

Applications p -radonifiantes et théorème de dualité

par

LAURENT SCHWARTZ (Paris)

Cet article ne saurait se suffire à lui-même. Les principaux résultats en ont été annoncés dans des Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (Schwartz [7]), et seront démontrés dans des livres ou articles à paraître prochainement (Schwartz [6], [11] et [12]).

1. Définitions. Soit E un espace vectoriel topologique sur $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , non nécessairement localement convexe, mais séparé par son dual. On appelle probabilité cylindrique λ sur E , la donnée d'un système cohérent de probabilités de Radon sur les quotients séparés de dimension finie de E . Un quotient séparé de dimension finie de E est de la forme E/F , où F est un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie; si G est fermé de codimension finie et si $G \subset F$, on a une application canonique $\pi_{E/F, E/G}$ de E/G sur E/F ; alors λ est la donnée d'une famille $(\lambda_{E/F})_{F \in \mathcal{F}}$ de probabilités $(\lambda_{E/F})_{F \in \mathcal{F}}$ probabilité sur E/F , \mathcal{F} ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de codimension finie de E , telle que, pour $G \subset F$, $\lambda_{E/F} = \pi_{E/F, E/G}(\lambda_{E/G})$; tel est le sens du mot *cohérent*. Si μ est une probabilité de Radon sur E (mesure ≥ 0 de masse 1 sur la tribu borélienne de E , intérieurement régulière, c.-à-d. vérifiant, pour tout B borélien de E ,

$$\mu(B) = \sup_{K \text{ compact} \subset B} \mu(K),$$

elle définit une probabilité cylindrique λ par $\lambda_{E/F} = \pi_{E/F, E}(\mu)$, où $\pi_{E/F, E}$ est la surjection canonique de E sur son quotient E/F ; cette application $\mu \rightarrow \lambda$ est injective, ce qui permet désormais d'identifier les probabilités de Radon à des probabilités cylindriques particulières.

THÉORÈME 1 (de Prokhorov [5]). *Soit λ une probabilité cylindrique sur E . Pour qu'elle soit une probabilité de Radon, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de E , tel que, pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\lambda_{E/F}(\pi_{E/F, E}(K)) \geq 1 - \varepsilon$.*

Les probabilités cylindriques sont étroitement liées aux fonctions aléatoires. Une *variable aléatoire* scalaire est la donnée d'un espace topologique Ω , d'une probabilité de Radon μ sur Ω , et d'une μ -classe f d'applications μ -mesurables de Ω dans \mathbf{K} . L'espace des variables aléatoires relatives à (Ω, μ) donné se notera $L^0(\Omega, \mu)$.

On introduira sur tous ces espaces des topologies. Sur l'espace $\mathcal{P}(X)$ des probabilités de Radon sur un espace topologique séparé X on introduit la *topologie étroite*; pour X complètement régulier, c'est la topologie de la convergence simple sur l'ensemble $\mathcal{B}(X)$ des fonctions scalaires continues bornées sur X . Sur l'espace $\check{\mathcal{P}}(E)$ des probabilités cylindriques sur E , on introduira la *topologie cylindrique*, la moins fine pour laquelle les applications $\lambda \rightarrow \lambda_{E/F}$ sont continues de $\check{\mathcal{P}}(E)$ dans $\mathcal{P}(E/F)$, $F \in \mathcal{F}$. Enfin sur $L^0(\Omega, \mu)$ on introduit la *topologie de la convergence en probabilité*; un système fondamental de voisinages de 0 dans $L^0(\Omega, \mu)$ est formé des ensembles

$$\{f \in L^0(\Omega, \mu); \mu\{\omega \in \Omega; |f(\omega)| > \delta\} \leq \varepsilon\}$$

pour $\varepsilon, \delta > 0$. Alors $f \rightarrow f(\mu)$ est une application continue de $L^0(\Omega, \mu)$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ (la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi).

