STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVIII. (1970)
Colloquium on
Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras

Über analytische Operatorfunktionen und Indexberechnung

von

BERNHARD GRAMSCH (Mainz)

Sei $\mathscr{L}(X, Y)$ die Menge der stetigen linearen Abbildungen des Banachraumes X in den Banachraum Y. Für eine Abbildung $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ bezeichnen wir mit $N(T)$ den Nullraum und mit $R(T)$ den Bildraum. T heißt *Fredholmoperator*, wenn $\dim N(T) < \infty$ und $\operatorname{codim} R(T) < \infty$. $\varphi(X, Y)$ sei die Menge der Fredholmoperatoren aus $\mathscr{L}(X, Y)$.

1. Theorem. *Sei $T(z)$ eine analytische Operatorfunktion auf dem Gebiet $G \subset C^N$ mit Werten in der Menge der Fredholmoperatoren $\varphi(X, Y)$. Ferner sei $T(z)$ an einer Stelle $z' \in G$ invertierbar. Dann ist $T^{-1}(z)$ eine auf G meromorphe Funktion $(T(z)T^{-1}(z) = I_Y, T^{-1}(z)T(z) = I_X)$. Im Falle einer komplexen Variablen hat $T^{-1}(z)$ als Hauptteile Operatoren von endlichem Rang; d. h. für jedes $z_0 \in G$ existiert eine Laurententwicklung*

$$T^{-1}(z) = \sum_{k > k_0(z_0) > -\infty} T_k (z - z_0)^k,$$

wobei $\dim R(T_k) < \infty$ *für* $k < 0$.

Die ersten Untersuchungen in dieser Richtung gehen auf Tamarkin [10] für den Fall von Integralgleichungen zurück. Daran schließen sich Arbeiten von Atkinson [1] Gohberg und Sz. Nagy und P. H. Müller an (vgl. [6] und [8]). Der klassische Satz von F. Riesz, daß $(I - zK)^{-1}$ für einen kompakten Operator K eine auf der komplexen Ebene im obigen Sinne meromorphe Funktion ist, wurde in einer Reihe von Arbeiten von Ruston, Pietsch und Taylor bei linearer Abhängigkeit $(T(z) = I - zA \in \varphi(X, X)$ auf einem Gebiet $G)$ verallgemeinert. Im letzten Jahr wurden von Haf, Steinberg, Ribaric und Vidav [8] und dem Verfasser [4] weitere Fortschritte erzielt. Mit den Methoden von [4] und einer Idee in [8] gelang es dann Theorem 1 zu beweisen (vgl. [5]).

Theorem 1 läßt sich auf analytische Familien vom Typ A (Kato [7], ch. 7, p. 379) anwenden. Dies sind abgeschlossene Operatoren, die analytisch von einem Parameter abhängen und einen gemeinsamen Definitionsbereich haben. Insbesondere bezieht sich Theorem 1 auf elliptische Differentialoperatoren, die analytisch von Parametern abhängen, denn bei geeigneter Randbedingung handelt es sich dabei um Fredholmoperatoren.

Wir sagen ein Operator $A \in \mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X, X)$ erfüllt beide Kettenbedingungen, wenn sowohl die Nullraumkette $N(A^j)$ als auch die Bildraumkette $R(A^j)$ stabil werden. Mit φ^R (Fredholm-Riesz) bezeichnen wir die Menge der Fredholmoperatoren aus $\mathscr{L}(X)$ mit beiden Kettenbedingungen.

2. Theorem. *Sei $T(z)$ eine kommutative $(T(z_1)T(z_2) = T(z_2)T(z_1))$ analytische Operatorfunktion auf dem Gebiet $G \subset \boldsymbol{C}^N$, die Werte in der Menge $\varphi(X)$ der Fredholmoperatoren von $\mathscr{L}(X)$ habe; ferner existiere $T^{-1}(z')$ für ein $z' \in G$. Dann gilt $T(z) \in \varphi^R$ für alle $z \in G$.*

Es ist sehr einfach, die Meromorphie von $T^{-1}(z)$ aus Theorem 2 herzuleiten. Ohne die Annahme der Kommutativität ist Theorem 2 im allgemeinen falsch.

