(a) $Q$ a $C^*$-algebra; (b) the map $R_T \to C(\mathrm{Epi}_C(R_T, Q), Q)$ one-to-one; (c) $R_T \overset{*}{\simeq} C_b(X, A)$ for some (compact) topological space $X$?

3. If $Q$ is a simple singly-generated $C^*$-algebra, is there an $n$ such that $Q = M_n$?

4. If $Q$ is a $C^*$-algebra and $C(X_1, Q) \overset{*}{\simeq} C(X_2, Q)$, where $X_1$ and $X_2$ are compact Hausdorff, are $X_1$ and $X_2$ homeomorphic?

5. Are $C_b(X, A)$ and $C(\beta(X), A)$ isomorphic? (Here $\beta(X)$ is the Čech compactification of the completely regular space $X$.)

If the answers to 2 and 3 are affirmative, then the suggested generalization of a normal operator may be studied in the context of [1].

### References


[1] A. Brown, *The unitary equivalence of binormal operators*, Amer. J. Math. 76 (1954), p. 414-434.

[2] B. Gelbaum, *Banach algebra bundles*, Pac. J. Math. 28.2 (1969)., p. 337-349.

[3] — *Q-uniform Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 76 (1970), p. 344-353.

[4] L. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, New York 1953.

[5] M. Naimark, *Normed rings*, Groningen 1964.

[6] C. Rickart, *General theory of Banach algebras*, New York 1960.


UNIVERSITY OF CALIFORNIA, IRVINE

---

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVIII. (1970)

Colloquium on
Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras

## Nukleare Funktionenräume und singuläre elliptische Differentialoperatoren

von

HANS TRIEBEL (Jena)

Grothendieck hat die Frage aufgeworfen, ob jeder nukleare $(F)$-Raum eine Basis besitzt [6]. Dieses Problem ist zur Zeit ungelöst. Damit ist es von Interesse, für spezielle nukleare $(F)$-Räume die Existenz einer Basis nachzuweisen. Wie Mitjagin zeigen konnte [13], ist jede Basis eines nuklearen $(F)$-Raumes absolut. Neben der Frage nach der Existenz absoluter Basen in nuklearen $(F)$-Räumen ist die Isomorphie spezieller nuklearer $(F)$-Räume untereinander von Interesse. Wie T. und Y. Komura beweisen konnten [11] ist jeder nukleare Raum isomorph zu einem Teilraum des Tychonovproduktes $(s)^A$. Dabei ist $A$ eine passende Indexmenge. $s$ ist der Raum der schnell fallenden Folgen, also

$$s = \{\xi = (\xi_j)_{j=1,2,\ldots},\ \xi_j \text{ komplex},\ \sup_{j=1,2,\ldots} |\xi_j| j^k < \infty \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

mit der üblichen Topologie. Ist der nukleare Raum ein $(F)$-Raum, so kann man $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ setzen. Das folgt unmittelbar aus den Beweisen der Arbeit von T. und Y. Komura [11]. Für konkrete Räume dieser Art ist somit die explizite Bestimmung eines isomorphen Teilraumes von $(s)^A$ von Interesse. Sämtliche in dieser Arbeit untersuchten Räume sind isomorph zu $s$. Damit ist zugleich die Frage nach der Existenz absoluter Basen in den hier betrachteten Räumen positiv beantwortet.

Im Mittelpunkt der Arbeit stehen nukleare Funktionenräume und ihre Beziehungen zu singulären elliptischen Differentialoperatoren in Hilberträumen. Die Verwendung von Hilberträumen scheint zumindest plausibel zu sein, wenn man berücksichtigt, daß die Topologie eines nuklearen Raumes durch Hilberthalbnormen erzeugt werden kann [18], S. 71. Die Benutzung eines selbstadjungierten Operators $A$ in einem Hilbertraum zur Konstruktion des lokalkonvexen Raumes

$$D(A^\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$$

mit den Halbnormen $\|A^n f\|$, $n = 1, 2, \ldots$, geht auf Mitjagin [13] und Pietsch [19] zurück. Pietsch hat Kriterien für die Nuklearität und für die Isomorphie von Räumen, die auf diesem Wege gewonnen wurden, angegeben. Wir gehen hierauf im Punkt 2 genauer ein. Durch Betrachtung singulärer elliptischer Differentialoperatoren $A$ im Hilbertraum $L_2(\Omega)$ hat der Verfasser in [20]-[22] die Existenz absoluter Basen und die Isomorphie spezieller nuklearer Funktionenräume zum Raum $s$ nachgewiesen. Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenfassung, Vereinheitlichung und zum Teil wesentliche Erweiterung dieser Resultate. Ferner werden die Ergebnisse anderer Autoren kurz dargestellt, soweit sie den hier behandelten Gegenstand unmittelbar berühern ([13], [19], [7], [2], [3], [28]).

Die Arbeit gliedert sich in 6 Abschnitte. Der erste Abschnitt enthält die Definition der $(F)$-Räume $S_{q(x)}(\Omega)$, $C_{px}(\Omega)$ und $C^{k,m}_{p(x)}(\Omega)$. Im zweiten Abschnitt werden die Grundlagen der hier verwendeten Methode beschrieben und der eindimensionale Fall behandelt. In den folgenden drei Abschnitte untersuchen wir die Räume $S_{q(x)}(\Omega)$, $C_{p(x)}(\Omega)$ und $C^{k,m}_{p(x)}(\Omega)$. Im letzten Abschnitt sind einige Probleme zusammengestellt, die im Laufe der Betrachtungen aufgetreten sind. Auf ausführliche Beweise muß hier verzichtet werden. An den entsprechenden Stellen werden jedoch die entscheidenden Motive beschrieben und Beweisgedanken skizziert. Das trifft besonders auf die Sätze zu, die wesentlich über die bisher publizierten Ergebnisse hinausgehen.

**1. $(F)$-Räume von Funktionen.** $\Omega$ sei ein (beschränktes oder unbeschränktes) offenes zusammenhängendes Gebiet im $n$-dimensionalen reellen euklidischen Raum $R_n$. Sein Rand wird mit $\partial\Omega$ bezeichnet.

Definition 1. *$q(x)$ sei eine im Gebiet $\Omega \subset R_n$ erklärte, reelle, beliebig oft differenzierbare Funktion mit $q(x) \geqslant 1$, die folgenden Bedingungen genügt:*

*1. Es gibt eine Zahl $\sigma$ mit $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ und positive Zahlen $C_\gamma$, so daß für alle Multiindizes $\gamma$*

(1) $$|D^\gamma q(x)| \leqslant C_\gamma q^{1+\sigma|\gamma|}(x), \qquad x \in \Omega,$$

*gilt.*

*2. Ist $d(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x-y|$ der Abstand eines Punktes $x$ zum Rand $\partial\Omega$, so gibt es eine positive Zahl $C$ mit*

(2) $$q(x)\, d^2(x) \geqslant C, \qquad x \in \Omega.$$

*(Ist $\Omega = R_n$, so entfällt diese Bedingung).*

*3. Es existiert eine positive Zahl $a$, so daß*

(3) $$q^{-a}(x) \in L_1(\Omega)$$



*gilt. (Ist das Gebiet $\Omega$ beschränkt, so ist diese Bedingung für jede positive Zahl $a$ erfüllt.)*

*Dann ist*

*$S_{q(x)}(\Omega) = \{f \,|\, f(x)$ beliebig oft differenzierbar im Gebiet $\Omega$ und komplexwertig, $\|f\|_{l,\gamma} = \sup_{x \in \Omega} q^l(x)\, |D^\gamma f(x)| < \infty$ für $l = 0, 1, 2, \ldots$ und für alle Multiindizes $\gamma\}$.*

Man sieht sofort, daß $S_{q(x)}(\Omega)$ ein $(F)$-Raum ist, sofern man die Topologie aus den Halbnormen $\|\cdot\|_{l,\gamma}$ erzeugt.

Wir wollen einige Beispiele angeben.

Beispiel 1. Es sei $\Omega = R_n$ und $q(x) = 1 + |x|^2$. Die Bedingungen (1) und (3) sind erfüllt. Man erhält den Schwartzschen $(F)$-Raum $S(R_n)$ der schnell fallenden Funktionen,

(4) $S(R_n) = \{f \,|\, f(x)$ beliebig oft differenzierbar im Raum $R_n$, $\sup_{x \in R_n} |x|^k |D^\gamma f(x)| < \infty$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und für alle Multiindizes $\gamma\}$.

Beispiel 2. $\Omega \subset R_n$ sei ein beschränktes Gebiet. Dann setzen wir

(5) $C_0^\infty(\Omega, \partial\Omega) = \{f \,|\, f(x)$ beliebig oft differenzierbar in $\overline{\Omega}$, $D^\gamma f(y) = 0$ für alle $y \in \partial\Omega$ und für alle Multiindizes $\gamma\}$.

Eine Funktion $f(x)$ nennt man in $\overline{\Omega}$ beliebig oft differenzierbar, wenn sie im Gebiet $\Omega$ beliebig oft differenzierbar ist und sämtliche Ableitungen stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können. Mit den Halbnormen

(6) $$\|f\|_\gamma = \sup_{x \in \Omega} |D^\gamma f(x)|$$

wird $C_0^\infty(\Omega, \partial\Omega)$ zu einem $(F)$-Raum.

Wir erinnern daran, daß ein Gebiet $\Omega$ zur Klasse $C^\infty$ gehört, wenn man in jedem Randpunkt $y \in \partial\Omega$ ein euklidisches Koordinatensystem $y_1, \ldots, y_n$ mit $y$ als Ursprung angeben kann, so daß man in einer Umgebung des Punktes $y$ die Fläche $\partial\Omega$ in der Form

(7) $$y_n = \varphi(y_1, \ldots, y_{n-1}), \qquad \varphi(0, 0, \ldots, 0) = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}(0, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n-1,$$

darstellen kann, wobei $\varphi(y_1, \ldots, y_{n-1})$ beliebig oft differenzierbar ist. Diese Definition ist nicht daran gebunden, daß $\Omega$ beschränkt ist. Man kommt in jedem Fall mit höchstens abzählbar unendlich vielen derartigen lokalen Koordinatenumgebungen aus, um den gesamten Rand $\partial\Omega$ auf diese Weise darzustellen. Ist $\Omega$ beschränkt, so genügen bereits endlich viele lokale Koordinatensysteme.

Ist $\Omega$ ein Gebiet der Klasse $C^\infty$, so ist die Zuordnung zwischen $\Omega$ und $\overline{\Omega}$ eineindeutig. Ist das Gebiet außerdem beschränkt, so können wir also wie üblich $C_0^\infty(\Omega, \partial\Omega) = C_0^\infty(\overline{\Omega}^\infty)$ schreiben. In diesem Fall gibt es eine Funktion $q(x)$, die den Voraussetzungen (1) und (2) und der Bedingung

(8) $$q(x) = \alpha^{-\alpha}(x), \qquad \alpha > 2,$$

in einer Umgebung von $\partial\Omega$, genügt. (Die Bedingung (3) ist für beschränkte Gebiete überflüssig). Man prüft nach, daß

$$S_{q(x)}(\Omega) = C_0^\infty(\bar{\Omega}) \tag{9}$$

ist [20], Hilfssatz 1. (Gleichheit zwischen $(F)$-Räumen ist stets mengentheoretisch und topologisch zu verstehen).