On appelle maintenant *fonction aléatoire* f sur un ensemble T , une fonction de T à valeurs dans un espace de variables aléatoires $L^0(\Omega, \mu)$; pour tout $t \in T$, $f(t)$ est alors une variable aléatoire $\in L^0(\Omega, \mu)$. Si alors t_1, t_2, \dots, t_n sont des éléments de T en nombre fini, $(f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n))$ est une μ -classe d'applications μ -mesurables de Ω dans \mathbf{K}^n , donc définit une probabilité image de μ sur \mathbf{K}^n ; on l'appelle la *loi marginale de la fonction aléatoire* pour les valeurs t_1, t_2, \dots, t_n . On dit que deux fonctions aléatoires f, f' , relatives au même ensemble T , mais à des $(\Omega, \mu), (\Omega', \mu')$ éventuellement distincts, sont *isonomes* ou *équivalentes* ou *de même loi*, si les lois marginales de f et f' sont les mêmes, pour tout système fini t_1, t_2, \dots, t_n . Si T est un espace vectoriel ou un espace topologique, on dira que la fonction aléatoire f est *linéaire* ou *continue*, si elle est linéaire ou continue de T dans l'espace vectoriel topologique $L^0(\Omega, \mu)$. Cela ne dépend évidemment que de la classe d'isonomie de f .

THÉORÈME 2 (v. [5]). *Il existe une correspondance bijective entre les probabilités cylindriques sur E et les classes d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur E' ; si λ est une probabilité cylindrique, f_λ est l'unique classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur E' , pour laquelle la loi marginale de f_λ relative à $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in E'$, soit l'image de λ par l'application $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de E dans \mathbf{K}^n ; si f est une fonction aléatoire linéaire sur E' , λ_f est l'unique probabilité cylindrique sur E pour laquelle, pour $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in E'$, l'image de λ_f par l'application $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de E dans \mathbf{K}^n soit la loi marginale de f pour $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.*

2. L'ordre, le type, les applications radonifiantes. Une probabilité de Radon sur un Banach E est dite d'*ordre* $p > 0$, si la norme est de puissance p -ième intégrable. Elle est alors toujours aussi d'*ordre* $q \leq p$. Par définition, toute probabilité de Radon sur E est d'*ordre* 0. Si $p > 0$, on posera, pour λ de Radon sur E ,

$$\|\lambda\|_p = \left(\int \|x\|^p d\lambda(x) \right)^{1/p}.$$

Si E est un espace vectoriel topologique séparé par son dual et si λ est de Radon sur E , elle sera dite d'*ordre* p , s'il existe une partie B bornée équilibrée fermée de E , dont la jauge (qui vaut $+\infty$ en dehors de l'espace vectoriel E_B engendré par B) est de puissance p -ième intégrable pour λ (ce qui implique que λ soit portée par E_B).

Une probabilité cylindrique λ sur E est dite de *type* $p \geq 0$, si l'application f_λ de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$ est continue de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$. Elle est alors aussi de type $q \leq p$. On posera alors, pour $p > 0$ et E Banach:

$$\|\lambda\|_p^* = \|f_\lambda\|_{\mathcal{L}(E', L^p(\Omega, \mu))} = \sup_{\xi \in E', \|\xi\| \leq 1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p d(\xi(\lambda))(t) \right)^{1/p}.$$

Soient alors E, G , des espaces vectoriels topologiques séparés par leurs duals, u une application linéaire faiblement continue de E dans G . On dit que u est *p -radonifiante*, si l'image par u de toute probabilité cylindrique λ de type p sur E est une probabilité de Radon $u(\lambda)$ d'*ordre* p sur G . Avant de poursuivre, disons tout de suite, pour donner un exemple, qu'on démontre qu'une application linéaire continue d'un Hilbert dans un autre est p -radonifiante, pour un p fini ≥ 0 , si et seulement si elle est de Hilbert-Schmidt (1).