Um Theorem 2 zu beweisen, benützt man die Tatsache, daß ein Operator $T \in \mathscr{L}(X)$ genau dann in φ^R-liegt, wenn ein $A \in \mathscr{L}(X)$ existiert mit $AT = TA = I - K$, wobei K ein kompakter Operator ist. Daraus folgt unmittelbar

3. Lemma. *Sei $\mathscr{M}$ eine maximale kommutative Teilalgebra der Banachalgebra $\mathscr{L}(X)$ und $\mathscr{K}$ das abgeschlossene zweiseitige Ideal der kompakten Operatoren; ferner sei $q_{\mathscr{M}}\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}/\mathscr{M} \cap \mathscr{K}$ der kanonische Homomorphismus. Dann gilt*

$$\varphi^R \cap \mathscr{M} = q_{\mathscr{M}}^{-1}\big(\mathscr{G}(\mathscr{M}/\mathscr{M} \cap \mathscr{K})\big),$$

wenn $\mathscr{G}(\mathscr{M}/\mathscr{M} \cap \mathscr{K})$ die Gruppe der invertierbaren Elemente der Banachalgebra $\mathscr{M}/\mathscr{M} \cap \mathscr{K}$ ist.

Dies entspricht der Charakterisierung von Atkinson für Fredholmoperatoren. Daraus gewinnt man sofort einen Spektralabbildungssatz. Für $\sigma_R(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \colon \lambda I - T \notin \varphi^R\}$ ($\sigma(T)$ sei das Spektrum von T) gilt $\sigma_R(f(T)) = f(\sigma_R(T))$, wenn f eine auf dem Spektrum von T lokalholomorphe Funktion ist. Eine entsprechende Aussage gewinnt man ebenso für lokalholomorphe Funktionen f auf dem gemeinsamen Spektrum $\sigma(T_1, \ldots, T_n)$ kommutierender Operatoren T_j: $f(T_1, \ldots, T_n)$ ist genau dann ein Element von φ^R, wenn f auf $\sigma(q_{\mathscr{M}}(T), \ldots, q_{\mathscr{M}}(T))$ keine Nullstelle hat (vgl. [2] und [3]).

4. Bemerkung. *Die Menge $\mathscr{M}(G, \varphi)$ der auf einem Gebiet $G \subset \boldsymbol{C}$ meromorphen Funktionen mit Werten in $\varphi(x)$, die jeweils an einer Stelle von G invertierbar sind und lokale Laurententwicklungen wie in Theorem 1 haben ($T_0 \in \varphi$), bilden eine multiplikative Gruppe, d. h. die Inversenbildung führt aus dieser Klasse nicht heraus.*

Wir gehen nun zur Berechnung des Index von Fredholmoperatoren über: $\operatorname{ind} T = \dim N(T) - \operatorname{codim} R(T)$.

5. Bemerkung. *Für Fredholmoperatoren auf Hilberträumen gilt*

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} T &= \operatorname{Spur}\big[\lim_{\lambda \to 0} \lambda\big((\lambda I - T^*T)^{-1} - (\lambda I - TT^*)^{-1}\big)\big] \\ &= \operatorname{Spur}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \big((\lambda I - T^*T)^{-1} - (\lambda I - TT^*)^{-1}\big)\, d\lambda\Big],\end{aligned}$$

wobei der Grenzwert $\lambda \to 0$ in der Normtopologie von $\mathscr{L}(H)$ existiert und γ ein genügend kleiner Kreis um den Nullpunkt ist.

(Die Spur eines Operators A der Spurklasse ist $\sum_k (Ae_k, e_k)$ für ein vollständiges Orthonormalsystem $\{e_k\}$ des Hibertraumes H.)