Beispiel 3. $\Omega \subset R_n$ sei ein (beschränktes oder unbeschränktes) Gebiet der Klasse $C^\infty$. Dann gibt es abzählbar viele Randpunkte $y_j$, $j = 1, 2, \ldots$, und offene Kugeln $K_j$ mit $y_j$ als Mittelpunkt, so daß $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ ist und $\partial\Omega \cap K_j$ in der Form (7) mit einer Funktion $\varphi_j$ dargestellt werden kann. Wenn man erreichen kann, daß die Radien der Kugeln $K_j$ untereinander gleich sind und $|D^\gamma \varphi_j(y)| \leqslant b_\gamma$ für $j = 1, 2, \ldots$ gilt, so sagt man, daß $\Omega$ *gleichmäßig* zur Klasse $C^\infty$ gehört. Ist das Gebiet $\Omega$ beschränkt, so gehört es genau dann gleichmäßig zur Klasse $C^\infty$, wenn es zur Klasse $C^\infty$ gehört. Die gleichmäßige Zugehörigkeit zur Klasse $C^\infty$ ist also insbesondere für unbeschränkte Gebiete von Interesse. Sie stimmt im wesentlichen mit der von Browder gegebenen Definition überein [4].

Ist $\Omega$ ein beliebiges Gebiet, so setzen wir

(10) $\mathfrak{C}_0^\infty(\Omega, \partial\Omega) = \{f \mid f(x)$ beliebig oft differenzierbar in $\bar{\Omega}$, $D^\gamma f(y) = 0$ für alle $y \in \partial\Omega$ und für alle Multiindizes $\gamma$, $\|f\|_{l,\gamma} = \sup_{x\in\Omega} |x|^l |D^\gamma f(x)| < \infty$, $l = 1, 2, \ldots$, $\gamma$ Multiindex$\}$.

Unter Verwendung der Halbnormen $\|\cdot\|_{l,\gamma}$ wird $\mathfrak{C}_0^\infty(\Omega, \partial\Omega)$ ein $(F)$-Raum. Im Fall $\Omega = R_n$ ist $\mathfrak{C}_0^\infty(R_n, \emptyset) = S(R_n)$. Die Definitionen (5) und (10) sind verträglich, da für beschränkte Gebiete $C_0^\infty(\Omega, \partial\Omega) = \mathfrak{C}_0^\infty(\Omega, \partial\Omega)$ ist. Gehört das Gebiet $\Omega$ gleichmäßig zur Klasse $C^\infty$, so ist die Zuordnung zwischen $\Omega$ und $\bar{\Omega}$ eineindeutig und man kann relativ leicht eine Funktion $q(x)$ konstruieren, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, die Relation (8) erfüllt und für die zwei positive Konstanten $c_1$ und $c_2$ existieren, so daß

$$c_1\big(d^{-a}(x)+1+|x|^2\big) \leqslant q(x) \leqslant c_2\big(d^{-a}(x)+1+|x|^2\big), \qquad x \in \Omega,\ a > 2, \tag{11}$$

gilt. Bildet man mit dieser Funktion $q(x)$ den $(F)$-Raum $S_{q(x)}(\Omega)$, so kann man wie im Hilfssatz 1 aus [20] zeigen, daß (mengentheoretisch und topologisch)

$$S_{q(x)}(\Omega) = \mathfrak{C}_0^\infty(\Omega, \partial\Omega) = \mathfrak{C}_0^\infty(\bar{\Omega}) \tag{12}$$

ist. Zur Definition des Raumes $\mathfrak{C}_0^\infty(\Omega, \partial\Omega)$, Formel (10), muß man allerdings einige kritische Anmerkungen machen. Es ist keineswegs selbstverständlich, die Räume $C_0^\infty(\Omega, \partial\Omega)$ im Rahmen dieser Theorie von beschränkte auf unbeschränkte Gebiete durch den Ansatz (10) auszudehnen. Deshalb haben wir auch $\mathfrak{C}$ statt $C$ geschrieben. Für unsere späteren Untersuchungen wird es sich als bequem herausstellen, den Raum $\mathfrak{C}_0^\infty(\Omega, \partial\Omega)$ zu nehmen. Es ist aber nicht unbedingt natürlich, da die Gewichtsfaktoren $|x|^l$ in den Halbnormen $\|\cdot\|_{l,\gamma}$ keine Rücksicht auf die Art des Gebietes nehmen. Für Gebiete mit endlichem Maß scheint es auch im Rahmen dieser Betrachtungen durchaus zweckmäßig zu sein, $C_0^\infty(\Omega, \partial\Omega)$ direkt durch die Formel (5) zu erklären, wobei man $\sup_{x\in\Omega} |D^\gamma f(x)| < \infty$ für alle Multiindizes $\gamma$ zu verlangen hätte. Es wäre in jedem Falle von Interesse, die Gewichtsfaktoren $|x|^l$ in den Halbnormen $\|\cdot\|_{l,\gamma}$ durch Gewichtsfaktoren zu ersetzen, die der Natur der Gebiete Rechnung tragen, etwa $p^l(x)$, $p(x) \geqslant 1$, $p^{-b}(x) \in L_1(\Omega)$ für eine passende positive Zahl $b$. Wir werden später $\mathfrak{C}_0^\infty(\Omega, \partial\Omega)$ und $\mathfrak{C}_0^\infty(\bar{\Omega})$ stets im obigen Sinne verwenden.



Definition 2. *$p(x)$ sei eine im Gebiet $\Omega$ erklärte, reelle, beliebig oft differenzierbare Funktion mit $p(x) \geqslant 1$. Dann ist*

(13) $C_{p(x)}(\Omega) = \{f \mid f(x)$ *beliebig oft differenzierbar in* $\bar{\Omega}$ *und komplexwertig*, $\|f\|_{l,\gamma} = \sup_{x\in\Omega} p^l(x) |D^\gamma f(x)| < \infty$ *für* $l = 0, 1, 2, \ldots$ *und für alle Multiindizes* $\gamma\}$

$C_{p(x)}(\Omega)$ ist ein $(F)$-Raum, wenn man die Topologie durch die Halbnormen $\|\cdot\|_{l,\gamma}$ erzeugt.

Beispiel 4. Man sieht sofort, daß

$$C_{1+|x|^2}(R_n) = S(R_n)$$

ist.

Beispiel 5. Ist $\Omega$ beschränkt und $p(x) \equiv 1$, so schreiben wir

$$C_{p(x)}(\Omega) = C^\infty(\Omega, \partial\Omega).$$

Da wir in diesem Falle nur Gebiete betrachten, für die die Zuordnung zwischen $\Omega$ und $\bar{\Omega}$ eineindeutig ist ($\Omega$ ist dann die größte offene Menge, die in $\bar{\Omega}$ enthalten ist), so können wir auch wie üblich

$$C_{p(x)}(\Omega) = C^\infty(\bar{\Omega})$$

schreiben.

Ist $\Omega$ ein beschränktes Gebiet mit regulärem Rand ($\Omega$ soll die größte in $\bar{\Omega}$ enthaltene offene Menge sein), so haben wir bisher unter anderem die $(F)$-Räume $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ und $C^\infty(\bar{\Omega})$ erfaßt. Es ist von Interesse, abgeschlossene Teilräume $C(\bar{\Omega})$ von $C^\infty(\bar{\Omega})$ mit

$$C_0^\infty(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega}) \subset C^\infty(\bar{\Omega})$$

zu betrachten. Die Topologie auf $C(\bar{\Omega})$ soll hierbei die gleiche wie auf

$C^\infty(\bar{\Omega})$ sein. Es ist naheliegend, solche Teilräume auszusondern, deren Elemente man durch ihr Verhalten auf dem Rand $\partial\Omega$ kennzeichnen kann. In der Theorie der (koerzitiven) Randwertaufgaben für reguläre elliptische Differentialoperatoren beschreibt man das Randverhalten der Funktionen durch Differentialausdrücke der Form

$$\sum_{|a|\leqslant m} b_a(x) D^a f(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega. \tag{14}$$

Da wir solche Funktionenräume betrachten wollen, die durch elliptische Differentialoperatoren erzeugt werden können, ist es naheliegend, Teilräume $C(\bar{\Omega})$ von $C^\infty(\bar{\Omega})$ zu untersuchen, die durch endlich viele oder abzählbar unendlich viele Relationen der Form (14) beschrieben werden können. Nun ist es aber sehr schwierig (wahrscheinlich unmöglich), beliebig vorgegebene Relationen der Form (14) durch (reguläre oder singuläre) elliptische Differentialoperatoren und deren Iterationen zu realisieren. Darauf weist schon der Umstand hin, daß Randbedingungen elliptischer Differentialoperatoren und ihrer Potenzen gewisse Periodizitätseigenschaften aufweisen. Es zeigt sich aber, daß man spezielle Räume der beschriebenen Art mit Hilfe von Differentialoperatoren erfassen kann.

Definition 3. *$\Omega \subset R_n$ sei ein (beschränktes oder unbeschränktes) Gebiet der Klasse $C^\infty$. $p(x)$ sei eine im Gebiet $\Omega$ erklärte, reelle, beliebig oft differenzierbare Funktion mit $p(x) \geqslant 1$. $k$ und $m$ seien ganze Zahlen mit $0 \leqslant k \leqslant m$ und $m \geqslant 1$. Dann ist*

$$C^{k,m}_{p(x)}(\Omega) = \{f \mid f(x) \in C_{p(x)}(\Omega),\ \partial^{rm+s} f(y)/\partial\nu^{rm+s} = 0 \text{ für } y \in \partial\Omega,\quad r = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } s = 0, \ldots, k-1\}. \tag{15}$$

*$\nu = \nu_y$ ist hierbei die äußere Normale im Punkt $y \in \partial\Omega$ (Ist $k = 0$, so ist $C^{0,m}_{p(x)}(\Omega) = C_{p(x)}(\Omega)$ zu setzen).*

Wählen wir auf $C^{k,m}_{p(x)}(\Omega)$ die gleiche Topologie wie auf $C_{p(x)}(\Omega)$ (was in Zukunft stets der Fall sein soll), so ist $C^{k,m}_{p(x)}(\Omega)$ ein $(F)$-Raum. Ist $\Omega$ beschränkt und $p(x) \equiv 1$, so schreiben wir

$$C^{k,m}_{p(x)}(\Omega) = C^{\infty,k,m}(\bar{\Omega}).$$

In diesem Fall ist

$$C_0^\infty(\bar{\Omega}) \subset C^{\infty,k,m}(\bar{\Omega}) \subset C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Man sieht sofort, daß

$$C^{\infty,m,m}(\bar{\Omega}) = C_0^\infty(\bar{\Omega}) \quad \text{und} \quad C^{\infty,0,m}(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$$

gilt. Das Randverhalten der Funktionen aus $C^{k,m}_{p(x)}(\Omega)$ ist periodisch.



**2. Die Erzeugung von $(F)$-Räumen, deren Elemente Funktionen sind, durch selbstadjungierte Operatoren.** In diesem Abschnitt sollen die Grundlagen und die Methoden geschildert werden, die zur Erzeugung von $(F)$-Räumen von Funktionen führen.

