[5] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs Amer. Math. Soc. 16 (1955).
[6] — *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Matem. Sao Paulo 8 (1956), p. 1–79.
[7] S. Kwapień, *Some remarks on (p, q)-absolutely summing operators in l_p-spaces*, Studia Math. 29 (1968), p. 327–337.
[8] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*, ibidem 29 (1968), p. 275–326.
[9] V. I. Macaev, *Volterra operators obtained from self-adjoint operators by perturbation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 139 (1961), p. 810–814 (Russian).
[10] B. S. Mitjagin, *Approximative dimension and bases in nuclear spaces*, Uspehi Mat. Nauk 16 (1961), p. 69–132 (Russian).
[11] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), p. 209–228.
[12] — *On the impossibility of embedding of the space L in certain Banach spaces*, Coll. Math. 8 (1961), p. 199–203.
[13] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 1965.
[14] E. C. Titchmarsh, *Reciprocal formulae involving series and integrals*, Math. Z. 25 (1926), p. 321–381.

UNIVERSITY OF WARSAW, DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 8. 11. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIV. (1970)

La fonction de Green d'un processus de Galton-Watson

par

SERGE DUBUC (Montréal)

1. Introduction. Je me propose d'étudier le comportement asymptotique de la fonction de Green d'un processus de Galton-Watson dont la moyenne est finie et est plus grande que 1. Je serai alors en mesure de signaler quelques propriétés des solutions harmoniques extrémales associées au processus.

Soit $\{p(n)\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres positifs dont la somme est 1; on définit une matrice infinie $P = \big(p(x, y)\big)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, $y = 0, 1, 2, \ldots$ de façon récurrente par rapport à x: $p(0, y) = \delta(0, y)$,

$$p(x+1, y) = \sum_{z=0}^{y} p(z)p(x, y-z).$$

La puissance matricielle $n^{\text{ème}}$ de P donne la matrice $P^n = \big(p_n(x, y)\big)$. On introduit la fonction de Green

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, y) \leqslant +\infty.$$

On introduit également les fonctions génératrices

$$f_n(z) = \sum_{y=0}^{\infty} p_n(1, y) z^y$$

où z est un nombre complexe dont le module ne dépasse pas 1. On a $|f(z)| \leqslant 1$ et $f_{r+s}(z) = f_r\big(f_s(z)\big)$. De plus

$$\sum_{y=0}^{\infty} p_n(x, y) z^y = \big(f_n(z)\big)^x.$$

Ces diverses matrices permettent de considérer pour chaque entier x une suite de variables aléatoires indépendantes $\{Z_n^x\}_{n=0}^{\infty}$ où $P[Z_n^x = y] = p_n(x, y)$. Lorsque $x = 1$, on note plus simplement $Z_n^1 = Z_n$. Ceci donne le processus de Galton-Watson. Soit

$$M = \mathscr{E}(Z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} np(n)$$

la moyenne du processus, je m'intéresserai au cas où $1 < M < +\infty$. Voici les principaux faits remarquables attachés au processus de Galton-Watson dont la moyenne dépasse 1. Depuis les travaux de Harris [3], Levinson [5], Kesten et Stigum [4], [10], on sait que les variables aléatoires Z_n/M^n, lorsque $n \to \infty$, tendent en probabilité vers une variable aléatoire W. Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) n \log n = +\infty,$$

alors $W = 0$ avec une probabilité égale à 1. Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) n \log n < +\infty,$$

la fonction de distribution $F(t)$ de W est constante sur $\{t \mid t < 0\}$, admet un saut de q unités ($q = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$) à $t = 0$ et pour $t > 0$, $F(t)$ admet une dérivée continue où

$$\int_{0+}^{\infty} tF'(t)\,dt = 1.$$

Une fonction $h(x)$ définie sur les entiers naturels est appellée une *fonction harmonique* si

$$\sum_{y=0}^{\infty} p(x, y) h(y) = h(x).$$

Plusieurs personnes se sont interrogées sur les fonctions harmoniques positives. On savait par exemple que $h(x) \equiv 1$ et $h(x) = q^x$ sont des fonctions harmoniques. D'autres personnes comme Spitzer et Kesten ont remarqué que si $c > 0$ alors

$$h(x; c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} cM^n F_x'(cM^n)$$

est une fonction harmonique (F_x est la fonction de distribution de la somme de x variables aléatoires indépendantes distribuées comme la variable W), ce qui enrichissait beaucoup la collection des fonctions harmoniques. On savait que les fonctions harmoniques positives forment un cône convexe réticulé. Quelles sont les génératrices extrémales de ce cône? Dans un article précédent, j'ai démontré que q^x était la seule solution extrémale telle que $h(0) \neq 0$.