Wir untersuchen nun den Index von Fredholmoperatoren in Verbindung mit einem Funktionalkalkül ψ, das heißt ψ sei ein Homomorphismus einer Funktionenalgebra $\mathscr{F}(\Omega)$ in $\mathscr{L}(X)$ bzw. in eine Banachalgebra $\mathscr{L}$ mit $\psi(1) = I$. Man betrachte z.B. den analytischen Funktionalkalkül von Gelfand und Dunford oder den Kalkül von Schilow-Arens-Waelbroeck (vgl. [2]). Der Index von Fredholmoperatoren ist invariant modulo dem Ideal $\mathscr{K}$ der kompakten Operatoren von $\mathscr{L}(X)$; nach der Charakterisierung von Atkinson kann man ihn deshalb über die Gruppe Γ der invertierbaren Elemente von $\mathscr{L}/\mathscr{K}$ faktorisieren: $\operatorname{ind} = q \cdot \hat{\mathfrak{i}}$, dabei ist $q\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}/\mathscr{K}$ der kanonische Homomorphismus und $\hat{\mathfrak{i}}\colon \Gamma \to \mathfrak{Z}$ der vom Index induzierte Homomorphismus in die ganzen Zahlen.

6. Bemerkung. *Sei $\mathfrak{i}\colon \Gamma \to \mathfrak{Z}$ ein Homomorphismus der Gruppe Γ der invertierbaren Elemente einer Banachalgebra $\mathscr{B}$ in (auf) eine Gruppe $\mathfrak{Z}$, wobei für kein vom Einselement in $\mathfrak{Z}$ verschiedenes Element a zu jeder natürlichen Zahl n eine n-te Wurzel a existiert, d.h. $a_n^n = a$ bzw. für eine abelsche Gruppe $\mathfrak{Z}$ $na = a$ (freie abelsche Gruppen haben diese Eigenschaft). Dann ist der Homomorphismus $\mathfrak{i}$ auf jeder Zusammenhangskomponente von Γ konstant.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{i}(x)$ auf einer Umgebung des Einselementes von Γ gleich dem Einselement von $\mathfrak{Z}$ ist. Für $\|x - e\| < 1$ existiert ein $y \in \mathscr{B}$ mit $x = \exp y$, folglich wäre $\big(\mathfrak{i}(\exp(y/n))\big)^n = \mathfrak{i}(x)$ für jede natürliche Zahl n, womit sich ergibt, daß $\mathfrak{i}(x)$ das Einselement von $\mathfrak{Z}$ sein muß.

Da man den üblichen Index für Fredholmoperatoren über die Gruppe Γ der Restklassenalgebra $\mathfrak{Z}/\mathscr{K}$ faktorisieren kann, setzen wir im folgenden voraus, daß $\mathfrak{i}$ ein lokalkonstanter Homomophismus der Gruppe Γ der invertierbaren Elemente einer Banachalgebra $\mathscr{B}$ mit Einselement e in (auf) eine Gruppe $\mathfrak{Z}$ ist. Ferner sei $\mathscr{F}(\Omega)$ eine Banachalgebra stetiger Funktionen auf dem kompakten Raum Ω (nicht notwendig Sup-Norm-Algebra) und $\psi:\mathscr{F}(\Omega)\to\mathscr{B}$ ein stetiger Homomorphismus mit $\psi(1)=e$; außerdem sei $\mathscr{G}(\mathscr{F})$ die Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathscr{F}(\Omega)$. Wir erhalten dann eine Folge von Homomorphismen ($\mathfrak{i}=\hat{\mathfrak{i}}\cdot\pi$)

$$\mathscr{G}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\psi} \Gamma \xrightarrow{\pi} \pi_0(\Gamma) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{i}}} \mathfrak{Z},$$

wobei $\pi_0(\Gamma)$ die Gruppe der Zusammenhangskomponenten von Γ ist.

Mit Hilfe eines tiefliegenden Ergebnisses von Arens und Royden ([9], S. 290-295) ergibt sich eine Möglichkeit, den Index $i(\psi(f))$ für $f\in\mathscr{G}(\mathscr{F})$ zu berechnen.

7. Lemma. *Ist $f\in\mathscr{G}(\mathscr{F})$ und $\log f\in\mathscr{F}(\Omega)$ (d.h. insbesondere eindeutig), dann gilt $i(\psi(f))=e_{\mathfrak{Z}}(=0$ falls $\mathfrak{Z}$ eine additive Gruppe).*

Die Idee des folgenden Ergebnisses geht auf eine einfache Formel zur Indexberechnung in [2], § 8, zurück.