$H$ sei ein komplexer separabler Hilbertraum und $B$ sei ein positiv-definiter selbstadjungierter Operator. Sind $B^l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, die $l$-ten Potenzen von $B$ und $D(B^l)$ die zugehörigen Definitionsgebiete, so wird

$$D(B^\infty) = \bigcap_{l=0}^{\infty} D(B^l)$$

zu einem $(F)$-Raum, sofern man die Topologie auf $D(B^\infty)$ durch die Normen $\|B^l u\|$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, erzeugt. Pietsch hat in [19] derartige Räume untersucht. Wir erinnern daran, daß ein selbstadjungierter Operator $B$ ein Operator mit *reinem Punktspektrum* genannt wird, wenn sein Spektrum nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht. (Daraus folgt sofort, daß sich die Eigenwerte im Endlichen nirgends häufen können). Ein $(F)$-Raum heißt ein *Montelraum*, wenn jede beschränkte Menge präkompakt ist.

Lemma 1 [19]. *$B$ sei ein positiv-definiter Operator im Hilbertraum $H$.*

(a) *$D(B^\infty)$ ist genau dann ein Montelraum, wenn $B$ ein Operator mit reinem Punktspektrum ist.*

(b) *$D(B^\infty)$ ist genau dann ein nuklearer $(F)$-Raum, wenn $B$ ein Operator mit reinem Punktspektrum (mit den Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_j \leqslant \ldots \to \infty$ und den zugehörigen orthonormierten Eigenelementen $u_1, u_2, \ldots$) ist und eine positive Zahl $\varrho$ existiert, so daß*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-\varrho} < \infty \tag{16}$$

*gilt. Die Eigenelemente $\{u_j\}_{j=1,2,\ldots}$ bilden eine absolute Basis in $D(B^\infty)$.*

Einen Beweis dieses Lemmas findet man in [19]. Der Teil (a) steht in sehr enger Beziehung zu dem Kriterium von Rellich, wonach ein selbstadjungierter Operator $B$ im Hilbertraum $H$ genau dann ein reines Punktspektrum besitzt, wenn die Einbettung von $D(B)$ (mit der Norm $(\|Bu\|^2 + \|u\|^2)^{1/2}$) in $H$ kompakt ist. Der Beweisgedanke des Teils (b) besteht darin, daß man durch die Zuordnung $u_j \to e_j = (0, 0, \ldots, 0, \underset{j}{1}, 0, \ldots)$ einen Isomorphismus zwischen $D(B^\infty)$ und dem Folgenraum

$$\Big\{\xi \mid \xi = (\xi_j)_{j=1,2,\ldots},\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2l} |\xi_j|^2 < \infty,\ l = 0, 1, 2, \ldots\Big\} \tag{17}$$

herstellt.

LEMMA 2. *$B$ sei ein positiv-definiter Operator mit reinem Punktspektrum. $D(B^\infty)$ ist genau dann isomorph zum Raum $s$ der schnell fallenden Folgen, wenn positive Zahlen $c_1, c_2, \tau_1$ und $\tau_2$ existieren, so daß für die Eigenwerte $\lambda_j$ die Abschätzung*

$$c_1 j^{\tau_1} \leqslant \lambda_j \leqslant c_2 j^{\tau_2}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

*gilt.*

Man beweist dieses Lemma, indem man berücksichtigt, daß $D(B^\infty)$ isomorph zum Folgenraum (17) ist. Im übrigen sind die Formel (16) und die Abschätzung $c_1 j^{\tau_1} \leqslant \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$, äquivalent (aus der Existenz einer Zahl $\varrho$, so daß die Formel (16) gilt, folgt die Existenz einer Zahl $\tau_1$ und umgekehrt). Das ergibt sich aus

$$\lambda_j^{-\varrho} j \leqslant \sum_{k=1}^{j} \lambda_k^{-\varrho} \leqslant C < \infty \text{ unabhängig von } j.$$

Wir formulieren noch eine Variante des Lemmas 2.

LEMMA 2′. *$B$ sei ein positiv-definiter Operator mit reinem Punktspektrum. $D(B^\infty)$ ist genau dann isomorph zum Raum $s$, wenn positive Zahlen $c_1, c_2, \tau_1$ und $\tau_2$ existieren, so daß*

$$c_1 \lambda^{\tau_1} \leqslant N(\lambda) \leqslant c_2 \lambda^{\tau_2}, \quad \lambda \geqslant \lambda_1 > 0, \tag{19}$$

*gilt. Hierbei ist $N(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} 1$ die Anzahl der Eigenwerte des Operators $B$ (unter Berücksichtigung der Vielfachheiten), die kleiner als $\lambda$ sind.*

Man hat lediglich die Äquivalenz der Bedingungen (18) und (19) nachzuprüfen. Sie ergibt sich aus

$$N(\lambda_j) = j - 1.$$

Wir weisen schließlich noch darauf hin, daß in den Arbeiten von Mitjagin [13], Wojtyński [27] und Guillemot-Teissier [7] ebenfalls Operatoren zur Konstruktion nuklearer $(F)$-Räume, zur Untersuchung von Isomorphiebeziehungen und zum Nachweis der Existenz absoluter Basen benutzt werden. In der Arbeit [7] werden für den konkreten $(F)$-Raum $C^\infty([-1, 1])$ und den Legendreschen Differentialoperator ähnliche Überlegungen wie hier entwickelt.

Auf der Grundlage der Lemmata 1, 2 und 2′ wurden in den Arbeiten [20]-[22] nukleare $(F)$-Räume von Funktionen untersucht. Die beiden Arbeiten von Baouendi und Goulaouic [2], [3] stützen sich ebenfalls auf derartige Überlegungen. Wir werden später insbesondere auf diese beiden Arbeiten noch genauer eingehen.

Um die Methoden zu beschreiben, die zur Erzeugung von Funktionenräumen durch elliptische Differentialoperaten führen, beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf den eindimensionalen Fall. Es zeigt sich, daß der Übergang zu mehrdimensionalen Fällen mit einer erheblichen Steigerung des rechnerischen Aufwandes verbunden ist, während die entscheidenden Motive und Beweisgedanken im wesentlichen die gleichen wie im eindimensionalen Fall sind. Wir haben Funktionenräume über beschränkten, halbbeschränkten und unbeschränkten Intervallen zu betrachten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir hierfür die offenen Intervalle $(-1, 1)$, $(0, \infty)$ und $(-\infty, \infty)$ nehmen. Entsprechend den Definitionen des Abschnittes 1 werden wir die $(F)$-Räume $S_{q(x)}\big((-1, 1)\big)$ (insbesondere $C_0^\infty([-1, 1])$), $S_{q(x)}\big((0, \infty)\big)$ (insbesondere $C_0^\infty([0, \infty))$), $S_{q(x)}\big((-\infty, \infty)\big)$ (insbesondere $S(R_1)$), $C_{p(x)}\big((-1, 1)\big)$ (insbesondere $C^\infty([-1, 1])$), $C_{p(x)}\big((0, \infty)\big)$, $C_{p(x)}^{k,m}\big((-1, 1)\big)$ (insbesondere $C^{\infty,k,m}([-1, 1])$) und $C_{p(x)}^{k,m}\big((0, \infty)\big)$ durch Differentialoperatoren erzeugen.

Wir betrachten den positiv-definiten regulären elliptischen Differentialoperator $A$,

$$(Af)(x) = (-1)^m f^{(2m)}(x), \tag{20}$$

$$D(A) = \{f \,|\, f(x) \in C^\infty([-1, 1]), f^{(r)}(-1) = f^{(r)}(1) = 0,\ r = 0, \ldots, m-1\}$$

im Hilbertraum $L_2\big((-1, 1)\big)$. $A$ ist wesentlich selbstadjungiert ($\bar{A}$, der Abschluß von $A$, ist somit selbstadjungiert). Bekanntlich ist

$$D(\bar{A}^k) = \{f \,|\, f(x) \in W_2^{2mk}\big((-1, 1)\big), f^{(2jm+r)}(-1) = f^{(2jm+r)}(1) = 0 \quad \text{für}$$
$$j = 0, 1, \ldots, k-1 \text{ und } r = 0, \ldots, m-1\}.$$

Aus den Sobolevschen Einbettungssätzen folgt dann

$$D(\bar{A}^\infty) = \{f \,|\, f(x) \in C^\infty([-1, 1]), f^{(2jm+r)}(-1) = f^{(2jm+r)}(1) = 0 \quad \text{für}$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } r = 0, \ldots, m-1\} = C^{\infty,m,2m}([-1, 1]).$$

Gleichheiten zwischen $(F)$-Räumen sind hierbei stets topologisch zu verstehen. $\bar{A}$ ist ein Operator mit reinem Punktspektrum, die Eigenwerte genügen einer Abschätzung der Form (18) [16]. Nach Lemma 2 ist somit $C^{\infty,m,2m}([-1, 1])$ isomorph zum Raum $s$, insbesondere besitzt $C^{\infty,m,2m}([-1,1])$ eine absolute Basis. Der einfache Operator aus der Formel (20) erzeugt also den speziellen $(F)$-Raum $C^{\infty,m,2m}([-1, 1])$. Zugleich sieht man aber, daß die regulären Differentialoperatoren nicht sehr geeignet sind, um die oben aufgezählten Räume zu gewinnen. Das trifft in noch stärkerem Maße auf die Funktionenräume über den Intervallen $(0, \infty)$ und $R_1$ zu.

Um den Raum $C_0^\infty([-1, 1])$ zu erzeugen, ist es naheliegend, von singulären Differentialoperatoren auszugehen, die auf $C_0^\infty\big((-1, 1)\big)$ (der Gesamtheit der im Intervall $(-1, 1)$ beliebig oft differenzierbaren finiten Funktionen) wesentlich selbstadjungiert sind. Aus den Resultaten von

Neumark ([16], S. 247 und S. 184) folgt, daß $A$,

$$(Af)(x) = -f''(x) + \frac{C}{(x^2-1)^2} f(x), \qquad D(A) = C_0^\infty\big((-1,1)\big),$$

als Operator im Hilbertraum $L_2\big((-1,1)\big)$ wesentlich selbstadjungiert ist, wenn $C \geqslant \frac{3}{4}$ ist. $\bar{A}$ ist dann ein Operator mit reinem Punktspektrum. Ist $u(x)$ eine Eigenfunktion, so kann man leicht das Lokalverhalten von $u(x)$ an den Stellen $-1$ und $1$ ausrechnen,

$$u(x) = (x \pm 1)^\varrho \big(a + o(1)\big), \qquad a \neq 0,\ \varrho = \tfrac{1}{2} + \sqrt{C + \tfrac{1}{4}}.$$

Die Funktion $u(x)$ gehört nicht zu $C_0^\infty([-1,1])$. Andererseits sieht man aber, daß für $C \to \infty$ auch $\varrho \to \infty$ gilt. Man kann somit hoffen, daß ein Differentialoperator mit einer stärkeren Singularität, etwa $A$,

(21) $$(Af)(x) = -f''(x) + \frac{1}{(x^2-1)^\alpha} f(x), \qquad \alpha > 2, \quad D(A) = C_0^\infty\big((-1,1)\big),$$

das Gewünschte leistet. Setzt man $q(x) = 1/(x^2-1)^\alpha$, so prüft man jetzt sofort die Eigenschaften (1) und (2) nach. Dabei erweist es sich, daß die Eigenschaft (1) zweckmäßig ist, um die Iterationen $\bar{A}^k$ zu bilden und $D(\bar{A}^k)$ zu bestimmen. Durch derartige Überlegungen sind die Bedingungen (1) und (2) entstanden. Sie erweisen sich für unsere Zwecke als ausreichend, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1. *$q(x)$ sei eine Funktion, die den Bedingungen* (1) *und* (2) *im Intervall $\Omega = (-1,1)$ genügt.*