Ce que j'établirai, c'est que si $\sum_{1}^{\infty} k \log^2 k p(k) < \infty$ et si le groupe engendré $\{n-m \mid p(n) \neq 0, p(m) \neq 0\}$ est Z, alors le cône des fonctions harmoniques positives est à base compacte, ses génératrices extrémales sont des multiples scalaires de q^x ou de $h(x; c)$.

Ces résultats s'obtiendront par une étude suffisamment fine de la fonction de Green; pour ce faire, nous aurons à connaître comment converge $f_n(z)$ lorsque $n \to \infty$ et quel est le module de continuité de $f_n'(e^{-s})$ pour $\operatorname{Re} s \geqslant 0$. En cours de route, nous améliorerons différents théorèmes ayant trait aux processus de Galton-Watson de moyenne plus grande que 1. La principale nouveauté sera que la densité de la variable W ne s'annulle jamais sur les réels positifs.

2. Etude de la convergence de $f_n(z)$. Introduisons la notion de période pour une fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$. On dira que la période de $f(z)$ est L si le sousgroupe engendré par $\{n-m \mid p(n) \neq 0, p(m) \neq 0\}$ est $\{0, \pm L, \pm 2L, \ldots\}$. On dira que le processus de Galton-Watson est *indécomposable* si $L = 1$.

THÉORÈME 1. *Si $|z| \leqslant 1$, si $z^L \neq 1$, alors $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = q$. La convergence est uniforme sur tout compact du disque-unité qui ne contient aucune racine L^e de l'unité.*

Démonstration. 1° Considérons d'abord le cas où $p(0) = 0$. Dans ce cas, si $z^L \neq 1$, alors $|f(z)| < 1$. En effet, si $|f(z)| = 1$, alors $z^n = z^m$ pour tous les entiers n et m tels que $p(n) \neq 0$ et $p(m) \neq 0$. D'où $z^{n-m} = 1$ pour les entiers n et m tels que $p(n) \neq 0$ et $p(m) \neq 0$. On obtiendrait que $z^L = 1$. Si $r = |f(z)|$, on a $f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) w^n$; ainsi $|f(w)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} p(n) |w|^n \leqslant f(|w|)$. Il s'ensuit que $|f_n(z)| \leqslant f_{n-1}(r)$. Puisque $\lim_{n\to\infty} f_n(r) = 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0$.

2° Supposons maintenant que $p(0) \neq 0$. Posons $q_n = f_n(0)$, $q_0 = 0$ et considérons les cercles suivants: $K_n = \{z \mid |z - q_n| \leqslant 1 - q_n\}$ et $K_\infty = \{z \mid |z-q| \leqslant 1-q\}$. Si $|z| \leqslant 1$, alors

$$\left|\frac{f(z) - q_1}{1 - q_1}\right| = \left|\frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n}\right| \leqslant 1,$$

c'est-à-dire $f(K_0) \subseteq K_1$. De même, $f_n(K_0) \subseteq K_n$. Ainsi $\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(K_0) \subseteq K_\infty$. Soit la fonction

$$g(w) = \frac{f(q+w) - q}{1-q}.$$

Vu que pour $k = 1, 2, \ldots$

$$(1-q)\frac{d^k g}{dw^k}(0) = \frac{d^k f}{dz^k}(q) > 0,$$

la période de $g(w)$ est 1. Si $w \neq 1$ et $|w| \leqslant 1$, alors $\lim_{n\to\infty} g_n(w) = 0$ par le cas 1; ce qui veut dire que si $z \in K_\infty$ et $z \neq 1$, alors $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = q$. Soit 0_∞ l'intérieur de K_∞, $f^{-1}(0_\infty)$ est donc un voisinage de $K_\infty - \{1\}$. Si $z^L \neq 1$ et si $f_n(z)$ ne convergeait pas vers q, alors pour tout entier n, $f_n(z) \notin f^{-1}(0_\infty)$. Comme les points d'accumulation de $f_n(z)$ sont dans K_∞, alors on obtiendrait que $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 1$.