Il sera en fait difficile d'obtenir *directement* des critères permettant d'affirmer qu'une application est p -radonifiante. On devra passer par l'intermédiaire de propriétés d'approximation. On dira qu'une probabilité cylindrique λ sur un Banach E est de type p très approximable pour $p > 0$, si elle est limite cylindrique de probabilités de Radon λ_j , combinaisons linéaires de masses de Dirac, pour lesquelles $\|\lambda_j\|_p^*$ soit borné par un même nombre fini $M \geq 0$; la borne inférieure des nombres M possibles se notera $\|\lambda\|_p^{*ta}$; bien évidemment $\|\lambda\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^{*ta}$. On donne une définition analogue, un peu plus compliquée, pour $p = 0$ ou pour un espace vectoriel topologique quelconque E . On dira alors que u est *très approximativement p -radonifiante*, si, pour toute λ de type p très approximable, $u(\lambda)$ est de Radon d'*ordre* p . C'est une propriété apparemment un peu moins forte; nous verrons plus loin certains cas où les deux propriétés sont équivalentes.

(1) Cela résulte p. ex. de [6], 2-ème partie, chap. 3, § 3, théorème 2, et chap. 6, § 3, théorème 1.

3. Applications radonifiantes et applications sommantes dans le cas d'espaces de Banach. Une application linéaire continue u de E dans G est dite p -sommante, $p > 0$, si, pour toute suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , scalairement \mathcal{P} , la suite image $u(a) = (u(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est \mathcal{P} . On voit alors facilement que si on pose, pour une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\|a\|_p^* = \sup_{\xi \in E', \|\xi\| \leq 1} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle a_n, \xi \rangle|^p \right)^{1/p}$$

et, pour la suite $u(a)$,

$$\|u(a)\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u(a_n)\|^p \right)^{1/p},$$

alors u est p -sommante, si et seulement s'il existe un nombre fini $M \geq 0$ tel que l'on ait, pour toute suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , tous nuls sauf un nombre fini, l'inégalité

$$\|u(a)\|_p \leq M \|a\|_p^*.$$

Le plus petit nombre M ayant cette propriété se note $\pi_p(u)$, et l'on a la même inégalité pour une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arbitraire ⁽²⁾. On démontre alors le théorème suivant:

THÉORÈME 3 ⁽³⁾. Soient E, G des Banach, u une application linéaire continue de E dans G . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. u est p -sommante;
2. u est très approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$;
3. Si $p > 0$, il existe un $M \geq 0$ fini tel que, pour toute probabilité de Radon λ sur E , combinaison finie de masses ponctuelles, on ait

$$\|u(\lambda)\|_p \leq M \|\lambda\|_p^*.$$

Le plus petit nombre M ayant cette propriété est alors $\pi_p(u)$, et on a, pour λ quelconque, $\|u(\lambda)\|_p \leq M \|u\|_p^{*a}$.

Il est trivial que 2 implique 1 et que 1 implique 3, et c'est l'implication $3 \Rightarrow 2$ qui seule est à démontrer, pour $p > 0$; pour $p = 0$, 2 implique trivialement 1, et il faut montrer l'implication $1 \Rightarrow 3$. On peut ensuite chercher à améliorer ce théorème en éliminant le "très approximativement" et en remplaçant $\sigma(G'', G')$ par G . On dit que le couple (E, E') , E Banach, a la propriété d'approximation métrique si l'application identique de E' est limite simple d'applications linéaires de rang fini, de norme 1, con-

tinues de $\sigma(E', E)$ dans E' . Tous les espaces usuels ont cette propriété d'approximation, qui est un léger renforcement de celle que Banach a conjecturée pour les tous les espaces de Banach. Alors:

THÉORÈME 4. Soient E, G , de Banach, u une application linéaire continue de E dans G , très approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. Alors on peut supprimer "très approximativement", si (E, E') a la propriété d'approximation métrique ou si $p \geq 1$; on peut remplacer $\sigma(G'', G')$ par G si G est réflexif, ou si $1 < p < +\infty$ ⁽⁴⁾.

D'autre part on sait qu'une application p -sommante est a fortiori q -sommante pour $q \geq p$ (v. [5], prop. 5, p. 335). On peut montrer que toute application p -radonifiante entre espaces de Banach est aussi q -radonifiante pour $q \geq p$. (Le cas $p = 0$ est dû à Kwapien [8].)

4. Exemple d'application: le mouvement brownien. [Le théorème 3 permet d'appliquer tous les résultats de la théorie des applications p -sommantes. Donnons-en une application au mouvement brownien.