(a) *Der positiv-definite Operator $A$,*

(22) $$(Af)(x) = -f''(x) + q(x)f(x), \qquad D(A) = C_0^\infty\big((-1,1)\big),$$

*ist im Hilbertraum $L_2\big((-1,1)\big)$ wesentlich selbstadjungiert. $D(\bar{A}^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, ist die Vervollständigung von $C_0^\infty\big((-1,1)\big)$ in der Norm*

(23) $$\Big[\int_{-1}^{1} \big(|f^{(2k)}(x)|^2 + q^{2k}(x)|f(x)|^2\big)\, dx\Big]^{1/2}.$$

(b) *$\bar{A}$ ist ein Operator mit reinem Punktspektrum. Es gibt zwei positive Zahlen $a_1$ und $a_2$, so daß für die Eigenwerte $\lambda_j$ des Operators $\bar{A}$*

(24) $$a_1 j^2 \leqslant \lambda_j \leqslant a_2 j^2, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

*gilt.*

(c) *Es ist*

$$D(\bar{A}^\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\bar{A}^k) = S_{q(x)}\big((-1,1)\big).$$



*$S_{q(x)}\big((-1,1)\big)$ ist ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu $s$.*

Einen Beweis des Teils (a) dieses Satzes findet man in [20]. Dabei wurde gezeigt, daß $D(\bar{A}^k)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty\big((-1,1)\big)$ in der Norm

(25) $$\Big[\sum_{s=0}^{2k} \|q^{k-\frac{s}{2}} f^{(s)}\|^2_{L_2((-1,1))}\Big]^{1/2}$$

ist. Müller-Pfeiffer hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Normen (23) und (25) äquivalent sind [14], [15]. Daß $\bar{A}$ ein Operator mit reinem Punktspektrum ist, folgt aus dem bereits erwähnten Kriterium von Rellich und dem Einbettungssatz von Sobolev-Kondrašev. Die Formel (24) erhält man relativ leicht aus dem Variationsprinzip von Courant. Der Teil (c) ergibt sich aus den Sobolevschen Einbettungssätzen und aus dem Lemma 2.

Folgerung 1. *$C_0^\infty([-1,1])$ ist ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu $s$.*

Die Richtigkeit der Folgerung ergibt sich aus dem Satz 1, wenn man $q(x) = 1/(x^2-1)^\alpha$ mit $\alpha > 2$ setzt.

Wir betrachten jetzt die Räume $C^{\infty,k,m}([-1,1])$, $0 \leqslant k \leqslant m$, mit dem wichtigen Spezialfall $C^{\infty,0,m}([-1,1]) = C^\infty([-1,1])$. Wir dürfen $k < m$ voraussetzen, da wir den Raum $C^{\infty,m,m}([-1,1]) = C_0^\infty([-1,1])$ bereits behandelt haben. Wie wir bereits gezeigt haben, kann man die speziellen Räume $C^{\infty,m,2m}([-1,1])$ durch den regulären Differentialoperator (20) erzeugen. Andererseits weiß man, daß der Legendresche Differentialoperator

(26) $$Af = -\big((1-x^2)f'(x)\big)' + f(x), \qquad D(A) = C^\infty([-1,1]),$$

im Hilbertraum $L_2\big((-1,1)\big)$ wesentlich selbstadjungiert ist, da die Legendreschen Polynome

$$P_j(x) = C_j[(x^2-1)^j]^{(j)}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen des Operators $\bar{A}$ im Raum $L_2\big((-1,1)\big)$ bilden. Man darf somit erwarten, daß der Legendresche Operator $\bar{A}$ den Raum $C^\infty([-1,1])$ auf die früher angegebene Weise erzeugt. Auf diese Möglichkeit hat Pietsch aufmerksam gemacht [19]. Aus der bekannten Verteilung der Eigenwerte des Operators $\bar{A}$ mit reinem Punktspektrum und den Lemmata 1 und 2 folgt dann, daß die Legendreschen Polynome eine absolute Basis im Raum $C^\infty([-1,1])$ bilden und $C^\infty([-1,1])$ isomorph zu $s$ ist. Wie wir bereits erwähnten, wurde ein Beweis dieser Behauptung mit ähnlichen Methoden wie hier von Guillemot-Teissier in [7] angegeben. Bereits Mitjagin hat bewiesen, daß die Čebyšev-Polynome

$$T_j(x) = \cos(j \arccos x), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

im Raum $C^\infty([-1,1])$ ein absolute Basis bilden [13], S. 118. Ferner konnte er zeigen, daß $C^\infty([-1,1])$ und $C_0^\infty([-1,1])$ isomorph zu $s$ sind [13], S. 120. Kombiniert man die Überlegungen, die zu den Operatoren (20) und (26) führten, so erscheint der nachfolgende Ansatz plausibel:

Satz 2. *$\varrho(x)$ sei eine Funktion aus $C^\infty([-1,1])$, $\varrho(x) > 0$ für $x \in (-1,1)$. Es mögen drei positive Zahlen $c_{-1}$, $c_1$ und $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, existieren, so daß*

$$\varrho(x) = \begin{cases} c_{-1}(x+1) & \text{für } x \in [-1, -1+\varepsilon], \\ c_1(1-x) & \text{für } x \in [1-\varepsilon, 1] \end{cases} \tag{27}$$

*gilt.*

(a) *Ist $t$ eine natürliche Zahl und $r$ eine ganze Zahl mit $-\infty < r \leqslant t$, so ist der positiv-definite Operator $A$,*

$$\begin{aligned} (Af)(x) &= (-1)^t\big(\varrho^r(x) f^{(t)}(x)\big)^{(t)} + f(x), \\ D(A) &= \{f \mid f \in C^\infty([-1,1]), f^{(j)}(-1) = f^{(j)}(1) = 0 \\ &\qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots, t-r-1\}, \end{aligned} \tag{28}$$

*im Hilbertraum $L_2\big((-1,1)\big)$ wesentlich selbstadjungiert. Für $0 \leqslant r \leqslant t$ ist $D(\bar{A}^k)$ die Vervollständigung von*

$$\{f \mid f \in C^\infty([-1,1]), f^{(2t-r)i+j}(-1) = f^{(2t-r)i+j}(1) = 0 \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, k-1 \text{ und } j = 0, 1, \ldots, t-r-1\} \tag{29}$$

*in der Norm*

$$\Big[\int_{-1}^{1} \big(\varrho^{2kr}(x) |f^{(2kt)}(x)|^2 + |f(x)|^2\big)\, dx\Big]^{1/2}. \tag{30}$$

*Ist $r < 0$, so ist $D(\bar{A}^k) \subset W_2^{2kt}\big((-1,1)\big)$ und die Menge (29) ist dicht in $D(\bar{A}^k)$, $k = 1, 2, \ldots$*

(b) *$\bar{A}$ ist ein Operator mit reinem Punktspektrum. Es gibt zwei positive Konstanten $a_1 = a_1(r,t)$ und $a_2 = a_2(r,t)$, so daß für die Eigenwerte $\lambda_j$ des Operators $\bar{A}$*

$$a_1 j^{2t} \leqslant \lambda_j \leqslant a_2 j^{2t}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

*gilt.*

(c) *Sind $m$ und $k$ zwei ganze Zahlen mit $0 \leqslant k < m$, so ist*

$$C^{\infty,k,m}([-1,1]) = D(\bar{A}^\infty),$$

*sofern man in der Formel (28) $t = m-k$ und $r = m-2k$ setzt. $C^{\infty,k,m}([-1,1])$ ist ein nuklearer (F)-Raum mit einer absoluten Basis. Er ist isomorph zu $s$.*



Einen Beweis dieses Satzes findet man in [22]. Man sieht unmittelbar, daß der Operator (20) ein Spezialfall ist, $r = 0$. Wie der Teil (c) des letzten Satzes zeigt, ist der zugehörige Raum $C^{\infty,k,2k}([-1,1])$, was mit unseren früheren Aussagen übereinstimmt.

Folgerung 2. *$C^\infty([-1,1])$ ist ein nuklearer (F)-Raum mit absoluter Basis. $C^\infty([-1,1])$ ist isomorph zu $s$.*

Das ist richtig, da der Raum $C^\infty([-1,1]) = C^{\infty,0,m}([-1,1])$ durch jeden Operator $A$ der Form (28) mit $t = r = m$ erzeugt wird. Insbesondere können wir $m = 1$ wählen und erhalten dann das Analogon zum Legendreschen Differentialoperator (26). In [22] und [23] wurde die Theorie der allgemeinen Legendreschen Differentialoperatoren entwickelt, wobei die Bedingung (27) durch die schwächere Bedingung

$$\lim_{x \downarrow -1} \frac{\varrho(x)}{x+1} = c_{-1}, \quad \lim_{x \uparrow 1} \frac{\varrho(x)}{1-x} = c_1,$$

ersetzt wurde. Dabei zeigt es sich, daß man in einer Reihe von Fällen (insbesondere für den gewöhnlichen Legendreschen Differentialoperator) mit Hilfe der Interpolationstheorie von Sobolev-Besov-Räumen mit Gewichtsfunktionen auch die Definitionsgebiete $D(\bar{A}^\varkappa)$, $\varkappa > 0$, für gebrochene Potenzen bestimmen kann [23]. Das gilt auch für die Operatoren aus dem Satz 1, wie in [25] gezeigt wurde.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung von Funktionenräumen über den Intervallen $(0, \infty)$ und $R_1 = (-\infty, \infty)$ über. Es zeigt sich, daß in beiden Fällen Satz 1(a) richtig bleibt, [14], [15]. Die Funktion $q(x)$ muß hierbei den Bedingungen (1) und (2) genügen. Um Satz 1(c) zu erhalten, muß man vor allem sicherstellen, daß jede Funktion aus $S_{q(x)}$ quadratisch integrierbar ist. Man prüft sofort nach, daß die Bedingung (3) hierfür hinreichend ist. Mit Hilfe der Formel (23), der Bedingung (1) und den Sobolevschen Einbettungssätzen für unbeschränkte Gebiete [17], [24] zeigt man relativ einfach, daß in diesem Fall

$$S_{q(x)}\big((0,\infty)\big) = D(\bar{A}^\infty) \quad \text{oder} \quad S_{q(x)}(R_1) = D(\bar{A}^\infty)$$

gilt. Dabei ist $A$ wieder der Operator aus dem Satz 1 bezogen auf das Intervall $(0, \infty)$ oder auf $R_1$. Um Lemma 2 anwenden zu können, benötigen wir eine Abschätzung der Form (18). Aus dem Variationsprinzip von Courant erhält man die Ungleichung

$$\lambda_j \leqslant a_2 j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

wobei $\lambda_j$ wie früher die Eigenwerte des Operators $\bar{A}$ sind. Die eigentliche Schwierigkeit besteht in der Gewinnung einer Abschätzung der Form

$$\lambda_j \geqslant a_1 j^{\tau_1}, \quad a_1 > 0,\ \tau_1 > 0. \tag{32}$$

Wir formulieren ein entsprechendes Resultat und diskutieren es anschließend.

