S}_p^{\max}$$

gelten. So bleibt zu hoffen, daß man für die Interpolationsideale $\boldsymbol{S}_p^{\text{cald}}$ oder $\boldsymbol{S}_p^{\text{vect}}$ eine positive Antwort findet, denn auch die Approximationsideale $\boldsymbol{S}_p^{\text{appr}}$ genügen der angegebenen Bedingung nicht.

Ein Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ heißt *selbstadjungiert*, wenn die Beziehung $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$ besteht. Alle selbstadjungierten Operatorenideale sind Fortsetzungen von $\boldsymbol{S}_2(H, H)$. Als Beispiel führen wir $\boldsymbol{\Pi}_2$ an (vgl. [19]).

13. Verteilung von Eigenwerten. Wir betrachten die Mengen $\boldsymbol{R}(E, F)$ derjenigen Operatoren $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$, für die alle Operatoren $I_E - ST$ mit $S \in \boldsymbol{L}(F, E)$ einen endlichdimensionalen Nullraum und einen endlichcodimensionalen abgeschlossenen Bildraum besitzen. $\boldsymbol{R}$ ist das größte Ideal, das nur aus Riesz-Operatoren besteht.

Mit $\boldsymbol{S}_p^{\text{eig}}(E, F)$ bezeichnen wir die Menge aller Operatoren $T \in \boldsymbol{R}(E, F)$, für die mit $S \in \boldsymbol{L}(F, E)$ die Ungleichung

$$\sum_i |\lambda_i(ST)|^p < \infty$$

gilt. Dabei werden die Eigenwerte λ_i des Operators $ST \in \boldsymbol{L}(E, E)$ entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit

$$\dim \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \colon (\lambda I_E - ST)^n x = 0\} \quad \text{für } \lambda \neq 0$$

gezählt.

Bis jetzt ist noch nicht geklärt, ob die Klassen $\boldsymbol{S}_p^{\text{eig}}$ Operatorenideale mit den Quasinormen

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{\text{eig}}(T) = \sup\Big\{\Big(\sum_i |\lambda_i(ST)|^p\Big)^{1/p} \colon \|S\| \leqslant 1\Big\}$$

sind. Immerhin gilt (vgl. [5])

$$\boldsymbol{S}_p^{\text{eig}}(H, H) = \boldsymbol{S}_p(H, H) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}_p^{\text{eig}}(T) = \boldsymbol{\sigma}_p(T).$$

Da die nicht mehr verbesserungsfähigen Beziehungen

$$\boldsymbol{S}_p^{\text{norm}} \subset \boldsymbol{S}_q^{\text{eig}} \quad \text{mit } 1/q = \begin{cases} 1/p - 1/2 & \text{für } 0 < p \leqslant 1, \\ 1/2 & \text{für } 1 \leqslant p \leqslant 2, \\ 1/p & \text{für } 2 \leqslant p < \infty \end{cases}$$

bestehen, kann man nur im Bereich der Quasinormideale günstigere Aussagen über die Verteilung der Eigenwerte erwarten. Als Beispiel erwähnen wir die Inklusionen $S_p^{\min} \subset S_p^{\mathrm{eig}}$. Für die Approximationsideale S_p^{appr} sind noch keine genauen Ergebnisse bekannt.

Literaturnachweis

[1] A. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 14 (1964), S. 113-190.

[2] J. W. Calkin, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert spaces*, Ann. of Math. 42 (1941), S. 839-873.

[3] N. Dunford and J. T. Schwarz, *Linear operators*, New York 1958/63.

[4] D. J. H. Garling, *On ideals of operators in Hilbert space*, Proc. London Math. Soc. (2) 17 (1967), S. 115-138.

[5] I. Z. Gochberg und M. G. Krejn, *Einführung in die Theorie der nicht selbstadjungierten linearen Operatoren*, Moskau 1965 (russ.).

[6] S. Goldberg, *Unbounded linear operators*, London 1967.

[7] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[8] — *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boletim Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956), S. 1-79.

[9] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen IV*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1906), S. 319-384.

[10] T. Kato, *Perturbation theory of nullity, deficiency and other quantities of linear operators*. J. Analyse Math. 6 (1958), S. 261-322.

[11] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968), S. 275-326.

[12] C. A. McCarthy, *C_p*, Israel J. Math. 5 (1967), S. 249-271.

[13] B. S. Mitiagin and A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension*, Berichte des Inter. Math.-Kongr. Moskau 1966, S. 366-372.

[14] B. S. Mitiagin und W. M. Tichomirov, *Asymptotische Charakteristiken von kompakten Mengen in linearen Räumen*, Arbeiten des 4. Sowj. Math. Kongr., Band 2, Moskau 1964, S. 299-308.

[15] J. v. Neumann and R. Schatten, *The cross-space of linear transformations*, Ann. of Math. 47 (1946), S. 73-84; S. 608-630; 49 (1948), S. 557-582.

[16] I. A. Novoselskij, *Einige asymptotische Charakteristiken linearer Operatoren*, Iswestia Akad. Nauk Mold. SSR 6 (1964), S. 85-90.

[17] J. Peetre, *Inledming till interpolation*, Lund 1964-1966.

[18] A. Pełczyński, *A characterization of Hilbert-Schmidt operators*, Studia Math. 28 (1967), S. 355-360.

[19] A. Persson und A. Pietsch, *p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*, ibidem 33 (1969), S. 19-62.

[20] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen*, ibidem 28 (1967), S. 333-353.

[21] — *Einige neue Klassen von kompakten linearen Abbildungen*, Revue Math. pures et appl. (Bukarest) 8 (1963), S. 427-447.

[22] — *Ideale von Operatoren in Banachräumen*, Mitteilungen MGdDDR (1968), S. 1-13.

[23] — *l_p-faktorisierbare Operatoren in Banachräumen*, Acta Sci. Math. 31 (1970), S. 117 123.

[24] A. Pietsch und H. Triebel, *Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren*, Studia Math. 31 (1968), S. 95-109.

[25] S. J. Rotfeld, *Bemerkungen über die singulären Zahlen von Summen kompakter Operatoren*, Funktionalanalysis und ihre Anw. 1 (1967), S. 95-96.

[26] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[27] L. Schwartz, *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications*, Séminaire, Paris 1953/54.

[28] H. Triebel, *Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev-Besov-Räumen*, Inventiones Math. 4 (1967), S. 275-293.