Définissons sur la droite réelle \mathbf{R} un opérateur de dérivation d'ordre réel (α d'ordre fractionnaire", comme on dit habituellement de façon assez stupide). Soit φ une fonction C^∞ à support compact, égale à 1 au voisinage de l'origine, et posons, pour une distribution T sur \mathbf{R} ,

$$D^\alpha T = Z^\alpha * T, \quad Z^\alpha = PfY(x)\varphi(x)x^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha),$$

Y fonction de Heaviside, pour $\alpha \notin \mathbb{N}$, et $Z^n = \delta^{(n)}$. On dira que $D^\alpha T$ est la dérivée d'ordre α de T , $\alpha \in \mathbf{R}$ (sous entendu: modulo les fonctions C^∞). On vérifie alors aisément que $D^{\alpha+\beta} T = D^\alpha D^\beta T + \rho * T$, ρ fonction C^∞ à support compact; en particulier, $D^{-\alpha} T$ peut être appelée une primitive d'ordre α de T , puisque $D^\alpha(D^{-\alpha} T) = T +$ fonction C^∞ . Ces opérateurs dépendent du choix de la fonction φ , mais la différence entre les $D^\alpha T$ correspondant à deux fonctions φ différentes est une fonction C^∞ ; tant qu'il s'agira seulement de dire qu'une distribution a une dérivée d'ordre α dans L'_{loc} ou d'autres propriétés de ce genre, le choix de φ est donc sans importance. Par contre, au lieu de prendre $Y(x)x^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$, on aurait pu prendre $e^{-ix} Y(-x)(-x)^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$, ou beaucoup d'autres opérateurs. Pour l'étude de la régularité locale des distributions, ces différents opérateurs ne donnent pas tous le même résultat; dire qu'une fonction a sa dérivée d'ordre α qui est continue n'a donc pas de sens si l'on ne précise pas l'opérateur choisi. Nous en choisissons donc un une fois pour toutes; et on trouvera de toute façon des résultats qui seraient aussi, en fait, valables avec bien d'autres opérateurs. Nous considérerons alors des espaces de distributions \mathcal{W} sur \mathbf{R} du type suivant:

⁽²⁾ Les applications p -sommantes ont été introduites par Pietsch et systématiquement étudiées dans [4].

⁽³⁾ La relation entre applications p -sommantes et applications très approximativement p -radonifiantes est due à Kwapien. Voir [7].

⁽⁴⁾ La possibilité de remplacer $\sigma(G'', G')$ par G lorsque $1 < p < +\infty$, se démontre en utilisant les applications p -sommantes et la représentation de Pietsch de celles-ci, et est due à Kwapien.

1. $E(\mathbf{R}) \subset W \subset D'(\mathbf{R})$, avec des injections continues;
2. La convolution avec une mesure μ à support compact est continue de W dans W .

Exemples. $W = L^p_{loc}, 1 \leq p \leq +\infty$; $W = C$, espace des fonctions continues, $W = M$, espace des mesures de Radon (pour la topologie forte ou vague). On appellera alors W^α l'espace vectoriel des distribution T dont la dérivée $D^\alpha T$ est dans W ; dans ce cas, la dérivée de tout ordre $\beta \leq \alpha, D^\beta T$, sera aussi dans W , car $D^\beta T = D^{\beta-\alpha}(D^\alpha T)$ + fonction C^∞ , et $D^{\beta-\alpha}$, avec $\beta - \alpha \leq 0$, est la convolution avec une mesure à support compact. On dira que T converge vers 0 dans W^α , si T converge vers 0 dans \mathcal{D}' et si $D^\alpha T$ converge vers 0 dans W ; alors T converge aussi vers 0 dans W^β pour $\beta \leq \alpha$; D^ν est un opérateur linéaire continu de W^α dans $W^{\alpha-\nu}$, et si T converge vers 0 dans \mathcal{D}' et $D^\nu T$ dans $W^{\alpha-\nu}$, T converge vers 0 dans W^α . Les espaces de Sobolev H^s_{loc} ne sont autres que $(L^2_{loc})^s$. L'espace W^α vérifie encore les conditions 1 et 2 ci-dessus. Soit alors X un compact, ν une mesure de Radon ≥ 0 sur X ; on sait que l'application canonique $C(X) \rightarrow L^p(X, \nu)$ ou même $L^\infty(X, \nu) \rightarrow L^p(X, \nu)$ est p -sommante, pour $1 < p < +\infty$ ⁽⁵⁾; donc elle est aussi p -radonifiante. De là on déduit aisément que, sur \mathbf{R} , l'injection canonique de C ou L^∞_{loc} dans L^p_{loc} est p -radonifiante, toujours pour $1 < p < +\infty$. Nous nous proposons de chercher une condition suffisante pour que $(L^a_{loc})^\alpha \subset (L^b_{loc})^\beta (1 \leq a, b \leq +\infty)$ et que l'injection soit p -radonifiante. Prenons d'abord $1 < p < +\infty$. Il suffit qu'on puisse trouver γ et δ tels que l'intégration $D^{-\gamma}$ opère continuellement de L^α_{loc} dans L^∞_{loc} , et $D^{-\delta}$ de L^b_{loc} dans L^p_{loc} , c.-à-d., d'après les inégalités de Sobolev ⁽⁶⁾:

$$\gamma > \frac{1}{a}, \quad \delta > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}\right)^+ = \text{Max}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}, 0\right),$$

avec $\alpha - \beta = \gamma + \delta$. En effet, dans ce cas, la factorisation $D^{-\beta} D^{-\delta} D^{-\gamma} D^\alpha$

$$(L^a_{loc})^\alpha \xrightarrow{D^\alpha} L^\infty_{loc} \xrightarrow{D^{-\gamma}} L^\infty_{loc} \rightarrow L^p_{loc} \xrightarrow{D^{-\delta}} L^p_{loc} \xrightarrow{D^{-\beta}} (L^b_{loc})^\beta$$

diffère de l'identité par une convolution avec une fonction de \mathcal{D} , opération p -radonifiante, et elle passe à travers une injection $L^\infty_{loc} \rightarrow L^p_{loc}$, p -radonifiante, donc l'identité $(L^a_{loc})^\alpha \rightarrow (L^b_{loc})^\beta$ sera bien p -radonifiante. Or de tels γ, δ peuvent être trouvés si

$$\alpha - \beta > \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}\right)^+$$

⁽⁵⁾ Cella résulte de la décomposition de Pietsch, dont c'est la partie évidente. Voir [4], théorème 2, p. 341.

⁽⁶⁾ Voir par exemple [8], chap. VI, § 6, lemme précédant le théorème XV, p. 181.

Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ se rattrapent du fait que nous avons pris des inégalités strictes, et finalement:

THÉORÈME 5. Soient $1 \leq a, b \leq +\infty, 1 \leq p \leq +\infty$. L'injection canonique $(L^a_{loc})^\alpha \subset (L^b_{loc})^\beta$ (définie si $\alpha - \beta > (1/a - 1/b)^+$), est sûrement p -radonifiante si $\alpha - \beta > 1/a + (1/p - 1/b)^+$.

COROLLAIRE. La fonction aléatoire du mouvement brownien est presque sûrement continue, et höldérienne de tout ordre $< 1/2$ ⁽⁷⁾.

Démonstration. La dérivée de la fonction aléatoire du mouvement brownien est une distribution aléatoire, dont la probabilité cylindrique associée est la probabilité de Gauss sur $L^2(\mathbf{R}_+)$. Donc elle même a une probabilité cylindrique associée qui est l'image de la probabilité de Gauss de $L^2(\mathbf{R}_+)$ par l'intégration, qui à f associe

$$x \rightarrow \int_0^x f(t) dt,$$

opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbf{R}_+)$ dans $H^1_{loc}(\mathbf{R}_+) = (L^2_{loc}(\mathbf{R}_+))^{1/2}$. Par ailleurs, la probabilité de Gauss est de type p pour tout p fini. Le passage des formules sur \mathbf{R}_+ à des formules sur \mathbf{R} n'offrant aucune difficulté, on voit que la probabilité cylindrique associée à la fonction du mouvement brownien est de type p sur $(L^2_{loc})^1$ pour tout p fini. Donc elle est de Radon d'ordre p sur $(L^\infty_{loc})^\beta$ ou C^β , dès que $1 - \beta > \frac{1}{2} + 1/p$, ou $\beta < \frac{1}{2} - 1/p$; comme p est fini arbitraire, elle est de Radon d'ordre p fini arbitraire sur C^β , dès que $\beta < 1/2$. Or on peut voir que les fonctions de C^β satisfont toujours à une condition de Hölder d'ordre $< \beta$, c.q.f.d.