SATZ 3. *Es sei* $\Omega = (0, \infty)$ *oder* $\Omega = R_1 = (-\infty, \infty)$.

(a) *Genügt* $q(x)$ *den Bedingungen* (1), (2), (3), *so gilt Satz* 1(a), *wobei man* $(-1, 1)$ *durch* $\Omega$ *zu ersetzen hat. Ferner ist*

$$D(\bar{A}^\infty) = S_{q(x)}(\Omega).$$

(b) *Ersetzt man die Bedingung* (3) *durch die schärfere Forderung*

$$q(x) \geqslant c|x|^a, \; c > 0, \; a > 0, \tag{33}$$

*so ist* $S_{q(x)}(\Omega)$ *ein nuklearer (F)-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu s.*

Nach dem, was bereits gesagt wurde, genügt es zu zeigen, daß eine Abschätzung der Form (32) existiert. Ist $N(\lambda)$ die Anzahl der Eigenwerte des Operators $\bar{A}$, die kleiner als $\lambda$ sind und ist $n_b(\lambda)$ die entsprechende Anzahl für das Neumannsche Problem des Operators $B$,

$$(Bf)(x) = -f''(x) + f(x)$$

im Intervall $(0, b)$, falls $\Omega = (0, \infty)$ und im Intervall $(-b, b)$, falls $\Omega = R_1$ ist, so ergibt sich aus dem Variationsprinzip von Courant

$$N(\lambda) \leqslant n_b(\lambda) \quad \text{mit } b = c\lambda^a. \tag{34}$$

$c$ und $a$ haben hierbei die gleiche Bedeutung wie in der Formel (33). Für $b \geqslant 1$ ist aber

$$n_b(\lambda) \leqslant c' b \sqrt{\lambda} \tag{35}$$

mit einer von $b$ und $\lambda$ unabhängigen Konstanten $c'$. Daraus folgt

$$N(\lambda) \leqslant c' c \lambda^a \lambda^{1/2} = c'' \lambda^{a+1/2}. \tag{36}$$

Wie wir beim Übergang vom Lemma 2 zum Lemma 2′ bereits bemerkten, ergibt sich hieraus die gewünschte Abschätzung (32). (Es ist $\tau_1 = 1/(a+\frac{1}{2})$.) Es ist wünschenswert, einen entsprechenden Satz ohne eine Wachstumsbedingung der Form (33) herzuleiten. Auch für eine Ausdehnung der Resultate auf den $n$-dimensionalen Fall wäre es zweckmäßig, das Wachstum von $q(x)$ für $|x| \to \infty$ lediglich durch die Bedindung (3) auszudrücken. Daß man ohne jede Zusatzbedingung auskommt, scheint fraglich, ist aber nicht ausgeschlossen. Wir werden später bei der Behandlung des $n$-dimensionalen Falles auf die Resultate von Kostjučenko [12] eingehen. Im eindimensionalen Fall kann man ein relativ einfaches Kriterium angeben.

SATZ 3′. *Es sei* $\Omega = (0, \infty)$ *oder* $\Omega = R_1 = (-\infty, \infty)$. *Die Funktion* $q(x)$ *genüge den Bedingungen* (1), (2) *und* (3). *Ferner soll es einen Punkt* $x_0 \in \Omega$ *geben, so daß* $q(x)$ *links von* $x_0$ *monoton fallend und rechts von* $x_0$ *monoton wachsend ist. Dann bleiben Satz* 1(a) *und Satz* 1(c) *richtig, sofern man* $(-1, 1)$ *durch* $\Omega$ *ersetzt.*



Wie wir bereits gesagt hatten, muß man zum Beweis nur noch eine Abschätzung der Form (32) herleiten. Setzen wir $I_\lambda = \{x \,|\, q(x) < \lambda\}$, so ist $I_\lambda$ ein beschränktes Intervall, da $q(x)$ der Bedingung (3) genügt und die angegebene Monotonieeigenschaft besitzt. Hat $a$ die gleiche Bedeutung wie in der Bedingung (3), so folgt

$$|I_\lambda| = \int_{I_\lambda} q^a(x) q^{-a}(x)\, dx \leqslant c\lambda^a.$$

Über die Formeln (34) und (35) gelangt man jetzt wie früher zu den Abschätzungen (36) und (32).

FOLGERUNG 3. $\mathfrak{C}_0^\infty([0, \infty))$ *und* $S(R_1)$ *sind nukleare (F)-Räume mit absoluter Basis. Sie sind isomorph zu s.*

Setzt man im Intervall $(0, \infty)$ etwa $q(x) = 1 + x^{-a} + x^2$ mit $a > 2)$ so ergibt sich aus den Formeln (10), (11), (12) und aus dem Satz 3 die gewünschte Aussage für den Raum $\mathfrak{C}_0^\infty([0, \infty))$. Wählt man $q(x) = 1 + x^2$ im Intervall $R_1$, so ergibt sich die Behauptung für den Raum $S(R_1)$. Der zugehörige positiv-definite Differentialoperator $\bar{A}$ mit reinem Punktspektrum ist der Hermitesche Differentialoperator

$$(Af)(x) = -f''(x) + (1+x^2) f(x), \qquad D(A) = C_0^\infty(R_1).$$

Lemma 1 zeigt dann, daß die Hermiteschen Funktionen

$$H_j(x) = C_j e^{-x^2/2} (e^{-x^2})^{(j)}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{37}$$

als Eigenfunktionen des Operators $\bar{A}$ eine absolute Basis im Raum $S(R_1$. bilden. Dieses Resultat findet man bereits bei Mitjagin [13], S. 120,

Bei der Behandlung der Räume $C_{p(x)}\big((0, \infty)\big)$ und $C_{p(x)}^{k,m}\big((0, \infty)\big)$ können wir uns kurz fassen. Ob eine beliebig oft differenzierbare Funktion zu einem der genannten Räume gehört, hängt ausschließlich von dem Lokalverhalten der Funktionen an den Endpunkten des Intervalles $(0, \infty)$ ab (hierbei hat man $\infty$ als Endpunkt zu zählen). Das Gleiche gilt für das Spektralverhalten und für die Bestimmung der Definitionsgebiete $D(\bar{A}^k)$ wesentlich selbstadjungierter elliptischer Differentialoperatoren A mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten. Wir gehen hier auf dieses in der Spektraltheorie von Differentialoperatoren gut bekannte Lokalisationsprinzip nicht näher ein und verweisen auf [5] und [16]. Auf dieser Grundlage und unter Verwendung der früheren Resultate gelangt man zu folgendem Ansatz:

SATZ 4. $\varrho(x)$ *sei eine im Intervall* $[0, \infty)$ *beliebig oft differenzierbare Funktion,* $\varrho(x) > 0$ *für* $x \in (0, \infty)$. *Es mögen drei positive Zahlen* $c_0$, $c$ *und*

*$\varepsilon$ existieren, so daß*

$$\varrho(x) = \begin{cases} c_0 x & \text{für } x \in [0, \varepsilon], \\ 1 & \text{für } x \geqslant c \end{cases}$$

*gilt.*

(a) *Ist $t$ eine natürliche Zahl und $r$ eine ganze Zahl mit $-\infty < r \leqslant t$, so ist der positiv-definite Operator $A$,*

(38) $$(Af)(x) = (-1)^t \big(\varrho^r(x) f^{(t)}(x)\big)^{(t)} + (1+x) f(x),$$

*$D(A) = \{f \mid f(x)$ ist für $x \geqslant 0$ beliebig oft differenzierbar, $f(x) = 0$ für $x \geqslant x_0(f), f^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, 1, \ldots, t-r-1\}$, im Hilbertraum $L_2\big((0, \infty)\big)$ wesentlich selbstadjungiert. $\bar{A}$ ist ein Operator mit reinem Punktspektrum für dessen Eigenwerte $\lambda_j$ eine Abschätzung der Form* (18) *gilt.*

(b) *Sind $m$ und $k$ zwei ganze Zahlen mit $0 \leqslant k < m$, so ist*

(39) $$C_{1+x}^{k,m}\big((0, \infty)\big) = D(\bar{A}^\infty),$$

*sofern man in der Formel* (38) *$t = m-k$ und $r = m-2k$ setzt. $C_{1+x}^{k,m}\big((0, \infty)\big)$ ist ein nuklearer $(F)$-Raum mit einer absoluten Basis. Er ist isomorph zu $s$.*

Wie wir bereits erwähnt hatten, beweist man diesen Satz mit Hilfe des Lokalisationsprinzips für elliptische Differentialoperatoren und unter Verwendung der Sätze 2 und 3. Man kann $p(x) = 1+x$ im letzten Satz durch irgendeine Funktion $p(x)$ ersetzen, sofern sie nur für $x \geqslant 1$ das gleiche Verhalten wie die Funktion $q(x)$ in den Sätzen 3 oder 3′ zeigt. An der Formulierung des Satzes 4(b) ändert sich nichts, sofern man $C_{1+x}^{k,m}\big((0, \infty)\big)$ durch $C_{1+x}^{k,m}\big((0, \infty)\big)$ ersetzt. Ferner ist es nicht unbedingt notwendig, in der Formel (38), $\varrho(x) = 1$ für $x \geqslant c$ zu verlangen, um $C_{1+x}^{k,m}\big((0, \infty)\big)$ zu erzeugen. Das zeigt auch das unten angegebene Beispiel des Laguerreschen Differentialoperators.

Folgerung 4. *$C_{1+x}\big((0, \infty)\big)$ ist ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu $s$.*

Wie in der Folgerung 2 braucht man auch hier lediglich darauf hinzuweisen, daß $C_{1+x}\big((0, \infty)\big) = C_{1+x}^{0,m}\big((0, \infty)\big)$ für jede natürliche Zahl $m$ ist. Im Satz 4(b) haben wir somit $t = r = m$ zu setzen. Insbesondere können wir $m = 1$ wählen. Wir hatten bereits darauf hingewiesen, daß die Voraussetzung $\varrho(x) = 1$ für $x \geqslant c$ in dem letzten Satz abgewandelt werden kann. So zeigt es sich zum Beispiel, daß man zur Erzeugung des Raumes $C_{1+x}\big((0, \infty)\big)$ den Laguerreschen Differentialoperator $A$,

$$(Af)(x) = -4\big(xf'(x)\big)' + (1+x) f(x),$$

verwenden kann. Seine Eigenelemente, die Laguerreschen Funktionen

$$L_j(x) = c_j e^{x/2} [e^{-x} x^j]^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

bilden dann nach Lemma 1 eine absolute Basis im Raum $C_{1+x}\big((0, \infty)\big)$.



Wir weisen schließlich noch darauf hin, daß man auch im Raum $C_0^\infty([-1, 1])$ explizit eine absolute Basis angeben kann. Sind $H_j(x)$ die Hermiteschen Funktionen aus der Formel (37), so bildet

$$H_j\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

eine absolute Basis im Raum $C_0^\infty([-1, 1])$, da durch die Abbildung

$$(Tf)(x) = f\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x\right)$$

die Räume $C_0^\infty([-1, 1])$ und $S(R_1)$ isomorph zugeordnet werden ([13], S. 120; [18], S. 158).

Schließlich erwähnen wir noch, daß man den interessanten nuklearen $(F)$-Raum $C^\infty(R_1)$ nicht auf diese Weise erhält. Das ist auch nicht verwunderlich, wenn man berücksichtigt, daß alle hier auftretenden Räume isomorph zu $s$ sind, während Mitjagin zeigen konnte, daß $C^\infty(R_1)$ isomorph zu $(s)^\Delta$ mit $\Delta = \{1, 2, \ldots\}$ ist ([13], S. 125).

