Let $f(x, y) \in S(P(X), C)$. Then

$$x \to f(x, \cdot)$$

is a continuous map from X into C.

We want to prove that it is analytic at interior points of X. We will do that by proving that $c^*(f(x, \cdot))$ is analytic at interior points of X for $c^* \in C^*$.

Let x_0 be an interior point of X, and $c^* \in C^*$. We shall prove that

$$\int_\gamma c^* f(x, \cdot)\, dx = 0,$$

where γ is any circle around x_0 contained in the interior of X.

Now finite linear combinations of elements of the form ε_{y_i} (evaluation at y_i) are weak* dense in C^*, i.e.

$$\int_\gamma c^* f(x, \cdot)\, dx = c^* \int_\gamma f(x, \cdot)\, dx$$

can be approximated by

$$\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_{y_i} \int_\gamma f(x, \cdot)\, dx,$$

but the last expression is equal to

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_\gamma f(x, y_i)\, dx$$

and this expression is 0 by the assumption on f.

References

[1] F. Birtel, *Products of maximal function algebras*, Proc. Int. Symp. Function Alg., Tulane 1965.

[2] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pac. J. Math. 1 (1951), p. 353-367.

[3] L. Eifler, *The slice product of function algebras* (to appear).

[4] W. Rudin, *Real and complex analysis*, New York 1966.

Reçu par la Rédaction le 18. 4. 1969

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXV. (1970)

Sur la théorie semi-classique du potentiel pour les processus à accroissements indépendants

par

J. ZABCZYK (Warszawa)

0. Introduction. Soit A un ensemble compact, $A \subset R^d$ avec une frontière assez régulière, $X = \{x_t, P^x\}$ un mouvement brownien dans R^d (pour simplifier les notations nous supposons $d \geqslant 3$). Posons

$$\tau_0 = \inf\{t\colon \int_0^t I_A(x_s)\, ds > 0\}.$$

En 1951 Kac [9] a prouvé que

$$B_1^A(x) = P^x(\tau_0 < +\infty) \tag{0.1}$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} e^{-t/\lambda_j} \int_A G(x, y)\varphi_j(y)\, dy \cdot \int_A \varphi_j(y)\, dy,$$

où B_1^A est le potentiel capacitaire de A,

$$G(x, y) = \frac{\Gamma(d/2-1)}{2(\pi)^{d/2}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{d-2}}$$

et $(\lambda_j, \varphi_j)_{j \geqslant 1}$ est le système des valeurs et des fonctions propres de la transformation G_A:

$$G_A f(x) = \int_A G(x, y) f(y)\, dy, \quad x \in A,\ f \in L^2(A).$$

Ciesielski [2] a montré ensuite, que la formule (0.1) est vraie pour tout ensemble compact A, à condition qu'on y remplace le potentiel B_1^A par

$$S_1^A(x) = \inf\{v(x)\colon v \geqslant 1 \text{ p.p. sur } A,\ v \text{ surharmonique},\ v \geqslant 0\}$$

(p.p. signifie sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle). En introduisant le potentiel S_1^A on peut développer une théorie du potentiel analogue à la théorie classique: la théorie semi-classique (voir [2], [3] et [4]). Ces résultats ont été étendus par Stroock [14]. Il a considéré les processus de diffusion (symétriques) et les équations qu'il a obtenues lui ont permis de démontrer les formules suivantes:

$$S_f^A(x) = E^x(f(x_{\tau_0})), \quad f \text{ surharmonique} \geqslant 0, \tag{0.2}$$

où $S_f^A(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf\{v(x)\colon\ v \geqslant f \text{ p.p. sur } A, v \text{ surharmonique} \geqslant 0\}$,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} e^{-t/\lambda_j} G_A \varphi_j(x)(f, \varphi_j) \uparrow E^x(f(x_{\tau_0})), \quad t \downarrow 0. \tag{0.3}$$

Dans ce travail nous étudierons la théorie semi-classique pour les processus à accroissements indépendants. Nous cherchons d'abord pour quels processus à accroissements indépendants l'égalité (0.2) est vraie et nous prouvons que dans ce cas est valable la définition "minimax" de s-balayée. Nous obtenons aussi des formules un peu différentes de celles données dans [14].

Je voudrais exprimer ici mes remerciements à M. Z. Ciesielski, sous la direction duquel ce travail a été écrit.

1. Définitions et théorèmes préliminaires. On appelle *processus à accroissements indépendants* (en abrégé à ac. ind.) un processus de Markov X à valeurs dans R^d, satisfaisant aux propriétés suivantes:

1° la fonction de transition de X est stationnaire;

2° la fonction de transition de X est invariante par translation (la relation $P_t(x, A) = P_t(0, A-x)$, A borelien, $x \in R^d$ est vérifiée identiquement);

3° $P_t(x, dy) \to \delta_x$ vaguement lorsque $t \to 0$.

Nous allons désigner le processus à ac. ind. par $X = \{x_t, P^x\}$ (alors $P^x(x_t \in A) = P_t(x, A)$).

Notons μ_t la measure $P_t(0, dy)$. Rappelons que ([1], [13])

$$F\mu_t(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{R^d} e^{i(x,y)} \mu_t(dy) = e^{-t\lambda(x)}, \tag{1.1}$$

où

$$\lambda(x) = i(a, x) + \frac{1}{2}(Bx, x) + \int_{R^d} \left(1 - e^{i(x,y)} + \frac{i(x, y)}{1+|y|^2}\right) \nu(dy) \tag{1.2}$$

et $a \in R^d$, B étant une transformation symétrique et positive dans R^d, ν une mesure telle que

$$\nu\{0\} = 0, \qquad \int_{R^d} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} \nu(dy) < +\infty.$$

On peut exiger que X soit un processus de Hunt ([1], p. 45-46). On dit qu'un processus X à ac. ind. est *transient* si et seulement si P^0-presque toute trajectoire du processus X s'éloigne à l'infini ($|x_t| \to +\infty$ si $t \to +\infty$). Les processus qui ne sont pas transients sont appelés *récurrents*.

Les processus transients sont caractérisés par le théorème suivant:

(1.3) THÉORÈME (Kingman [10]). *Soit X un processus à ac. ind.; les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *X est transient.*

2. *Si $y_n = x_n - x_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, on a $\lim_n |y_1 + y_2 + \ldots + y_n| = +\infty$ P^0-presque partout.*

3. $\overline{\lim_{a \downarrow 0}} \int_{|x| \leqslant r} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{a + \lambda(x)}\right) dx < +\infty$ *pour* $r > 0$.

4. *Pour tout ensemble borelien borné A la fonction*

$$U(x, A) = \int_0^{+\infty} P_t(x, A)\, dt, \quad x \in R^d,$$

est bornée.

Nous désignerons par S (S^a) l'ensemble des fonctions excessives (a-excessives) par rapport à X (voir [1], p. 72).