Remarque. On sait que l'inégalité $\beta < 1/2$ ne peut pas être améliorée, autrement dit l'application canonique de $(L^2_{loc})^1$ dans C^β n'est certainement pas p -radonifiante, p fini, si $\beta > 1/2$; en effet, elle ne l'est même pas de H^1_{loc} dans $H^{1/2}_{loc}$, parce que, sur un intervalle compact, $H^1 \rightarrow H^{1/2}$ n'est pas de Hilbert-Schmidt. On peut montrer aussi que l'application identique de $(L^2_{loc})^1$ dans C , qui est p -radonifiante pour $p > 2$, ne l'est pas pour $p = 2$.

Des résultats analogues pourraient être obtenus avec les fonctions aléatoires à accroissements indépendants correspondant aux lois stables d'exposant $s, 1 < s < 2$.

5. Le théorème de dualité. Soit E de Banach. Une probabilité cylindrique ρ sur E est dite de cotype p , si, f_ϵ étant une application linéaire associée, $E' \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$, la convergence de $f_\epsilon(\xi)$ vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$

⁽⁷⁾ Ce résultat est bien connu, et on peut obtenir de bien meilleures précisions. Voir par exemple [3], chap. VI.

entraîne la convergence de ξ vers 0 dans E' . Pour $p > 0$, on peut poser

$$\| \xi \|_p = \sup_{\xi \in E', \|\xi\| \geq 1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (|t|^p d\xi(\varrho)(t))^{-1/p} \right).$$

La probabilité cylindrique de Gauss ϱ sur un Hilbert est à la fois type et de cotype p pour tout $p \geq 0$ fini; $f_\varrho(\xi)$ suit une loi de Gauss de paramètre $\|\xi\|$, de sorte que l'intégrale

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p d(\xi(\varrho))(t) \right)^{1/p}$$

est, pour un $p > 0$ donné, proportionnelle à $\|\xi\|$. Elle est aussi de cotype $+\infty$.

THÉORÈME 6 (de dualité). Soit E (resp. $\sigma(F', F)$) un Banach (resp. un dual *-faible d'un Banach), et soit G un Banach ou un dual *-faible d'un Banach; soit u une application linéaire faiblement continue de E (resp. $\sigma(F', F)$) dans G . S'il existe une probabilité cylindrique ϱ sur E (resp. $\sigma(F', F)$), de cotype p , dont l'image $u(\varrho)$ soit de Radon d'ordre p sur $\sigma(G', G')$, alors u est très approximativement p -radonifiante de $\sigma(G', G')$ dans $\sigma(E', E)$ (resp. $\sigma(F'', F')$).

Comme l'a montré Kwapien, on peut déduire ce théorème de l'inégalité de Pietsch dans le cas $p > 0$, compte tenu du théorème 3 qui ramène les applications très approximativement p -radonifiantes aux applications p -sommantes. De toute façon, dans la pratique, c'est essentiellement sous la forme de ce théorème de dualité qu'on trouvera presque toutes les applications p -radonifiantes connues.