**3. Die $(F)$-Räume $S_{q(x)}(\Omega)$.** Im letzten Abschnitt hatten wir bereits die Räume $S_{q(x)}(\Omega)$ betrachtet, wobei $\Omega$ ein Intervall war. Die Resultate (Satz 1 und Satz 3) sind dabei so formuliert worden, daß sie nach entsprechenden Abänderungen auch im $n$-dimensionalen Fall gültig sind. Grundlage der Untersuchungen ist folgendes Lemma:

Lemma 3. *$\Omega \subset R_n$ sei ein beliebiges (beschränktes oder unbeschränktes) Gebiet über dessen Rand keinerlei Voraussetzungen notwendig sind. $q(x)$ genüge den Voraussetzungen* (1) *und* (2). *Dann ist der Operator $A$,*

(40) $$(Af)(x) = -\Delta f(x) + q(x) f(x), \qquad D(A) = C_0^\infty(\Omega),$$

*im Hilbertraum $L_2(\Omega)$ wesentlich selbstadjungiert. $D(\bar{A}^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, ist die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm*

(41) $$[\|f\|^2_{W_2^{2k}(\Omega)} + \|q^k f\|^2_{L_2(\Omega)}]^{1/2}.$$

*Die Einschränkung von $\bar{A}^k$ auf $C_0^\infty(\Omega)$ ist ebenfalls wesentlich selbstadjungiert.*

Einen Beweis des Lemmas für beschränkte Gebiete findet man in einer etwas schwächeren Formulierung in [20]. Müller-Pfeiffer hat diesen Beweis verbessert und auf unbeschränkte Gebiete ausgedehnt [14], [15]. Auf ihn geht die obige Fassung zurück. Wie wir schon im zweiten Abschnitt hervorgehoben haben, dient die Forderung (3) dazu, $S_{q(x)}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ zu sichern. Das Analogon zu Satz 3 lautet jetzt folgendermaßen:

Satz 5. *$\Omega \subset R_n$ sei ein beliebiges (beschränktes oder unbeschränktes) Gebiet über dessen Rand keinerlei Voraussetzungen notwendig sind.*

(a) *Genügt $q(x)$ den Bedingungen* (1), (2), (3), *so ist*

$$D(\bar{A}^\infty) = S_{q(x)}(\Omega).$$

(b) *Ersetzt man die Bedingung* (3) *durch die schärfere Forderung*

$$q(x) \geq C|x|^a, \quad C > 0, \; a > 0, \; x \in \Omega, \tag{42}$$

*so ist $S_{q(x)}(\Omega)$ ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu s.*

Wir machen einige Bemerkungen zum Beweis, die über die Betrachtungen des eindimensionalen Falles hinausgehen. Es sei $f(x) \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(R_n)$. Dann folgt aus dem Lemma 3 und den Einbettungssätzen für den $R_n$ [17], [24]

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \sup_{x \in R_n} |f(x)| \leq c\|f\|_{W_2^{2k}(R_n)} \leq c\|f\|_{D(\bar{A}^k)}, \tag{43}$$

sofern $2k > n/2$ ist. Auf der Grundlage dieser Ungleichung und der Bedingung (1) ergibt sich

$$D(\bar{A}^\infty) \subset S_{q(x)}(\Omega).$$

Aus der Forderung (3) folgt die Umkehrung

$$S_{q(x)}(\Omega) \subset D(\bar{A}^\infty).$$

Daraus kann man den Teil (a) einschließlich der topologischen Gleichheit herleiten. Hierbei ist zu beachten, daß wir Einbettungssätze vom Typ der Ungleichung (43) nur für den Raum $R_n$ und nicht für das Gebiet $\Omega$ benötigen, da wir es nur mit Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$ zu tun haben. Insbesondere braucht $\Omega$ kein Gebiet vom Sobolevtyp zu sein, (das zum Beispiel der Kegelbedingung genügt [1]). Aus der Bedingung (42) folgt, daß $\bar{A}$ ein Operator mit reinem Punktspektrum ist. Es ist notwendig, eine Abschätzung der Form (19) herzuleiten. Aus dem Variationsprinzip von Courant und der bekannten Eigenwertverteilung des Dirichletschen Problems für den Laplaceoperator folgt

$$N(\lambda) \geq c\lambda^{n/2}, \quad c > 0. \tag{44}$$

Um eine Abschätzung in der anderen Richtung zu beweisen, muß man die Bedingung (42) benutzen. $n_b(\lambda)$ sei die Anzahl der Eigenwerte des Laplaceoperators im Gebiet $\Omega \cap \{x|\ |x| < b\}$ mit Dirichletschen Randbedingungen auf $\partial\Omega \cap \{x|\ |x| < b\}$ und Neumannschen Randbedingungen auf $\{x|\ |x| = b\} \cap \Omega$, die kleiner als $\lambda$ sind. $\tilde{n}_b(\lambda)$ sei die Anzahl der Eigenwerte des Laplaceoperators in der Kugel $\{x|\ |x| < b\}$ mit Neumannschen Randbedingungen, die kleiner als $\lambda$ sind. Aus dem Variationsprinzip von Courant ergibt sich mit $\lambda = cb^a$ und der bekannten Eigenwertverteilung für das Neumannsche Problem des Laplaceoperators in kugelförmigen Gebieten



$$N(\lambda) \leq n_b(\lambda) \leq \tilde{n}_b(\lambda) \leq c' b^n \lambda^{n/2} \leq c'' \lambda^{n/2+n/a}.$$

Der Satz 4(b) folgt jetzt aus dem Lemma 2'.

Bemerkung 1. Wie wir im eindimensionalen Fall schon angedeutet haben, ist es wünschenswert, den Satz 4(b) ohne die einschränkende Bedingung (42) zu beweisen, sondern neben (1) und (2) nur (3) zu fordern. Ob dies ohne jede Zusatzbedingung möglich ist, erscheint aber fraglich. Wir erwähnen hier die Resultate von Kostjučenko [12], die in diese Richtung zielen. Es sei $\Omega = R_n$. $q(x)$ genüge den Voraussetzungen (1) und (3), sowie den Bedingungen

$$q(x) \leq B\exp[c_0|x-\xi|\,q^{1/2}(\xi)] \quad \text{für } |x-\xi| > 1,$$

$$\int_{|x-\xi|\leq 1} \exp[-aq(\xi)]\,d\xi \leq B\exp\left[-\frac{a}{k_0}\,q(x)\right]$$

für eine passende Zahl $k_0 \geq 1$,

$$q(x) \leq Aq(\xi) \quad \text{für } |x-\xi| \leq 1$$

und

$$\int_{q(x)\leq\lambda_1} (\lambda_1 - q(x))^{n/2}\,dx \leq c\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^\gamma \int_{q(x)\leq\lambda_2} (\lambda_2 - q(x))^{n/2}\,dx, \quad \gamma > 0, \; \lambda_1 > \lambda_2.$$

Dann ist der Operator $A$ aus der Formel (40) wesentlich selbstadjungiert und $\bar{A}$ ist ein Operator mit reinem Punktspektrum. Es gilt

$$N(\lambda) \leq c\int_{q(x)\leq\lambda} (\lambda - q(x))^{n/2}\,dx \leq c\lambda^{n/2}|\{x\,|\,q(x) \leq \lambda\}| \tag{45}$$

$$\leq c\lambda^{n/2}\int_{q(x)\leq\lambda} q^a(x)\,q^{-a}(x)\,dx \leq c'\,\lambda^{n/2+a}.$$

In der gleichen Weise wie früher folgt dann, daß $S_{q(x)}(\Omega) = D(\bar{A}^\infty)$ ein nuklearer $(F)$-Raum ist, der isomorph zu $s$ ist. Kostjučenko hat nicht nur eine Abschätzung der Form (45), sondern eine asymptotische Formel für $N(\lambda)$ angegeben. Da wir nur Abschätzungen benötigen, ist es vermutlich möglich, die komplizierten Zusatzbedingungen durch einfachere zu ersetzen.

Bemerkung 2. Das letzte Beispiel zeigt, daß man im Falle $\Omega = R_n$ für Funktionen $q(x)$, die den Bedingungen (1), (2), (3) und gewissen

Zusatzbedingungen genügen, erreichen kann, daß $S_{q(x)}(\Omega) = D(\bar{A}^\infty)$ zu $s$ isomorph ist. Wir wollen jetzt einen Fall beschreiben, wo man mit den Bedingungen (1), (2), (3) auskommt, dafür aber zusätzliche Eigenschaften der Gebiete $\Omega$ fordert. Wir setzen voraus, daß $n = 2$ oder $n = 3$ ist. Ferner sei $\Omega$ ein (im allgemeinen unbeschränktes) Gebiet der Klasse $C^\infty$, für das zwei positive Konstanten $c$ und $\beta$ mit

$$|\Omega \cap \{x \mid a \leqslant |x| \leqslant a+1\}| \leqslant \frac{c}{(1+a)^\beta} \tag{46}$$

existieren. Ist $n(\lambda)$ die Anzahl der Eigenwerte für das Dirichletsche Problem des Laplaceoperators, die kleiner als $\lambda$ sind, so hat Hewgill

$$n(\lambda) \leqslant c' \lambda^\alpha \tag{47}$$

gezeigt [8]. Dabei hängt $\alpha$ von $\beta$ und $n$ ab. Man sieht sofort, daß, für $\beta > 1$, $\Omega$ ein endliches Maß hat. Ist $A$ der Operator aus der Formel (40) und ist $N(\lambda)$ wiederum die Anzahl der Eigenwerte, die kleiner als $\lambda$ sind, so folgt aus dem Variationsprinzip von Courant

$$N(\lambda) \leqslant n(\lambda) \leqslant c' \lambda^\alpha.$$

Zusammen mit der Ungleichung (44) erhalten wir eine Abschätzung der Form (19). Satz 5 (a) und Lemma 2′ zeigen jetzt, daß $S_{q(x)}(\Omega) = D(\bar{A}^\infty)$ ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis ist, der zum Folgenraum $s$ isomorph ist.