Si $A \in \boldsymbol{B}(R^d)$, où $\boldsymbol{B}(R^d)$ est la tribu des ensembles boreliens sur R^d, et si I_A est la fonction caractéristique de A, les fonctions

$$U(x, A) \stackrel{\mathrm{df}}{=} E^x\Big(\int_0^{+\infty} I_A(x_s)\, ds\Big) = \int_0^{+\infty} P_t(x, A)\, dt,$$

$$U^a(x, A) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-at} P_t(x, A)\, dt, \quad x \in R^d,\ a > 0,$$

sont respectivement la première excessive et la deuxième a-excessive. Si $g \geqslant 0$ est une fonction $\boldsymbol{B}$-mesurable, le potentiel Ug de la fonction g donné par

$$Ug(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} E^x\Big(\int_0^{+\infty} g(x_t)\, dt\Big)$$

est un élément de S. D'une façon analogue $U^a g \in S^a$, où

$$U^a g(x) = E^x\Big(\int_0^{+\infty} e^{-at} g(x_t)\, dt\Big), \quad x \in R^d.$$

On dit qu'un ensemble $A \in \boldsymbol{B}$ est de *potentiel nul* si l'on a

$$U(x, A) = 0 \quad \text{pour tout } x \in R^d.$$

Finalement, nous désignerons par l_d la mesure de Lebesgue dans R^d. Démontrons maintenant le théorème suivant:

(1.4) THÉORÈME. *Les ensembles boreliens l_d-négligeables sont éxactement ceux de potentiel nul si et seulement si toute fonction excessive est semi-continue inférieurement.*

(1.5) LEMME. *Si A est de potentiel nul, $l_d(A) = 0$.*

Démonstration. Supposons qu'un ensemble A soit de potentiel nul. Evidemment, $U^{\alpha}(x, A) = 0, x \in R^d, \alpha > 0$. Mais

$$U^{\alpha}(x, A) = U^{\alpha}(0, A-x) = \int_{R^d} I_A(x+y)\, U^{\alpha}(0, dy),$$

donc

$$\int_{R^d}\int_{R^d} I_A(x+y)\, U^{\alpha}(0, dy)\, l_d(dx) = 0.$$

Par conséquent,

$$l_d(A)\, U^{\alpha}(0, R^d) = l_d(A)\cdot\frac{1}{\alpha} = 0,$$

donc

$$l_d(A) = 0.$$

(1.6) Lemme. *Si un ensemble compact A n'est pas de potentiel nul, il existe un point $x \in A$ tel que*

$$P^x(\tau_0 = 0) = 1, \quad \textit{où } \tau_0 = \inf\{t\colon \int_0^t I_A(x_s)\, ds > 0\}.$$

Démonstration ([1], p. 213). Supposons que $U(y, A) > 0$ et que pour tout $z \in A$

$$P^z(\tau_0 > 0) = 1.$$

Nous avons

$$U(y, A) = E^y\Big(\int_{\tau_0}^{+\infty} I_A(x_s)\, ds\Big);$$

alors $P^y(\tau_0 < +\infty) > 0$ et, par conséquent,

$$\lim_{t\downarrow 0} P^y\Big(\int_{\tau_0}^{\tau_0+t} I_A(x_s)\, ds > 0\Big) > 0.$$

D'autre part,

$$\lim_{t\downarrow 0} P^y\Big(\int_{\tau_0}^{\tau_0+t} I_A(x_s)\, ds > 0\Big) = \lim_{t\downarrow 0} E^y\Big(P^{x_{\tau_0}}\Big(\int_0^t I_A(x_s)\, ds > 0\Big)\Big) = 0.$$

Démonstration du théorème (1.4). Admettons que tout ensemble $A \in \boldsymbol{B}$, l_d-négligeable, soit de potentiel nul. Dans ce cas il existe des fonctions intégrables G^{α} telles que

$$U^{\alpha} f(x) = \int_{R^d} G^{\alpha}(y-x) f(y)\, dy, \quad x \in R^d.$$

Si f est une fonction bornée, la fonction $U^{\alpha} f$ est continue, car $U^{\alpha} f = f * \check{G}^{\alpha}$ $(\check{G}^{\alpha}(y) = G^{\alpha}(-y))$, et la convolée d'une fonction bornée et d'une fonction intégrable est une fonction continue. Toute fonction α-excessive est la limite d'une suite croissante de potentiels de fonctions bornées, c'est pourquoi toute fonction α-excessive $(\alpha > 0)$ est semi-continue inférieurement. Il suffit de remarquer que $S \subset S^{\alpha}$.

Supposons que chaque fonction excessive soit semi-continue inférieurement. Nous distinguerons deux cas.

1° *X est un processus transient.* Nous pouvons construire une mesure finie ξ telle que $\xi(A) = 0$ pour tout ensemble A de potentiel nul et, réciproquement, si $A \in \boldsymbol{B}$ et $\xi(A) = 0$, A est de potentiel nul ([1], p. 197). Un ensemble A est de potentiel nul si et seulement si $A+x$ est de potentiel nul; alors les mesures ξ et l_d sont équivalentes sur R^d ([7], p. 439).

2° *Le processus X est récurrent.* Commençons par prouver que les fonctions excessives sont constantes. Dans ce but il suffit de montrer que (voir [1], p. 89)

$$(1.7) \qquad P^0(T_{K_r(x)} < +\infty) = 1 \quad \text{pour tous } x \in R^d, r > 0,$$

où $K_r(x) = \{y\colon |x-y| \leqslant r\}$, $T_{K_r(x)} = \inf\{t > 0\colon x_t \in K_r(x)\}$.

Définissons

$$F = \{x\colon P^0(T_{K_r(x)} < +\infty) > 0 \quad \text{pour tout } r > 0\}.$$

Comme dans le travail [5], nous prouvons que F est une groupe fermé, non vide et que (1.7) est vérifié pour tout $x \in F$. Mais la fonction I_F est excessive, donc $F = R^d$ (I_F est semi-continue inférieurement seulement si $F = R^d$). En vertu du lemme (1.5) on a $l_d(A) = 0$ si A est de potentiel nul. Supposons que A soit un ensemble compact et $U^{\alpha}(y, A) > 0$ pour un point $y \in R^d$. D'après le lemme (1.6) il existe un point $x \in R^d$ tel que $P^x(\tau_0 < +\infty) = 1$. La fonction $z \to P^z(\tau_0 < +\infty)$ est excessive, par conséquent, pour tout $z \in R^d$, nous avons $U^{\alpha}(z, A) > 0$. Mais

$$\int_{R^d} U^{\alpha}(z, A)\, l_d(dz) = l_d(A)\cdot\frac{1}{\alpha} > 0;$$

alors $l_d(A) > 0$. Cela achéve la démonstration.

Nous appellerons *s-processus* un processus à ac. ind. pour lequel les fonctions excessives sont semi-continues inférieurement.

Remarques.