Exemples d'applications. 1. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs ± 1 avec la probabilité $1/2$ (jeu de pile ou face, ou fonctions de Rademacher). On sait alors que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n Z_n$ converge en moyenne d'ordre p , p fini, ou en probabilité, $p = 0$, si et seulement si

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 < +\infty.$$

Cela signifie que la suite des Z_n définit une probabilité cylindrique sur l^2 , de type et de cotype p pour tout $p \geq 0$ fini, et aussi de cotype $+\infty$ (exactement comme la probabilité cylindrique de Gauss). Comme les Z_n valent ± 1 , donc sont bornées, cette probabilité est de Radon sur $\sigma(l^\infty, l^1)$. On en déduit que l'injection canonique de l^1 (ou même de $\sigma(l^1, c^0)$) dans l^2 est p -radonifiante, pour tout $p \geq 0$. Cet énoncé, donné sous cette forme par Kwapien [2], se traduit comme suit en termes de suites de variables aléatoires. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, ayant la propriété suivante: pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 à l'infini, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X_n$ est convergente en moyenne d'ordre p , $p > 0$ (resp. en probabilité,

$p = 0$); alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n|^2$ est presque sûrement convergente, et en outre, si $p > 0$,

$$\text{Esp} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n|^2 \right)^{p/2} < +\infty \quad (8).$$

2. Soit (e^{2imnt}) , $n \in \mathbb{Z}$, la suite des variables aléatoires de Fourier tout $p \geq 1$, dire que la somme $\sum c_n e^{2imnt}$ tend vers 0 en moyenne d'ordre p équivaut à dire que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{F}L^p$, d'après la définition même de l'espace $\mathcal{F}L^p$ des suites de Fourier de fonctions de l^p ; pour simplifier, prenons p fini. Ici encore les Z_n sont bornées. Donc cette suite définit une probabilité cylindrique sur le dual $\sigma((\mathcal{F}L^p)', \mathcal{F}L^p)$, de type et cotype p , et une probabilité de Radon d'ordre p sur $\sigma(l^\infty, l^1)$. Donc l'application identique de l^1 , ou même de $\sigma(l^1, c^0)$, dans $\mathcal{F}L^p$ est p -radonifiante pour $1 \leq p < +\infty$. En termes de suites de variables aléatoires, cela peut s'exprimer comme suit: soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires, telle que, pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tendant vers 0 à l'infini, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X_n$ soit convergente en moyenne d'ordre p ; alors la suite des X_n est presque sûrement la suite de Fourier d'une fonction de l^p , et on a une inégalité sur l'espérance mathématique. On réobtient ainsi certains résultats de Paley-Zygmund (9). On peut utilement comparer les résultats de 1 et 2, puisque tous les deux partent de la même hypothèse, et aboutissent à des conclusions différentes: le résultat 1 est meilleur si $p \leq 2$, le résultat 2 est meilleur si $p \geq 2$, car $\mathcal{F}L^p$ contient l^2 pour $p \leq 2$ et est contenu dans l^2 pour $p \geq 2$. Dans chaque cas, le résultat est sans doute très éloigné du meilleur qu'on puisse donner. Par exemple pour $p = +\infty$, on devrait ici remplacer $\mathcal{F}L^\infty$ par $\sigma(\mathcal{F}L^\infty, \mathcal{F}L^1)$, alors que le résultat est trivialement vrai avec $\sigma(l^1, c^0)$, qui est bien meilleur!

3. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant une loi stable de Paul Levy ([3], chap. V) d'indice s , $0 < s \leq 2$. Alors la variable $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n Z_n$ suit une loi analogue, de paramètre $\|c\|_s$; donc cette suite définit une probabilité cylindrique sur $l^{s'}$ (sur $\sigma(l^\infty, l^s)$ pour $s < 1$), de type et cotype p , pour tout $p < s$ si $s < 2$, p fini pour $s = 2$. Bornons-nous à $p = 0$. On sait exactement, grâce au théorème des trois séries de Kolmogorov, quand la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n Z_n|^q$, $0 < q \leq 2$, est presque sûrement convergente: il faut et il suffit que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^q < +\infty,$$

(8) Esp. veut dire l'espérance mathématique. Pour $p = 0$ cet énoncé a été démontré il y a longtemps par Khintchine-Kolmogorov. Voir Kwapien [2].