Par le fait que f est continûment dérivable sur $\{z \mid |z| \leqslant 1\}$ et $f'(1) = M > 1$, il existe un voisinage U de 1, tel que $|f(w)-1| \geqslant |w-1|$ pour tous les w de U. D'autre part, il existerait un entier N tel que $f_N(z) \in U$ et $|f_N(z)-1| > |f_{N+1}(z)-1|$. Ce qui nous donne une contradiction. Donc $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = q$.

3° Etablissons la convergence uniforme. Soit K une partie compacte du disque unité qui ne contient aucune racine L^e de l'unité. Soit $0 = \{z \mid |z-q| < \frac{1}{2}|1-q|\}$, puisque $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(0)$, il existe un entier k tel $f_k(K) \subseteq 0$; si $z \in K$, alors

$$|f_{n+k}(z) - q| \leqslant \left| f_n\left(\frac{1+q}{2}\right) - q \right|.$$

La démonstration du théorème est donc complète.

3. Loi-limite d'un processus de Galton-Watson. Nous reprenons les principaux théorèmes relatifs à un processus de Galton-Watson dont la moyenne M dépasse 1. Les démonstrations de Stigum et de Kesten [10] et [4], tenaient compte essentiellement d'une remarque de Doobs à l'effet que les variables aléatoires Z_n/M^n forment une martingale. Nous verrons qu'une autre voie beaucoup plus simple permet d'obtenir les mêmes résultats en reprenant une idée de Levinson: c'est de s'intéresser à $f(e^{-s})$ pour les s réels positifs [5].

THÉORÈME 2. *Si μ est une mesure de probabilité sur $[0, \infty)$ dont la moyenne est M, alors pour tout nombre $s \geqslant 0$,*

$$e^{-Ms} \geqslant \int_0^\infty e^{-st} d\mu(t).$$

L'inegalité est stricte lorsque $s > 0$ et que la mesure μ n'est pas la masse de Dirac disposée au point M.

Démonstration. Soit

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\mu(t),$$

la transformée de Laplace de la mesure μ.

$$\frac{d}{ds}\left(\varphi(s)e^{Ms}\right) = \int_0^\infty (M-t)e^{-s(t-M)} d\mu(t) \leqslant \int_0^\infty (M-t)\, d\mu(t) = 0$$

puisque pour tout nombre réel x, $xe^{-sx} \leqslant x$. D'où $\varphi(s)e^{Ms} \leqslant \varphi(0) = 1$.

D'autre part, si $s > 0$ et si $\varphi(s) = e^{-Ms}$, alors

$$\int_0^\infty (M-t)(e^{-s(t-M)} - 1)\, d\mu(t) = 0.$$

La fonction à intégrer est positive, continue et ne s'annulle que pour $t = M$. Dans ce cas, μ est la masse de Dirac au point $t = M$.

Appliquons ce théorème à un processus de Galton-Watson. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$, le dernier théorème nous dit que si $x \in [0, 1]$ alors $f(x) \geqslant x^M$, ou que $f(e^{-s/M}) \geqslant e^{-s}$ si $s \geqslant 0$. Considérons la suite de fonctions $f_n(e^{-s/M^n})$. Ces fonctions sont complètement monotones, c'est-à-dire sur $(0, \infty)$ les dérivées successives de chacune de ces fonctions alternent en signe [6]. Il suit du théorème 2, que cette famille de fonctions est une famille croissante. Soit

$$g(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(e^{-s/M^n});$$

une telle limite est nécessairement une fonction complètement monotone continue sur $[0, \infty)$ et $g(0) = 1$. Par le théorème de Bernstein (cf. p. 160 de Widder [11]), il existe une et une seule mesure sur $[0, \infty)$ dont la transformée de Laplace soit précisément

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\mu(t).$$

Nous avons donc établi que les variables aléatoires Z_n/M^n convergent en distribution vers une variable aléatoire W dont la fonction de distribution est $d\mu(t)$. (Lorsque les transformées de Laplace convergent, il en est ainsi.) On voit que la fonction $g(s)$ satisfait la très importante équation fonctionnelle $g(Ms) = f(g(s))$.