(1.8) Si le s-processus X est transient, la mesure $U(0, dx)$ est une mesure de Radon (voir le théorème (1.3)) et on peut trouver une fonction G telle que $U(0, dx) = G(x)\, dx$ et que pour tout $y \in R^d$ la fonction $x \to G(y-x)$ soit excessive ([1], p. 254). On appelle la fonction $G(y-x)$, $x, y \in R^d$, *fonction de Green* du processus.

(1.9) Même si un s-processus X est transient et isotrope (voir (4.5)), l'ensemble $\{x\colon G(x) = +\infty\}$ peut être non dénombrable. Pour le voir posons

$$\lambda(x) = |x|^{\alpha} + \tilde{\lambda}(x), \quad \tilde{\lambda}(x) = \int_{R^d} (1 - e^{i(x,y)})\, \nu(dy),$$

où $\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s_{r_n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$, $a_n, r_n > 0$ et s_{r_n} désigne une mesure uniformément répartie sur $S_{r_n}(0) = \{x\colon |x| = r_n\}$ dont la masse totale est l'unité. On peut montrer que si $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$ et $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_{r_n}(0)$, on a $G(x) = +\infty$.

2. La balayée forte (**s-balayée**). Si $A \in \boldsymbol{B}(R^d)$ et f est une fonction excessive ($f \in S$) on pose (voir [3], [4])

$$S_f^A(x) = \inf\{v(x)\colon v \geqslant f \text{ p.p. sur } A,\ v \in S\}.$$

Introduisons les temps d'arrêt

$$\tau_t = \inf\{s\colon \int_0^s I_A(x_u)\,du > t\}$$

et posons $x \in A^*$ si $P^x(\tau_0 = 0) = 1$.

On dit que la fonction S_f^A est une *balayée forte* de f sur A et que les points de l'ensemble A^* sont *s-réguliers* pour A.

Nous pouvons entre autres poser la question suivante: Sous quelles conditions a-t-on pour tout $f \in S$, $A \in \boldsymbol{B}$ et $x \in R^d$

$$S_f^A(x) = E^x\big(f(x_{\tau_0})\big)? \tag{2.1}$$

Commençons par quelques lemmes.

(2.2) Lemme. *Si un processus X n'est pas un s-processus, pour un ensemble compact A et pour la fonction $f \equiv 1$, l'égalité* (2.1) *n'est pas vraie.*

Démonstration. En vertu du théorème (1.3) et du lemme (1.6) il existe un ensemble compact A, l_d-négligeable, tel que $P^x(\tau_0 = 0) = 1$ pour un $x \in A$. Evidemment, $S_1^A \equiv 0$ et simultanément $E^x\big(f(x_{\tau_0})\big) = 1$.

(2.3) Lemme. *Soit X un s-processus; il existe un ensemble $A_0 \subset A$, $A_0 \in \boldsymbol{B}$, $l_d(A \setminus A_0) = 0$ tel que*

$$S_f^A(x) = E^x\big(f(x_{T_{A_0}})\big) \stackrel{\text{df}}{=} B_f^{A_0}(x),$$

où $T_{A_0} = \inf\{t > 0\colon x_t \in A_0\}$.

Démonstration. D'après le lemme de Choquet il existe une suite (v_n), $v_n \in S$, $v_n \geqslant f$ p.p. sur A telle que, si $g \in S$ et $g \leqslant \inf v_n$, on a $g \leqslant S_f^A$. Posons

$$A_n = \{x\colon v_n(x) \geqslant f(x)\}, \qquad A_0 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Alors, si $x \in R^d$,

$$v_n(x) \geqslant E^x\big(f(x_{T_{A_n}})\big), \qquad E^x\big(f(x_{T_{A_n}})\big) \geqslant E^x\big(f(x_{T_{A_0}})\big);$$

nous obtenons $B_f^{A_0} \leqslant S_f^A$. Ensuite $B_f^{A_0} = f$ sur A_0 sauf sur un ensemble semi-polaire $A_0 \setminus A_0^r$ (voir [1], p. 140). Les ensembles semi-polaires sont de potentiel nul ([1], p. 80), donc $B_f^{A_0} \geqslant S_f^A$.

Du lemme (2.3) il découle que S_f^A est une fonction excessive.

(2.4) Lemme. *Si $A \in \boldsymbol{B}(R^d)$, on a $l_d(A \setminus A^*) = 0$.*

Ce fait est une conséquence du lemme (1.6).

(2.5) Lemme. *Le processus $Y = \{y_t, P^x\}$, où $y_t = x_{\tau_t}$ si $\tau_t < +\infty$ et $y_t = \partial$ si $\tau_t = +\infty$ (∂ est le point à l'infini), est un processus de Markov dans $R^d \cup \{\partial\}$. En outre, si la fonction h est $\boldsymbol{B}$-mesurable,*

$$E^x\Big(\int_0^{+\infty} h(y_t)\,dt\Big) = E^x\Big(\int_0^{+\infty} h(x_t) I_A(x_t)\,dt\Big) \stackrel{\text{df}}{=} G_A h(x). \tag{2.6}$$

La démonstration de ce lemme se trouve dans [6], p. 441, et dans [1], p. 212. La relation (2.6) s'obtient par un changement de variables ([1], p. 207).

(2.7) Théorème. *Soit X un s-processus transient, f une fonction excessive, localement intégrable, A un ensemble borelien borné; définissons:*

$$g_t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\big(f(x) - E^x(f(x_{\tau_t}))\big) & si\ f(x) < +\infty, \\ 0 & si\ f(x) = +\infty; \end{cases}$$

alors $G_A g_t(x) \uparrow E^x\big(f(x_{\tau_0})\big)$ lorsque $t \downarrow 0$.

Démonstration. Définissons (voir (2.5)):

$$\tilde{P}_t f(x) = E^x\big(f(y_t)\big), \qquad Vf(x) = E^x\Big(\int_0^{+\infty} f(y_t)\,dt\Big).$$

En vertu de la propriété de Markov

$$Vf(x) = E^x\Big(\int_0^t f(y_s)\,ds\Big) + E^x\big(Vf(y_t)\big),$$

$$G_A f(x) = \int_0^t E^x\big(f(x_{\tau_s})\big)\,ds + V(\tilde{P}_t f)(x),$$

d'où

$$G_A g_t(x) = \frac{1}{t}\int_0^t E^x\big(f(x_{\tau_s})\big)\,ds \tag{2.8}$$

l_d-presque partout et par conséquent partout ([1], p. 253). Il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{t}\int_0^t E^x\big(f(x_{\tau_s})\big)\,ds \uparrow E^x\big(f(x_{\tau_0})\big) \quad \text{si } t \downarrow 0.$$

(2.9) Théorème. *Pour un s-processus X, $f \in S$ et $A \in \boldsymbol{B}(R^d)$, on a*

$$S_f^A(x) = E^x\big(f(x_{\tau_0})\big), \quad x \in R^d.$$

Démonstration. Si X est un processus récurrent, le théorème est vrai, puisque les fonctions excessives sont constantes (voir la démonstration du théorème (1.4)).