Bemerkung 3. Es ist von Interesse zu untersuchen, wie weit Lemma 3 und Satz 5 gültig bleiben, wenn man den Operator $A$ aus der Formel (40) durch den allgemeineren Operator $A$,

$$(Af)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) + q(x)f(x), \qquad D(A) = C_0^\infty(\Omega), \tag{48}$$

ersetzt. $\big(p_{ij}(x)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ ist hierbei für jeden Punkt $x \in \Omega$ eine reellwertige positiv-definite Matrix mit beliebig oft differenzierbaren Komponenten. $\varrho(x)$ sei der kleinste Eigenwert. Ferner seien

$$\Phi_0[g] = |g(x)|^2 \quad \text{und} \quad \Phi_m[g] = \sum p_{\alpha_1\beta_1}\ldots p_{\alpha_m\beta_m} \frac{\partial^m \bar{g}}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_m}} \cdot \frac{\partial^m \bar{g}}{\partial x_{\beta_1}\ldots\partial x_{\beta_m}},$$

$m = 1, 2, \ldots$ Das Analogon zur Formel (1) lautet jetzt

$$\begin{gathered} q(x) \geqslant 1,\ q(x) \text{ beliebig oft differenzierbar in } \Omega, \\ \Phi_m[q] \leqslant c_m q^{2(1+m\sigma)}, \quad m = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{49}$$



wobei $c_m$ positive Konstanten sind und $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ gilt. $S_{q(x)}(\Omega)$ wird in gleicher Weise wie in der Definition 1 erklärt. Kniepert hat in [9] und [10] bewiesen, daß jede Eigenfunktion des Operators $\bar{A}$ zu $S_{q(x)}(\Omega)$ gehört, sofern $A$ im Raum $L_2(\Omega)$ wesentlich selbstadjungiert ist und die Bedingungen (49) und

$$\varrho q^{2\alpha} \geqslant a_0 \quad \text{und} \quad \Phi_m[p_{ij}] \leqslant \tilde{c}_m \varrho^2 q^{2m\sigma} \tag{50}$$

erfüllt sind. Hierbei ist $\alpha$ eine reelle Zahl, $a_0 > 0$, $\tilde{c}_m > 0$. Es wäre zu untersuchen, ob die Bedingungen auch ausreichen, um $D(\bar{A}^\infty) = S_{q(x)}(\Omega)$ zu garantieren. Die Matrix $\big(p_{ij}(x)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ kann für $x \to \partial\Omega$ singulär werden. Die Stärke der Singularitäten von $\big(p_{ij}(x)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ und von $q(x)$ sind durch die Bedingungen (49) und (50) miteinander gekoppelt. Es wäre von Interesse festzustellen, ob man auf diesem Wege nukleare $(F)$-Räume $S_{q(x)}(\Omega)$ erfassen kann, die man durch das frühere Verfahren nicht erhält. Die Resultate von Kniepert in Verbindung mit Kriterien für die wesentliche Selbstadjungiertheit von Operatoren der Form (48) (man vergleiche zum Beispiel mit [26]) weisen in diese Richtung.

Folgerung 5. *$\Omega \subset R_n$ sei ein beschränktes Gebiet. Genügt $q(x)$ den Voraussetzungen (1) und (2), so ist $S_{q(x)}(\Omega)$ ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu $s$.*

Das erhält man unmittelbar aus dem Satz 5.

Folgerung 6. *Ist $\Omega \subset R_n$ ein beschränktes Gebiet der Klasse $C^\infty$, so ist $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu $s$.*

Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich aus dem Beispiel 2 und der letzten Folgerung.

Folgerung 7. *$\Omega \subset R_n$ sei ein (nicht notwendig beschränktes) Gebiet, das gleichmäßig zur Klasse $C^\infty$ gehört. Dann ist $\mathfrak{C}_0^\infty(\bar{\Omega})$ ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu $s$.*

Zum Beweis erinnern wir an die Formeln (10), (11) und (12), sowie an Satz 5.

Folgerung 8. *$S(R_n)$ ist ein nuklearer $(F)$-Raum. Er ist isomorph zu $s$.*

Das erhält man unmittelbar aus Satz 5 und Beispiel 1.

**4. Die $(F)$-Räume $C_{p(x)}(\Omega)$.** Wir gehen zur Behandlung der Räume $C_{p(x)}(\Omega)$ aus der Definition 2 über. Während wir im zweiten Abschnitt bei der Untersuchung des eindimensionalen Falles auch den Raum $C_{1+x}\big((0,\infty)\big)$ betrachtet haben (Folgerung 4), behandeln wir jetzt nur Funktionenräume über beschränkten Gebieten. Wir setzen ferner voraus, daß $\Omega \subset R_n$ zur Klasse $C^\infty$ gehört und $p(x) \equiv 1$ ist. Es handelt sich somit um den Raum $C^\infty(\bar{\Omega})$, wobei $\Omega$ ein beschränktes Gebiet der Klasse $C^\infty$ im $R_n$ ist, $n \geqslant 2$. Analog wie für das Intervall $(0,\infty)$ scheint es auch hier möglich zu sein, die Resultate dieses Abschnittes auf die $(F)$-Räume $C_{1+|x|^2}(\bar{\Omega})$ zu übertragen, wobei $\Omega$ gleichmäßig zur Klasse $C^\infty$ gehört.

Methoden zur Erzeugung des Raumes $C^\infty(\bar{\Omega})$ durch singuläre elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung wurden von Baouendi und Goulaouic [2], [3] und vom Verfasser [21] angegeben. Obwohl die Verfahren etwas abweichen, liegt ihnen der gleiche Gedanke zugrunde. Ausgangspunkt ist in beiden Arbeiten ein elliptischer Differentialoperator $A$ der Form

$$(51)\qquad (Af)(x) = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{j,k}(x)\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + f(x), \qquad D(A) = C^\infty(\bar{\Omega}),$$

im Hilbertraum $L_2(\Omega)$. $\{a_{jk}(x)\}_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ ist in jedem Punkt $x\in\Omega$ eine positiv-definite Matrix mit reellen beliebig oft differenzierbaren Komponenten. Ist $\varrho(x)$ der kleinste Eigenwert der Matrix $\{a_{jk}(x)\}_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ und ist $d(x)$ der Abstand eines Punktes $x$ zum Rand $\partial\Omega$, so gibt es zwei positive Konstanten $c_1$ und $c_2$, so daß

$$(52)\qquad c_1 d(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant c_2 d(x)$$

ist. Man muß bemerken, daß die von Baouendi und Goulaouic angegebenen Bedingungen etwas allgemeiner sind. Insbesondere sind die von ihnen betrachteten Operatoren nicht notwendig symmetrisch. Wir werden später noch genauer hierauf eingehen.

Das in [21] entwickelte Verfahren läßt sich relativ einfach wie folgt beschreiben. Gehört das beschränkte Gebiet $\Omega$ zur Klasse $C^\infty$, so zerfällt sein Rand $\partial\Omega$ in endlich viele zusammenhängende Randkomponenten $(\partial\Omega)_j$, $j = 1, \dots, N$. Zu jeder Randkomponente $(\partial\Omega)_j$ gibt es ein „saumförmiges" Gebiet $S_j \subset \Omega$ (eine Umgebung von $(\partial\Omega)_j$), so daß man in $S_j$ ein beliebig oft differenzierbares krummlinies Koordinatensystem $y_1, y_2, \dots, y_n$ einführen kann. Dabei soll $y_n$ in Richtung der Normalen der Fläche $(\partial\Omega)_j$ zeigen. $\bar{S}_l \cap \bar{S}_j = \emptyset$. Dann kann man $S_j$ in der Form $(\partial\Omega)_j \times (0, h_j)$ wählen, $h_j > 0$. Entsprechend ist

$$(53)\qquad L_2(S_j) = L_2\big((\partial\Omega)_j\big) \hat{\otimes} L_2\big((0, h_j)\big).$$

Man wählt jetzt auf der $C^\infty$-Manigfaltigkeit $(\partial\Omega)_j$ einen regulären elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung, etwa den zweiten Beltramioperator $B_j$. Ist $L_j$ der Operator aus der Formel (28) mit $t = r = 1$, so bildet man jetzt

$$(54)\qquad A_j = B_j \otimes E + E \otimes L_j, \qquad j = 1, \dots, N,$$

wobei $E$ der Einheitsoperator ist. Das Tensorprodukt ist bezüglich der Zerlegung (53) des Raumes $L_2(S_j)$ zu verstehen. Aus den Eigenschaften der Operatoren $B_j$ und $L_j$ (Abschnitt 2) kann man jetzt herleiten, daß der Operator $A_j$ in einer Umgebung der Randkomponente $(\partial\Omega)_j$ zur Erzeugung von $C^\infty(\bar{S}_j)$ geeignet ist. Die einzelnen Operatoren $\bar{A}_j$ muß man schließlich noch zu einem Operator $A$ zusammensetzen, wobei man die Form (51), (52) erreichen kann. Dieses Verfahren ist mit dem Lokalisationsprinzip in der Spektraltheorie elliptischer Differentialoperatoren verwandt. Auf Einzelheiten können wir hier nicht eingehen, wir verweisen auf [21]. Es ergibt sich folgendes Resultat:



Satz 6. *$\Omega \subset R_n$ sei ein beschränktes Gebiet der Klasse $C^\infty$.*

(a) *Es gibt einen wesentlich selbstadjungierten positiv-definiten Operator $A$ der Form* (51), (52), *so daß*

$$D(\bar{A}^\infty) = C^\infty(\bar{\Omega})$$

*ist.*

(b) *$\bar{A}$ ist ein Operator mit reinem Punktspektrum, die Eigenwerte seien $\lambda_l$. Es gibt zwei positive Konstanten $c_1$ und $c_2$, so daß*

$$(55)\qquad c_1 l^{2/n} \leqslant \lambda_l \leqslant c_2 l^{2/n}, \qquad l = 1, 2, \dots,$$

*gilt.*

(c) *$C^\infty(\bar{\Omega})$ ist ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu $s$.*

Wie man zum Teil (a) des Satzes gelangt, haben wir bereits in groben Zügen geschildert. Den Teil (b) kann man wie folgt beweisen. Der Operator $B_j$ zeigt als regulärer elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung auf einer kompakten $(n-1)$-dimensionalen $C^\infty$-Manigfaltigkeit das gleiche asymptotische Verhalten der Eigenwerte wie etwa der Laplaceoperator mit Dirichletschen Randbedingungen in einem beschränkten $(n-1)$-dimensionalen Gebiet. Sind $\lambda_l(B_j)$ die Eigenwerte des Operators $B_j$, so ist

$$c_1' l^{2/(n-1)} \leqslant \lambda_l(B_j) \leqslant c_2' l^{2/(n-1)}, \qquad l = 1, 2, \dots,$$

mit passenden positiven Zahlen $c_1'$ und $c_2'$. Zusammen mit der schon angegebenen Eigenwertverteilung für den allgemeinen Legendreschen Differentialoperator $L_j$ (Formel (31)), ergibt sich aus der Darstellung (54) eine Abschätzung der Form (55) für die Eigenwerte des Operators $A_j$. Daraus kann man die Ungleichung (55) für $\bar{A}$ herleiten. Wir bemerken, daß man die Formel (55) auch aus den Resultaten der Arbeit [3] gewinnen kann. Der Teil (c) ergibt sich nun aus den Teilen (a) und (b), sowie aus Lemma 2.