8. Theorem. *Für den Raum Λ der maximalen Ideale von $\mathscr{F}(\Omega)$ gelte $\Lambda=\Omega$. Ferner seien $a_1,\ldots,a_n$ kommutierende Elemente der Banachalgebra $\mathscr{B}$ mit dem gemeinsamen Spektrum $\sigma(a_1,\ldots,a_n)$, das in der rational konvexen Menge $\Omega\subset C^n$* (vgl. [2], S. 336) *enthalten sei. Wenn $\psi:\mathscr{F}(\Omega)\to\mathscr{B}$ eine Fortsetzung des Kalküls von Waelbroeck* (vgl. [2]) *ist, d.h. für die Koordinatenfunktionen z_j gilt $\psi(z_j)=a_j$, dann gibt es zu jeder Funktion $f\in\mathscr{G}(\mathscr{F})$ endlich viele Primpolynome p_k und ganze Zahlen α_k, so daß*

$$\mathfrak{i}(\psi(f))=\prod_k \mathfrak{i}(p_k(a_1,\ldots,a_n))^{\alpha_k}$$

erfüllt ist; bzw.

$$\mathfrak{i}(\psi(f))=\sum_k \alpha_k i(p_k(a_1,\ldots,a_n))$$

falls $\mathfrak{Z}$ eine additive Gruppe ist.

Durch eine geeignete Anwendung des Satzes von Arens und Royden [2], S. 290-295, ergibt sich, daß in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathscr{G}(\mathscr{F})$ wenigstens eine rationale Funktion liegt, auf die man dann Primfaktorzerlegung anwenden kann.

Da jede kompakte Teilmenge der komplexen Ebene rational konvex ist und für $n=1$ die Primpolynome über C die Gestalt $(z-c)$ haben, läßt sich in diesem Fall eine sehr einfache Formel angeben. Mit $\varrho(a)$ bezeichnen wir das Komplement des Spektrums $\sigma(a)$. Sei

$$\varrho_h(a)=\{\lambda\in\varrho(a): i(\lambda e-a)=h\in\mathfrak{Z}\}$$

dann gilt für eine rationale Funktion $r\in\mathscr{G}(\mathscr{F})$

$$i(\psi(r))=\prod h^{\alpha_h}\left(=\sum \alpha_h h\right)$$

wenn α_h die Anzahl der Nullstellen bzw. Pole von r in $\varrho_h(a)$ ist.

Dies folgt unmittelbar aus

$$r=\frac{\prod(z-u_i)^{\beta_j}}{\prod(z-v_k)^{\gamma_k}}$$

wenn man bei Anwendung von ψ die Variable z durch a ersetzt (vgl. [2], § 8).

Literaturnachweis

[1] F. V. Atkinson, *A spectral problem for completely continuous operators*, Acta Math. Hung. 3 (1952), S. 53-60.

[2] B. Gramsch, *Funktionalkalkül mehrerer Veränderlichen in lokalbeschränkten Algebren*, Math. Ann. 174 (1967), S. 311-344.

[3] — *Spektraleigenschaften analytischer Operatorfunktionen*, Math. Zeitschrift 101 (1967), S. 165-181.

[4] — *Über analytische Störungen und den Index von Fredholmoperatoren auf Banachräumen*, Dept. Math., Univ. of Maryland TR 69/105 (1969), S. 1-55.

[5] — *Meromorphie in der Theorie der Fredholmoperatoren mit Anwendungen auf elliptische Differentialoperatoren* Math. Annalen 188 (1970), S. 97-112.

[6] S. Hildebrandt, *Über die Lösung nichtlinearer Eigenwertaufgaben mit dem Galerkinverfahren*, Math. Zeitschrift 101 (1967), S. 255-264.

[7] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Heidelberg 1966.

[8] M. Ribaric, I. Vidav, *Analytic properties of the inverse $A^{-1}(z)$ of an analytic operator-valued function $A(z)$*, Arch. Rat. Mech. Analysis 32 (1969), S. 298-310.

[9] H. L. Royden, *Function algebras*, Bull. Am. Math. Soc. 69 (1963), S. 281-298.

[10] J. D. Tamarkin, *On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parameter*, Annals of Math. 28 (1927), S. 127-152.