Soit X un processus transient. On peut admettre, sans restreindre la généralité, que l'ensemble A et la fonction f sont bornés. Du lemme (2.4) il découle que

$$E^x\big(f(x_{\tau_0})\big) = f(x) \quad \text{p.p. sur } A$$

et, d'après la définition,

$$E^x\big(f(x_{\tau_0})\big) \geqslant S_f^A(x) \quad \text{pour } x \in R^d.$$

Rappelons que $S_f^A \geqslant f$ p.p. sur A (voir (2.3)), d'où $S_f^A \geqslant G_A g_t$ p.p. sur A (voir (2.7)).

En utilisant le principe de domination (voir [8]) nous obtenons $S_f^A \geqslant G_A g_t$ partout sur R^d et $S_f^A(x) \geqslant \lim\limits_{t\downarrow 0} G_A g_t(x) = E^x\big(f(x_{\tau_0})\big)$.

La démonstration du théorème est terminée.

(2.10) Corollaire. *Si X est un s-processus transient, $f \in S$ et $A \in \boldsymbol{B}(R^d)$, on a*

$$\begin{aligned} S_f^A(x) &= \inf\{v(x) \colon v \geqslant f \text{ p.p. sur } A,\ v \in S\} \\ &= \sup\{Ug(x) \colon f \geqslant Ug \text{ sur } A,\ g \geqslant 0,\ \operatorname{supp} g \subset A\} \\ &\qquad\qquad (\operatorname{supp} g = \{x \colon g(x) \neq 0\}). \end{aligned}$$

Soit X un s-processus transient; on appelle un ensemble $A \in \boldsymbol{B}(R^d)$ *classique* si et seulement si $S_f^A \equiv B_f^A$ pour toute fonction $f \in S$, où $B_f^A(x) \overset{\text{df}}{=} E^x\big(f(x_{T_A})\big)$.

(2.11) Théorème. *Un ensemble $A \in \boldsymbol{B}(R^d)$ est classique si et seulement si $T_A = T_{A^*}$ P^x-presque partout.*

Démonstration. En vertu de [1], p. 213, on a

$$\tau_0 = T_{A^*} \quad P^x\text{-presque partout pour tout } x \in R^d. \tag{2.12}$$

Alors $E^x\big(f(x_{\tau_0})\big) = E^x\big(f(x_{T_A})\big)$ si $T_A = T_{A^*}$. Évidemment, $T_A \leqslant \tau_0$ et, d'après (2.12), il s'ensuit que

$$P^x(T_A \leqslant T_{A^*}) = 1.$$

On peut construire une fonction g $\boldsymbol{B}$-mesurable, $0 < g(x) < +\infty$, $x \in R^d$, telle que $Ug(x) < +\infty$. Soit $f = Ug$. D'après la propriété forte de Markov

$$B_f^A(x) = E^x\Big(\int_{T_A}^{+\infty} g(x_t)\,dt\Big) \quad \text{et} \quad S_f^A(x) = E^x\Big(\int_{T_{A^*}}^{+\infty} g(x_t)\,dt\Big),$$

donc

$$B_f^A(x) = S_f^A(x) + E^x\Big(\int_{T_A}^{T_{A^*}} g(x_t)\,dt;\ T_{A^*} > T_A\Big).$$

Il est clair que $P^x(T_{A^*} > T_A) > 0$ entraîne $B_f^A(x) > S_f^A(x)$.

(2.13) Corollaire. *Si $A \setminus A^*$ est polaire, A est un ensemble classique. Si l'ensemble A est classique, on a $A^* = A^r$ et $A \setminus A^*$ est semi-polaire.*

Le théorème ci-dessous caractérise les points de l'ensemble A^*; l'équivalence $1 \leftrightarrow 4$ est valable pour tout processus à ac. ind. La démonstration est analogue à celle du théorème (2.11) et nous l'omettrons.

(2.14) Théorème. *Soit X un processus transient; les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. $x \in A^*$.
2. *Pour tout voisinage W de x, $S_1^{A\cap W}(x) = 1$.*
3. *Pour toute fonction $f \in S$, $S_f^A(x) = f(x)$.*
4. *Pour tout $B \in \boldsymbol{B}(R^d)$, $B \subset A$, $l_d(B) = 0$, le point x est regulier pour $A \setminus B$.*

Rappelons que si $d \geqslant 3$ et si X est s-processus, X est un processus transient (théorème (1.3)).

Question. Existe-t-il un processus à ac. ind. tel que $S_f^A \equiv B_f^A$ pour tout $A \in \boldsymbol{B}(R^d)$ et $f \in S$?

Autrement dit: existe-t-il un processus à ac. ind. tel que tout ensemble l^d-négligeable soit polaire?

3. Les formules. La transformation de Green, par rapport à un ensemble borné A, $l_d(A) > 0$, est, par définition, une transformation $G_A \colon L^2(A) \to L^2(A)$ telle que

$$G_A f(x) = \int_A G(y-x) f(y)\,dy, \quad x \in A,\ f \in L^2(A),$$

où $G(y-x)$ est la fonction de Green du processus (voir (1.8)).

(3.1) Théorème. *Si X est un s-processus transient et symétrique $\big(P_t(0, A) = P_t(0, -A),\ A \in \boldsymbol{B}\big)$, la transformation de Green est complètement continue, positive et autoadjointe.*

Démonstration. D'après l'inégalité de Young [12]

$$\Big(\int_{R^d} |g*h(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \leqslant \int_{R^d} |g(x)|\,dx \Big(\int_{R^d} |h(x)|^2 dx\Big)^{1/2}, \tag{3.2}$$

où $g \in L(R^d)$ et $h \in L^2(R^d)$.

Soit r un nombre positif tel que $A \subset K_r(0)$; nous définissons:

$$\bar{G}(x) = \begin{cases} G(x) & \text{si } x \in K_{2r}(0), \\ 0 & \text{si } x \notin K_{2r}(0). \end{cases}$$

Bien entendu $\bar{G}\in L(R^d)$ et $G_A g(x) = \bar{G}*g(x)$, où $x\in A$ et $g = 0$ sur $R^d\setminus A$. Il existe en outre une suite (G_n) de fonctions continues telles que $G_n = 0$ sur $R^d\setminus K_{2r}(0)$ et

$$\int_{|x|\leqslant 2r} |\bar{G}(x)-G_n(x)|\,dx \to 0.$$

Les transformations linéaires

$$T_n\colon L^2(A)\to L^2(A), \qquad T_n g(x) = \int_A G_n(x-y)g(y)\,dy \quad \text{sur } A$$

sont complètement continues et, d'après (3.2), $\|G_A - T_n\| \to 0$; il est clair que G_A est aussi complètement continue.