Bemerkung 4. Wir gehen kurz auf die Methode von Baouendi und Goulaouic ein [2], [3]. $\Omega \subset R_n$ ist wieder ein beschränktes Gebiet der Klasse $C^\infty$. Es werden die Bilinearform

$$a(f, g) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \int_\Omega a_{ij}(x)\varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \bar{g}(x)}{\partial x_j}\,dx$$

und der zugehörige Differentialoperator

$$(Af)(x) = -\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\varphi(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

betrachtet. Dabei ist $\varphi(x)\in C_0^\infty(R_n)$ eine reelle Funktion mit

$$\Omega = \{x|\varphi(x)>0\}, \quad \partial\Omega = \{x|\varphi(x)=0\}, \quad \frac{\partial}{\partial\nu}\varphi(x)\neq 0 \text{ für } x\in\partial\Omega$$

($\nu$ äußere Normale an $\partial\Omega$).

$$a_{ij}(x)\in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Als Elliptizitätsbedingung wird

$$\operatorname{Re} a(f,f)\geqslant \alpha\left(\int_\Omega \varphi(x)\left(|f(x)|^2+\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|^2\right)dx\right), \quad \alpha>0,$$

gewählt. Dabei soll diese Ungleichung für jede Funktion $f(x)$ gelten, für die die rechte Seite der letzten Abschätzung sinnvoll ist. Ist

$$H_\varphi^k(\Omega) = \{f|f\in W_2^{k-1}(\Omega), \varphi f\in W_2^k(\Omega)\}, \quad k=1,2,\ldots,$$

so beweisen Baouendi und Goulaouic, daß $A$ eine isomorphe Abbildung von $H_\varphi^{k+2}(\Omega)$ auf $W_2^k(\Omega)$ vermittelt, $k=0,1,2,\ldots$ Betrachtet man $A$ als Operator im Raum $L_2(\Omega)$ mit $D(A)=H_\varphi^2(\Omega)$, so ergibt sich

$$D(A^m) = \{f|f\in W_2^m(\Omega), \varphi^m f\in W_2^{2m}(\Omega)\}.$$

Mit Hilfe dieses Resultats und den Sobolevschen Einbettungssätze folgt jetzt

$$D(A^\infty) = C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Ist der Operator $A$ selbstadjungiert, so hat er ein reines Punktspektrum. Bezeichnet man die Eigenwerte wieder mit $\lambda_l$, so gilt

$$c_1 l^{1/(n-1)-\varepsilon}\leqslant\lambda_l\leqslant c_2 l^{2/n}, \quad l=1,2,\ldots\ (n\geqslant 2).$$

Hierbei ist $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl, $c_1=c_1(\varepsilon)$ und $c_2$ sind positive Konstanten. Nach Lemma 2 ist somit $C^\infty(\overline{\Omega})$ ein nuklearer $(F)$-Raum, der zu $s$ isomorph ist. Die Beweise dieser Resultate findet man in [3].

Bemerkung 5. Sowohl das Verfahren von Baouendi und Goulaouic, als auch das Verfahren des Verfassers benutzen wesentlich, daß $\Omega$ ein Gebiet der Klasse $C^\infty$ ist. Unter Verwendung anderer Methoden hat Zerner gezeigt, daß $C^\infty(\overline{\Omega})$ isomorph zum Raum $s$ ist, sofern $\partial\Omega$ einer Hölderbedingung genügt [28]. Der Rand $\partial\Omega$ genügt einer Hölderbedingung, sofern die Funktion $\varphi(y_1,\ldots,y_{n-1})$ aus der Formel (7) hölderstetig ist.



Bemerkung 6. Wir hatten schon darauf aufmerksam gemacht, daß man das Verfahren aus [21] vermutlich auf unbeschränkte Gebiete, die gleichmäßig zur Klasse $C^\infty$ gehörten, ausdehnen kann.

**5. Die $(F)$-Räume $C_{p(x)}^{k,m}(\Omega)$.** In dem Abschnitt 2 haben wir uns unter anderem mit den Räumen $C_{1+x}^{k,m}\big((0,\infty)\big)$ beschäftigt (Satz 4). Es handelt sich um einen Spezialfall des Raumes $C_{p(x)}^{k,m}(\Omega)$ aus der Definition 3. Im mehrdimensionalen Fall $(n\geqslant 2)$ werden wir jetzt wieder wie im vorangegangenen Abschnitt beschränkte Gebiete der Klasse $C^\infty$ betrachten. Ferner setzen wir $p(x)\equiv 1$. Entsprechend den Bezeichnungen des ersten Abschnittes werden wir also die $(F)$-Räume $C^{\infty,k,m}(\overline{\Omega})$ erzeugen, $k\leqslant m$. Dabei können wir wieder $k<m$ voraussetzen, da wir den Fall $C^{\infty,m,m}(\overline{\Omega}) = C_0^\infty(\overline{\Omega})$ bereits erfaßt haben. Entsprechend den Untersuchungen des letzten Abschnittes ist die Methode vorgezeichnet. Sind $S_j$ wieder die gleichen saumförmigen Gebiete wie im letzten Abschnitt, so führen wir die Zerlegung (53) ein und konstruieren einen Operator $A_j$ der Form (54). Als $B_j$ wählen wir jetzt einen regulären elliptischen Differentialoperator der Ordnung $2(m-k)$ auf der kompakten $C^\infty$-Manigfaltigkeit $(\partial\Omega)_j$. $L_j$ sei ein allgemeiner Legendrescher Differentialoperator der Form (28) mit $t=m-k$ und $r=m-2k$. Wie man aus dem Satz 2(c) herleiten kann, leistet der Operator $A_j$ im Gebiet $S_j$ das Gewünschte. Man kann jetzt die einzelnen Operatoren $A_j$ zu einem Operator $A$ der Ordnung $2(m-k)$ zusammensetzen, der im Hilbertraum $L_2(\Omega)$ wirkt. Auf Einzelheiten können wir hier nicht eingehen.

Satz 7. *$\Omega\subset R_n$ sei ein beschränktes Gebiet der Klasse $C^\infty$.*

(a) *Es gibt einen wesentlich selbstadjungierten positiv-definiten Operator $A$ der Ordnung $2(m-k)$,*

$$(Af)(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2(m-k)} a_\alpha(x)D^\alpha f(x), \quad D(A) = C^{\infty,k,m}(\overline{\Omega}),$$

*so daß*

$$D(\bar{A}^\infty) = C^{\infty,k,m}(\overline{\Omega})$$

*ist.*

(b) *$\bar{A}$ ist ein Operator mit reinem Punktspektrum, die Eigenwerte seien $\lambda_l$. Es gibt vier positive Konstanten $c_1$, $c_2$, $a_1$ und $a_2$, so daß*

$$c_1 l^{a_1}\leqslant\lambda_l\leqslant c_2 l^{a_2}$$

*gilt.*

(c) *$C^{\infty,k,m}(\overline{\Omega})$ ist ein nuklearer $(F)$-Raum mit absoluter Basis. Er ist isomorph zu $s$.*

**6. Einige Probleme.** In diesem Abschnitt sollen vier Probleme angegeben werden, die teilweise früher schon genannt wurden.

Problem 1. $\Omega \subset R_n$ sei ein beschränktes Gebiet (der Klasse $C^\infty$). Man bestimme sämtliche $(F)$-Räume der Form

$$C(\bar{\Omega}) = \Big\{ f \mid f \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$
$$\sum_{|\alpha| \leq m_j} b_\alpha^{(j)}(x) D^\alpha f(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } j = 1, 2, \ldots \Big\},$$

die sich durch (reguläre oder singuläre) elliptische Differentialoperatoren in der früher angegebenen Weise erzeugen lassen.

Problem 2. Ist $A$ der Operator (40), so ist nach Satz 5(a) $D(\bar{A}^\infty) = S_{q(x)}(\Omega)$, sofern $q(x)$ die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt. Man beweise, daß eine Abschätzung der Form (18) ohne wesentliche weitere Zusatzvoraussetzungen an $q(x)$ besteht. Hieraus folgt dann, daß $S_{q(x)}(\Omega)$ isomorph zu $s$ ist. (Es ist klar, daß dies eine rein spektraltheoretische Aufgabe ist).

Problem 3. Man bestimme diejenigen Räume $S_{q(x)}(\Omega)$, die durch Differentialoperatoren der Form (48) mit den Bedingungen (49) und (50) erzeugt werden können.

Problem 4. $\Omega$ sei ein unbeschränktes Gebiet, daß gleichmäßig zur Klasse $C^\infty$ gehört. Man erzeuge die Räume $C_{p(x)}(\Omega)$ und $C_{p(x)}^{k,m}(\Omega)$ durch singuläre Differentialoperatoren im Sinne der Betrachtungen der Abschnitte 4 und 5.

**Literaturnachweis**


[1] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Princeton 1965.

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic, *Étude de la régularité et du spectre d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B 266, A336 — A338 (1968).

[3] — *Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Arch. Rat. Mech. Analysis 34 (1969), S. 361-379.

[4] F. E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators*, Math. Annalen 142 (1961), S. 22-130.

[5] И. М. Глазман, *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов*, Москва 1963.

[6] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoires Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[7] M. Guillemot-Teissier, *Séries de Legendre des distributions: Structures hilbertiennes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A—B 265, A461 — A464 (1967).

[8] D. Hewgill, *On the Eigenvalues of the Laplacian in an unbounded domain*, Arch. Rat. Mech. Analysis 27 (1967), S. 153-164.

[9] D. Kniepert, *Globale Aussagen über Eigenfunktionen eines singulären elliptischen Differentialoperators im Gebiet G*, Dissertation Aachen 1968.

[10] — *Generalization of a theorem due to H. Triebel concerning decay properties of eigenfunctions of singular elliptic differential operators*, Arch. Rat. Mech. Analysis 37 (1970), S. 61-72.

[11] T. Komura und Y. Komura, *Über die Einbettung der nuklearen Räume in* $(s)^A$, Math. Annalen 162 (1966), S. 284-288.





[12] А. Г. Костюченко, *Асимптотическое распределение собственных значений эллиптических операторов*, Докл. Акад. наук СССР 158 (1964), S. 41–44.

[13] Б. С. Митягин, *Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах*, Усп. мат. наук СССР 16 (1961), S. 63–132.

[14] E. Müller-Pfeiffer, *Differenzierbarkeitseigenschaften verallgemeinerter Lösungen der Schrödingergleichung*, Wiss. Zeitschr. Päd. Hochschule Erfurt-Mühlhausen

[15] — *Zur Theorie elliptischer und hypoelliptischer Differentialoperatoren*, Habilitationsschrift, Jena 1967.

[16] M. A. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, Berlin 1963 (Übersetzung aus dem Russischen).

[17] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Annali della Scuola Norm. sup. Pisa 13 (1959), S. 115-162.

[18] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 1969 (2. Auflage).

[19] — *Über die Erzeugung von (F)-Räumen durch selbstadjungierte Operatoren*, Math. Annalen 164, (1966), S. 219-224.

[20] H. Triebel, *Erzeugung nuklearer lokalkonvexer Räume durch singuläre Differentialoperatoren zweiter Ordnung*, ibidem 174 (1967), S. 163-176.

[21] — *Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes $C^\infty(\bar{\Omega})$ durch einen elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung*, ibidem 177 (1968), S. 247-264.

[22] — *Allgemeine Legendresche Differentialoperatoren I*, Journ. Function. Analysis 6 (1970), S. 1-25.

[23] — *Allgemeine Legendresche Differentialoperatoren II*, Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa 24 (1970), S. 1-35.

[24] — *Zur Spektraltheorie hypoelliptischer Differentialoperatoren*, Publ. Mathematicae 14 (1967), S. 125-149.

[25] — *Singuläre elliptische Differentialgleichungen und Interpolationssätze für Sobolev-Slobodeckij-Räume mit Gewichtsfunktionen*, Arch. Rat. Mech. Analysis 32 (1969), S. 113-134.

[26] J. Walter, *Symmetrie elliptischer Differentialoperatoren*, Math. Zeitschr. 98 (1967), S. 401-406.

[27] W. Wojtyński, *On bases in certain countably-Hilbert spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math., Astr. Phys. 14 (1966), S. 681-684.

[28] M. Zerner, *Développement en séries de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables*, C. R. Acad. Sci Paris Sér. A—B 268, A218 — A220 (1969).