(9) Par exemple, la prop. 10 du § 4 du chap. 5, p. 44, de Kahane [1], s'en déduit aisément.

avec $r = \text{Min}(s, q)$ si $s \neq q$ ou $s = q = 2$, et que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^q \left(1 + \left| \log \frac{1}{|\alpha_n|} \right| \right) < +\infty,$$

si $s = q \neq 2$. On en déduit pour $0 < s, q \leq 2$: l'application „multiplication par α^n ”, soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est 0-radonifiante de $\mathcal{L}^{s'}$ ($\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^s)$ si $s < 1$) dans \mathcal{L}^q , si et seulement si $\alpha \in \mathcal{L}^r$, $r = \text{Min}(s, q)$, pour $s \neq q$ ou $s = q = 2$, si

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^q \left(1 + \left| \log \frac{1}{|\alpha_n|} \right| \right) < +\infty \quad \forall \mathbb{1} \text{ pour } s = q \neq 2.$$

C'est par cette méthode que nous avons caractérisé les applications 0-radonifiantes diagonales entre les espaces de suites ⁽¹⁰⁾. Pietsch a caractérisé les applications diagonales 2-radonifiantes dans les espaces de suites ⁽¹¹⁾; le cas général des applications p -radonifiantes entre espaces de suites reste ouvert pour les valeurs quelconques de p , mais relève très probablement du théorème de dualité.

4. Appliquons le théorème 6 de dualité à partir du résultat du théorème 4. Considérons la probabilité de Gauss sur l'espace de Sobolev H^α ; elle est de type et cotype $p \geq 0$ fini arbitraire, et aussi de cotype $+\infty$; son image dans C^β est de Radon d'ordre p fini arbitraire, pourvu que $\alpha - \beta > 1/2$. On peut donc appliquer le théorème de dualité avec $\mathcal{E} = (L^2)^\alpha$, $\mathcal{G} = C^\beta$; les duals sont $(L^2)^{-\alpha}$, M_{comp}^{-p} (M_{comp} espace des mesures de Radon à support compact); on passe aisément de là à $(L_{\text{loc}}^2)^{-\alpha}$ et à $M^{-\beta}$, et on voit que l'application identique de M^γ (ou aussi $(L_{\text{loc}}^1)^\gamma$) dans $(L_{\text{loc}}^2)^\delta$ est p -radonifiante, pour tout $p \geq 0$, si $\gamma - \delta > 1/2$.

Ce résultat est bien meilleur que celui que donnait le théorème 4 lui-même, d'où l'on aurait en effet déduit la condition $\gamma - \delta > 1 + (1/p - 1/2)^+$. D'autre part, le théorème 4 ne permettait jamais d'obtenir des résultats pour $p < 1$, ici nous pouvons aller jusqu'à $p = 0$, avec l'inégalité $\gamma - \delta > 1/2$ indépendante de p . Le problème de la caractérisation des applications p -radonifiantes de $(L_{\text{loc}}^a)^\alpha$ dans $(L_{\text{loc}}^b)^\beta$, dépendant des 5 paramètres a, α, b, β, p , est encore largement ouvert, et susceptible de donner bien du plaisir.

Travaux cités

- [1] J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, Lexington 1968.
 [2] S. Kwapien, C. R. Acad. Sc. 267 (1968), série A, p. 698.
 [3] P. Levy, *Processus stochastique et mouvement brownien*, Paris 1965.

- [4] A. Pietsch, *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. 28 (1967), p. 334-353.
 [5] U. V. Prokhorov, *Convergence of random processes and limit theorems in the theory of probability*, Theory of probability and its applications 1 (1956), p. 157-214.
 [6] L. Schwartz, *Measures on arbitrary topological spaces*, à paraître, Tata Institute for Fundamental Research, Bombay 1971.
 [7] — Notes aux C. R. Acad. Sc. 268 (1969), série A, p. 1410-1413, et 268 (1969), p. 1612-1615.
 [8] — *Théorie des distributions*, Paris 1966.
 [9] — *Mesures cylindriques et applications radonifiantes dans les espaces de suites*, Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, Avril 1969.
 [10] — *Applications radonifiantes*, à paraître au Journal de la Société Mathématique Japonaise, en hommage au Professeur Yosida, 1971.
 [11] — *Applications radonifiantes*, Séminaire d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1969-70.

⁽¹⁰⁾ On trouvera tous ces résultats détaillés dans [9].

⁽¹¹⁾ Article non paru, communication personnelle.