Pour prouver que la transformation G_A est positive, supposons que $g\in L\cap L^2$ et définissons

$$P_t g(x) = \int_{R^d} g(x+y)\mu_t(dy).$$

Nous avons $F(P_t g)(x) = e^{-t\lambda(x)}Fg(x)$ par ce que $F\mu_t(x) = e^{-t\lambda(x)}$ (F est la transformèe de Fourier). En utilisant le théorème de Plancherel et par de simples calculs nous obtenons

$$\int_0^{+\infty}(P_t g, g)\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^d}\displaystyle\int_{R^d}|Fg(x)|^2\frac{1}{\lambda(x)}\,dx, \\ \displaystyle\int_{R^d}\int_{R^d} G(x-y)g(x)g(y)\,dx\,dy. \end{cases}$$

Soit $\int_A g^2(x)\,dx < +\infty$, $g = 0$ sur $R^d\setminus A$; la formule ci-dessus entraîne

$$\int_A\int_A G(x-y)g(x)g(y)\,dx\,dy = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{R^d}|Fg(x)|^2\frac{1}{\lambda(x)}\,dx > 0.$$

(3.3) Théorème. *Soit X un s-processus transient et symétrique.*

1. *Si*

$$\int_{|x|\geqslant 1}\left(\frac{1}{\lambda(x)}\right)^k dx < +\infty,$$

alors les transformations $G_A^n \overset{\mathrm{df}}{=} \underbrace{G_A\ldots G_A}_{n\text{ fois}}$, où $r\geqslant k$, sont du type de Hilbert-Schmidt.

2. *Si $\int_{|x|\geqslant 1}\left(\frac{1}{\lambda(x)}\right)^n dx = +\infty$ pour $n = 1, 2, \ldots, A = K_R(0)$ et si pour tout $r > 0$ la fonction G est bornée dans $R^d\setminus K_r(0)$, alors les transformations G_A^n $(n = 1, 2, \ldots)$ ne sont pas du type de Hilbert-Schmidt.*

Démonstration. 1. Nous prouvons d'abord que pour tout $t > 0$

$$\int_{R^d} e^{-t\lambda(x)}\,dx < +\infty.$$

Remarquons que $e^{-s}\leqslant (1/s)^k$ pour $s\geqslant k^2$.

Posons $B = \{x\colon t\lambda(x)\leqslant k^2, |x|\geqslant 1\}$; alors $l_d(B) < +\infty$, parce que

$$\int_B\left(\frac{1}{\lambda(x)}\right)^k < +\infty,$$

d'où

$$\int_B e^{-t\lambda(x)}\,dx < +\infty.$$

En outre

$$\int_{\{x:|x|\geqslant 1, x\notin B\}} e^{-t\lambda(x)}\,dx \leqslant \int_{|x|\geqslant 1}\left(\frac{1}{t\lambda(x)}\right)^k dx < +\infty.$$

Soit

$$G_0(x) = \int_0^1 p_t(x)\,dt, \qquad G_\infty(x) = \int_1^{+\infty} p_t(x)\,dt,$$

où $Fp_t(x) = e^{-t\lambda(x)}$. Les fonctions G_0^{*n} $(n\geqslant k)$ et G_∞ sont bornées et continues puisque

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d F\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\right) = G_\infty \quad \text{et} \quad \int_{R^d}\frac{1}{\lambda(x)}e^{-\lambda(x)}\,dx < +\infty$$

et que

$$FG_0^{*n}(x) = \left(\frac{1-e^{-\lambda(x)}}{\lambda(x)}\right)^n$$

(d'après le théorème de Riemann-Lebesgue $\lambda(x)\to+\infty$ lorsque $|x|\to+\infty$ et, encore, en vertu du théorème (1.3), nous avons

$$\int_{|x|\geqslant 1}\frac{1}{\lambda(x)}\,dx < +\infty).$$

Désignons par $G_A^n(x, y)$ le noyau de la transformation G_A^n. Par récurrence on montre que

(3.4) $$G_A^n(x, y)\leqslant \bar{G}^{*n}(x-y), \qquad n = 1, 2, \ldots \text{ et } x, y\in A$$

(voir la démonstration du théorème (3.1)). Mais

$$\bar{G}^{*n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}\bar{G}_0^{*j}*\bar{G}_\infty^{*(n-j)}$$

et la convolée d'une fonction bornée et d'une fonction intégrable est une fonction bornée, c'est-à-dire que $\tilde{G}^{*n}$ est bornée ($n \geqslant k$).

La démonstration du point 2 est une conséquence des remarques suivantes:

1° Supposons que

$$\tilde{G}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} P_t(0, dx)\,dt;$$

alors

$$\int_{R^d} \big(\tilde{G}^{*n}(x)\big)^2 dx = +\infty, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Pour le voir remarquons que $F\tilde{G}(x) = 1/\big(1+\lambda(x)\big)$ et de là

$$F\tilde{G}^{*n}(x) = \left(\frac{1}{1+\lambda(x)}\right)^n.$$

Mais

$$\int_{R^d} \left(\frac{1}{1+\lambda(x)}\right)^{2n} dx = +\infty$$

et il suffit d'utiliser le théorème de Plancherel.

2° Pour tout $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_{R^d} \big(\tilde{G}_\delta^{*n}(x)\big)^2 dx = \int_{|x| \leqslant n\delta} \big(\tilde{G}_\delta^{*n}(x)\big)^2 dx = +\infty,$$

où

$$\tilde{G}_\delta(x) = \begin{cases} \tilde{G}(x) & \text{si } |x| \leqslant \delta, \\ 0 & \text{si } |x| > \delta \ (\delta > 0). \end{cases}$$

Si $\tilde{G}_\infty(x) \stackrel{\text{df}}{=} \tilde{G}(x) - \tilde{G}_\delta(x)$, on a

$$\tilde{G}^{*n} = \tilde{G}_\delta^{*n} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \tilde{G}_\delta^{*(n-j)} * G_\infty^{*j}.$$

En vertu de nos hypothèses, la fonction

$$H = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \tilde{G}_\delta^{*(n-j)} * \tilde{G}_\infty^{*j}$$

est une fonction bornée, intégrable; par conséquent

$$\int_{R^d} H^2(x)\,dx < +\infty.$$

Mais

$$\int_{R^d} H(x) \tilde{G}_\delta^{*n}(x)\,dx < +\infty,$$

donc

$$\int_{R^d} \big(\tilde{G}_\delta^{*n}(x)\big)^2 dx = +\infty.$$

3° Si $(n+1)\delta < R$, $x \in K_\delta(0)$ et $y \in K_{(n+1)\delta}(0)$, on a

$$\tilde{G}_A^n(x, y) \geqslant \tilde{G}_\delta^{*n}(x-y).$$

En vertu de la définition,

$$\tilde{G}_A^n(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} \int_A \ldots \int_A \tilde{G}(x-y_1)\tilde{G}(y_1-y_2) \ldots \tilde{G}(y_{n-1}-y)\,dy_1 \ldots dy_n$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{G}_A^n(x, y) &\geqslant \int_A \ldots \int_A \tilde{G}_\delta(x-y_1)\tilde{G}_\delta(y_1-y_2) \ldots \tilde{G}_\delta(y_{n-1}-y)\,dy_1 \ldots dy_{n-1} \\ &\geqslant \int_{R^d} \ldots \int_{R^d} \tilde{G}_\delta(x-y_1)\tilde{G}_\delta(y_1-y_2) \ldots \tilde{G}_\delta(y_{n-1}-y)\,dy_1 \ldots dy_{n-1} \\ &\geqslant \tilde{G}_\delta^{*n}(x-y) \qquad (x \in K_\delta,\ y \in K_{(n+1)\delta}). \end{aligned}$$

4° D'après 1°, 2° et 3°

$$\int_A \int_A \big(\tilde{G}_A^n(x, y)\big)^2 dx\,dy \geqslant \int_{K_\delta(0)} \int_{K_{(n+1)\delta}(0)} \big(\tilde{G}_\delta^{*n}(x-y)\big)^2 dx\,dy = +\infty.$$

Par conséquent,

$$\int_A \int_A \big(G_A^n(x, y)\big)^2 dx\,dy = +\infty$$

(évidemment $\tilde{G} \leqslant G$ p.p.), c'est-à-dire G_A^n n'est pas du type de Hilbert-Schmidt ($n = 1, 2, \ldots$).

Remarques.

(3.5) *Soit $(\lambda_j, \varphi_j)_{j \geqslant 1}$ un système orthonormal de valeurs et de fonctions propres de la transformation G_A; alors les nombres λ_j sont positifs et $\lambda_j \to 0$ lorsque $j \to +\infty$.*

(3.6) *Supposons que $\int_{|x| \geqslant 1} \left(\frac{1}{\lambda(x)}\right)^k dx < +\infty$; alors les fonctions φ_j sont continues et, si $n \geqslant k$, on a $\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^{2n} < +\infty$.*

Démonstration. De (3.4) résulte que φ_j sont bornées. Mais

$$\varphi_j = \frac{1}{\lambda_j} G_A \varphi_j = \frac{1}{\lambda_j} \tilde{G} * \varphi_j \qquad \text{sur } A,$$

donc φ_j sont continues. L'opérateur G_A^n est du type de Hilbert-Schmidt, par conséquent

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (\lambda_j^n)^2 < +\infty.$$

(3.7) *Si la transformation de Green est une transformation du type de Hilbert-Schmidt, on peut appliquer la méthode de Kac-Stroock* ([9], [14]).

Example. On peut construire, de la façon suivante, un processus X qui satisfait aux hypothèses du théorème (3.3), point 2.

Soit Y^+ un processus à ac. ind. à valeurs dans $\langle 0, +\infty)$ qui admet $r_t(v, ds)$ comme fonction de transition. Il est bien connu que (voir [1], p. 219)

$$\int_0^{+\infty} e^{-us} r_t(0, ds) = e^{-t\lambda^+(u)}, \quad u, t \geqslant 0,$$

où

$$\lambda^+(u) = bu + \int_0^{+\infty} (1-e^{-us}) \nu(ds)$$

et

$$b \geqslant 0, \quad \nu\{0\} = 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{s}{1+s} \nu(ds) < +\infty.$$

On peut choisir une suite (a_n) telle que $a_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ et

$$\lambda_1^+(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-e^{-a_n u}) \leqslant \ln u \quad \text{pour } u \geqslant 2.$$

Le processus X avec l'exposant

$$\lambda(x) = \lambda_1^+(\tfrac{1}{2}|x|^2), \quad x \in R^d,$$

satisfait aux hypothèses du théorème (3.3) point 2.

(3.8) THÉORÈME. *Soit X un s-processus transient symétrique, A un ensemble borné borelien, f une fonction excessive localement intégrable, $\int_A f^2(x)\,dx < +\infty$; définissons:*

$$g_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{t} (1-e^{-t/\lambda_j}) \varphi_j(f, \varphi_j);$$

alors $G_A g_t(x) \uparrow S_f^A(x)$ lorsque $t \downarrow 0$.

(3.9) LEMME (voir [14]). *Si f est une fonction borelienne, $f \geqslant 0$ et A un ensemble borelien, la fonction*

$$u_\lambda(x) = E^x\Big(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(x_{\tau_t})\,dt\Big), \quad \lambda > 0, x \in R^d,$$

vérifie l'équation

$$u_\lambda(x) + \lambda G_A u_\lambda(x) = G_A f(x) \tag{3.10}$$

(la définition de τ_t précède (2.1)).

Démonstration. Considérons le processus $Y = \{x_{\tau_t}, P^x\}$ (voir (2.5)) et la résolvante de ce processus $(V^\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$. Nous savons que $Vf(x) = G_A f(x)$ est d'après l'équation résolvante:

$$V^\lambda f(x) + \lambda V V^\lambda f(x) = Vf(x).$$

Il suffit de remarquer que

$$V^\lambda f(x) = E^x\Big(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(x_{\tau_t})\,dt\Big).$$

Démonstration du théorème (3.8). Commençons par démontrer que, si $t > 0$, on a presque partout sur A:

$$E^x\big(f(x_{\tau_t})\big) = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-t/\lambda_j} \varphi_j(x)(f, \varphi_j)$$

(la série converge en moyenne vers un élément de $L^2(A)$).

Par de simples calculs nous pouvons montrer que la solution u'_λ $(u'_\lambda \in L^2(A))$ de l'équation (3.10) est donné par

$$u'_\lambda = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda + 1/\lambda_j} (f, \varphi_j)\varphi_j.$$

La fonction

$$u_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} E^x\big(f(x_{\tau_t})\big)\,dt$$

est un élément de $L^2(A)$, c'est pourquoi $u_\lambda(x) = u'_\lambda(x)$ p.p. sur A $(\lambda > 0)$. Regardons les fonctions w'_t et w_t définies sur $\langle 0, +\infty)$ à valeurs dans $L^2(A)$:

$$w'_t = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-t/\lambda_j} \varphi_j(f, \varphi_j), \quad w_t(x) = E^x\big(f(x_{\tau_t})\big).$$

La première est continue (dans $L^2(A)$), la seconde est continue à droite; leurs transformées de Laplace sont bien définies, et $\mathscr{L}(w'_t) = u'_\lambda = u_\lambda = \mathscr{L}(w_t)$, d'où $w_t = w'_t$ pour presque tout $t > 0$, donc pour tout $t \in (0, +\infty)$. En tenant compte de $G_A g_t \uparrow S_f^A$ (théorèmes (2.9) et (2.7)) et des considérations ci-dessus nous voyons que

$$G_A\Big(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{t}(1-e^{-t/\lambda_j})\varphi_j(f, \varphi_j)\Big) \uparrow S_f^A.$$

Remarque. La démonstration analogue à celle de Stroock [14] donne, si un processus X satisfait aux hypothèses du théorème (3.3), point 1, l'approximation

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} e^{-t/\lambda_j} G_A \varphi_j(x)(f, \varphi_j) \uparrow S_f^A(x), \quad t \downarrow 0, x \in R^d.$$

(3.11) LEMME. *Soit X un s-processus transient, f une fonction excessive localement intégrable, A un ensemble borné borelien; il existe exactement une mesure μ telle que*

$$S_f^A(x) = \int_{R^d} G(y-x)\mu(dy), \quad x \in R^d.$$

Démonstration. D'après (2.3) pour un ensemble $A_0 \in \boldsymbol{B}$, on a $S_f^A(x) = E^x\big(f(x_{T_{A_0}})\big)$. En vertu de [1], p. 271,

$$E^x\big(f(x_{T_{A_0}})\big) = \int_{R^d} G(y-x)\mu(dy),$$

où μ est une mesure finie telle que $\operatorname{supp}\mu \subset \bar{A}$. Cette mesure est unique ([1], p. 260).

En particulier,

$$S_1^A(x) = \int_{R^d} G(y-x)\tilde{\mu}(dy).$$

On appelle le nombre $\tilde{\mu}(R^d)$ *s-capacité de A* (voir [3]) et on pose $C_s(A) = \tilde{\mu}(R^d)$.

(3.12) THÉORÈME. *Soit f une fonction telle que, dans le théorème* (3.8), *si*

$$g_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{t}(1-e^{-t/\lambda_j})\varphi_j(f,\varphi_j), \qquad S_f^A(x) = G\mu(x),$$

on a:

1. $g_t(x)\,dx \to \mu$ *vaguemant lorsque* $t \downarrow 0$;
2. $(\mu,\mu) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(f,\varphi_j)^2}{\lambda_j}$, *où* $(\mu,\mu) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{R^d} G\mu(x)\mu(dx)$;
3. $C_s(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(1,\varphi_j)^2}{\lambda_j}$;
4. *si* $(\mu,\mu) < +\infty$, $\mu(R^d) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(f,\varphi_j)(1,\varphi_j)}{\lambda_j}$.

Démonstration. La convergence vague $g_t(x)\,dx \to \mu$ est une conséquence du théorème (2.6), chapitre VI, monographie [1], et du théorème précédent. Pour prouver 2, remarquons que

$$\int_{R^d} G_A g_t(x)\mu(dx) = \int_A G\mu(x) g_t(x)\,dx$$

et à cause de la continuité du produit scalaire,

$$\int_{R^d} G_A g_t(x)\mu(dx) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{t}(1-e^{-t/\lambda_j})(G\mu,\varphi_j)(f,\varphi_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{t}(1-e^{-t/\lambda_j})(f,\varphi_j)^2.$$

Par conséquent,

$$\int_{R^d} G_A g_t(x)\mu(dx) \uparrow (\mu,\mu) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(f,\varphi_j)^2}{\lambda_j}.$$

L'égalité 3 découle de la relation

$$\int_A g_t(x)\,dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{t}(1-e^{-t/\lambda_j})(1,\varphi_j)^2$$

(nous admettons $f \equiv 1$).

Puisque $(\mu,\mu) < +\infty$ et $C_s(A) < +\infty$, nous avons

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|(f,\varphi_j)(1,\varphi_j)|}{\lambda_j} < +\infty.$$

Mais

$$\int_A g_t(x)\,dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{t}(1-e^{-t/\lambda_j})(f,\varphi_j)(1,\varphi_j),$$

donc

$$\mu(R^d) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(f,\varphi_j)(1,\varphi_j)}{\lambda_j}.$$

4. Remarques finales, problème de Dirichlet. Le théorème (4.2) caractérise d'une autre façon les s-processus, (4.6) donne une condition suffisante pour qu'un processus X soit un s-processus.

Soit X un processus à ac. ind.; fixons la boule $K_r(x)$ et posons

$$\mu_x^r(A) = P^x(x_{T_{R^d \setminus K_r(x)}} \in A), \quad \text{où } A \in \boldsymbol{B}(R^d).$$

Soit ensuite W un ensemble ouvert dans R^d et h une fonction bornée $\boldsymbol{B}$-mesurable. On dit que h est *harmonique* dans W si

$$\int_{R^d} h(y)\mu_x^r(dy) = h(x)$$

pour toute la boule $K_r(x) \subset W$.

Le problème de Dirchlet s'énonce comme il suit (voir [6] et [11]): A étant un ensemble fermé, f une fonction continue bornée sur A, trouver une fonction H harmonique dans $R^d \setminus A$ telle que

$$\lim_{y\to x} H(y) = f(x) \quad \text{pour } x \in A^r. \tag{4.1}$$

(4.2) THÉORÈME. *La fonction $H_f(x) \overset{\mathrm{df}}{=} E^x\big(f(x_{T_A})\big)$ est une solution du problème de Dirichlet pour tout ensemble fermé A et toute fonction continue bornée sur A si et seulement si X est un s-processus.*

Démonstration. Admettons tout d'abord qu'il existe une fonction excessive g, qui n'est pas semi-continue inférieurement; on peut supposer que g est bornée. Pour un $x \in R^d$ et $\delta > 0$

$$\underline{\lim}_{y\to x} g(y) < g(x) - \delta,$$

on peut donc trouver une suite (x_n) telle que $x_n \to x$, $g(x_n) < g(x) - \delta$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Soit $B = \{y\colon g(y) > g(x) - \delta/2\}$; évidemment $x \in B^r$. D'après [1], p. 85, il existe un ensemble compact A tel que $A \subset B$ et $x \in A^r$. Posons $f(y) = g(x) - \delta/2$ pour $y \in A$. Pour tout $z \in R^d$

$$E^z\big(f(x_{T_A})\big) \leqslant E^z\big(g(x_{T_A})\big) \leqslant g(z),$$

d'où

$$H_f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant g(x) - \delta < f(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Inversement, soit X un s-processus. Evidemment, H_f est harmonique dans $R^d \setminus A$ (propriété forte de Markov). Admettons que $x \in A^r$ et fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et la boule $K_r(x)$. Prouvons que pour un entourage V de x,

$$P^y\big(x_{T_A} \in K_r(x)\big) \geqslant 1 - \varepsilon, \quad y \in V; \tag{4.3}$$

cela entraîne (4.1). La fonction $\varphi(y) = E^y(e^{-T_A})$ est 1-excessive, donc semi-continue inférieurement; $\lim_{y\to x} \varphi(y) = 1$ parce que $\varphi(x) = 1$, $\varphi(y) \leqslant 1$, $y \in R^d$. Par conséquent,

$$\lim_{y\to x} P^y(T_A \leqslant t) = 1, \quad \text{où } t > 0. \tag{4.4}$$

La fonction de transition du processus est invariante par translation et les trajectoires sont continues à droite, d'où

$$P^y(T_{R^d \setminus K_r(x)} > t_0) \geqslant 1 - \varepsilon/2 \tag{4.5}$$

dans un entourage V_1 de x, si t_0 est assez petit. En tenant compte de (4.4) et (4.5) nous obtenons (4.3).

On dit qu'un processus X à ac. ind. est un *processus de Poisson* si P^0-presque toute trajectoire du processus est une fonction en escalier (c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante (t_i), $t_0 = 0$, $t_i \uparrow +\infty$ et des vecteurs a_i tels que $x_t = a_i$ si $t_i \leqslant t < t_{i+1}$). Il est connu (voir [13]) que l'exposant du processus de Poisson

$$\lambda(x) = \int_{R^d} (1 - e^{i(x,y)})\, \nu(dy), \quad \text{où } \nu\{0\} = 0,\ \nu(R^d) < +\infty.$$

En vertu de ce qui précède on peut montrer que un processus X est un processus de Poisson si et seulement si la fonction $\lambda(x)$ est bornée.

Les processus de Poisson ne sont pas des s-processus. On dit qu'un processus X dans R^d est *isotrope*, si pour chaque transformation isométrique $L\colon R^d \to R^d$, $L(0) = 0$, on a

$$P^0(x_t \in A) = P^0(x_t \in LA) \quad (A \in \boldsymbol{B},\ t \geqslant 0). \tag{4.5'}$$

Exemple.

(4.6) *Si X est un processus à ac. ind., isotrope dans R^d où $d \geqslant 2$, alors le processus X est un processus de Poisson ou bien le processus possède des mesures $P_t(0, dx)$ absolument continues par rapport à l_d.*

Démonstration. Désignons par s_r $(r \geqslant 0)$ une mesure uniformément répartie sur $S_r(0) = \{x\colon |x| = r\}$, dont la masse totale est l'unité et par μ_t la mesure $P_t(0, dx)$, $t \geqslant 0$. Puisque le processus X est isotrope, on peut écrire

$$\mu_t(A) = \int_0^{+\infty} s_r(A)\, \alpha_t(dr)$$

(α_t étant la mesure sur $\langle 0, +\infty))$.

Des équations de Chapman-Kolmogorov nous obtenons

$$\mu_{t+s}\{0\} = \int_{R^d} \mu_t\{-x\}\, \mu_s(dx),$$

donc $\mu_{t+s}\{0\} = \mu_t\{0\} \cdot \mu_s\{0\}$ (si $x \neq 0$, $\mu_t\{-x\} = 0$); par conséquent, $\mu_t\{0\} = e^{-\beta t}$ $(t \geqslant 0)$. Si $\beta < +\infty$, le processus X est un processus de Poisson. Si $\beta = +\infty$, $\alpha_t\{0\} = 0$ et nous obtenons

$$\mu_t = \mu_{t/2} * \mu_{t/2} = \int_{(0,+\infty)} \int_{\times (0,+\infty)} (s_r * s_u)\, \alpha_{t/2}(dr)\, \alpha_{t/2}(ds).$$

Les mesures $s_r * s_u$ $(r, u > 0)$ sont absolument continues par rapport à l_d, par conséquent cela est vrai pour μ_t $(t > 0)$. Alors, si X est isotrope dans R^d, $d \geqslant 2$, il est un s-processus si et seulement si

$$\lim_{|x|\to+\infty} \lambda(x) = +\infty.$$

Nous terminerons nos considérations par le

Théorème. *Soit X un s-processus, A un ensemble compact, f une fonction continue sur A; alors H_f est une fonction continue dans $R^d \setminus A$.*

Démonstration. Admettons que X soit transient. En vertu du théorème de Stone-Weierstrass on peut supposer que f est excessive et continue. H_f est semi-continue inférieurement, il suffit donc, pour prouver qu'elle est continue en $x_0 \in R^d \setminus A$, de trouver une fonction $g \in S$ continue telle que

$$g \geqslant f \quad \text{sur } A, \tag{4.7}$$

$$g(x_0) \leqslant H_f(x_0) + \varepsilon. \tag{4.8}$$

Dans ce but fixons une fonction $h \in S$ pour laquelle

$$h \geqslant f \text{ sur } A \quad \text{ et } \quad h(x_0) < H_f(x_0) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $B = \{x\colon h(x) + \varepsilon/3 \geqslant f\}$. Il est clair que $S_f^B = f$ sur A. En vertu des théorèmes (2.7) et (2.9) et du théorème de Dini on a, pour un t_0, $G_A g_{t_0} + \varepsilon/3 \geqslant f$ sur A.

Posons

$$g = G_A g_{t_0} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Evidemment, la fonction g satisfait à (4.7). Elle satisfait aussi, en vertu du principe de domination, à (4.8).

Si X est récurrent et A n'est pas un ensemble polaire,

$$P^x(T_A < +\infty) \equiv 1 \quad \text{(voir [1], p. 89)}.$$

D'une façon analogue nous obtenons que la fonction

$$H_f^\alpha(x) \overset{\mathrm{df}}{=} E^x\left(e^{-\alpha T_A} f(x_{T_A})\right)$$

est continue dans $R^d \setminus A$. Mais $E^x(e^{-\alpha T_A}) \uparrow 1$ si $\alpha \downarrow 0$ et le théorème de Dini achève la démonstration.

Travaux cités

[1] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, *Markov processes and potential theory*, New York and London 1968.
[2] Z. Ciesielski, *Brownian motion, capacitory potentials and semiclassical sets, I, II, III*, Bull. Acad. Polon. Sci. 12 (1964), p. 265-270; 13 (1965), pp. 147-150 et 215-219.
[3] — *Lectures on Brownian motion, heat conduction and potential theory*, Matematisk Institut, Aarhus 1966.
[4] — *Semiclassical potential theory*, Proc. Symp. Math. Research Center and U. S. Army, Wisconsin 1967, p. 33-59.
[5] K. L. Chung and W. H. J. Fuchs, *On the distribution of values of sums of random variables*, Memoires Amer. Math. Soc. 6 (1950), p. 1-12.
[6] Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Москва 1965.
[7] И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа*, Москва 1961.
[8] G. A. Hunt, *Markov processes and potentials*, Illinois J. Math. 1 (1957), p. 44-93.
[9] M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, Berkeley 1951, p. 189-215.

[10] J. F. C. Kingman, *Recurrence properties of processes with stationary independent increments*, The Journal of the Australian Math. Soc. 4 (1964), p. 223-228.
[11] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Москва 1966.
[12] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*, Tom 2, Warszawa 1959.
[13] А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями*, Москва 1964.
[14] D. W. Stroock, *The Kac approach to potential theory*, Indiana J. Math. 16 (1967), p. 829-852.

Reçu par la Rédaction le 6. 5. 1969