Demandons-nous quand $g(s) \equiv 1$; soit $c = \lim_{s\to\infty} g(s)$. Vu l'équation fonctionnelle satisfaite par g, on a $f(c) = c$. Si $M \leqslant 1$ (depuis le théorème 2, M peut être inférieur ou égal à 1), l'équation $f(x) = x$ ne peut admettre que la solution $x = 1$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Si $M > 1$, alors $c = 1$ ou $c = q = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$. Si $c = 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{ds} f_n(e^{-s/M^n})|_{s=1} = 0,$$

$$\frac{d}{ds} f_n(e^{-s/M^n})|_{s=1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{f'(f_k(e^{-1/M^n}))}{M} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{f'(e^{-1/M^k})}{M}$$

vu que, par le théorème 2, $f_k(e^{-1/M^n}) \geqslant e^{-1/M^{n-k}}$. Ainsi

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{f'(e^{-1/M^k})}{M} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} M - f'(e^{-1/M^k}) = +\infty.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(n) \sum_{k=1}^{\infty} (1-e^{-n/M^k}) = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} np(n)\log n = +\infty.$$

Pour traiter le cas $c = q$, il nous faut établir le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Si*

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t)$$

est la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité $dF(t)$ *sur* $[0, \infty)$, *si* $\varphi(a) = e^{-L}$, *si* $0 < s < 1$, *alors* $\varphi(as) \leqslant e^{-Ls}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder avec $f(t) = e^{-ast}$, $g(t) = 1$, $p = 1/s$, $q = p/(p-1)$:

$$\left|\int f(t) g(t) dF(t)\right| \leqslant \left(\int |f(t)|^p dF(t)\right)^{1/p} \left(\int |g(t)|^q dF(t)\right)^{1/q},$$

$$\int e^{-ast} dF(t) \leqslant \left(\int_0^{\infty} e^{-at} dF(t)\right)^s \left(\int dF(t)\right)^q, \qquad \varphi(as) \leqslant e^{-Ls}.$$

Supposons donc que $c = q$. Etablissons que dans ce cas $\sum_1^{\infty} np(n)\log n < +\infty$. Puisque $c < 1$, il existe un nombre $L > 0$ tel que pour $k = 1, 2, \ldots$, $f_k(e^{-M^{-k}}) \leqslant e^{-L}$. Par le théorème précédent, si $s \leqslant 1$, $f_k(e^{s/M^k}) \leqslant e^{-Ls}$. D'où

$$\frac{f_n'(e^{-M^{-n}})}{M^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{f'(f_k(e^{-M^{-n}}))}{M} \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} \frac{f'(e^{-LM^{-k}})}{M}.$$

On sait que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(e^{-M^{-n}})}{M^n} > 0.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} M - f'(e^{-LM^{-k}}) < +\infty.$$

Mais

$$\sum_{k=1}^{\infty} M - f'(e^{-LM^{-k}})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} np(n) \sum_{k=1}^{\infty} (1-e^{-LM^{-k}}) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} np(n)(1-e^{-L})\left(\frac{\log n}{\log M} - 1\right).$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(n)\log n < +\infty.$$

THÉORÈME 4. *Si*

$$\sum_1^{\infty} np(n) = M > 1,$$

si

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(n)\log n < +\infty,$$

et si

$$\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{M-1} & \textit{lorsque } 0 \leqslant x \leqslant M, \\[2ex] \dfrac{1}{M-1} + \dfrac{\log x}{\log M} & \textit{lorsque } x \geqslant M, \end{cases}$$

alors pour tout entier k *et pour tout nombre réel* s, *on a*

$$1 - \frac{f_k'(e^{-s/M^k})}{M^k} \leqslant \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} np(n)\,\theta(ns).$$

Démonstration. En appliquant encore le théorème 2, on a que $f_k(e^{-s/M^k}) > e^{-s}$. D'où

$$1 - \frac{f_k'(e^{-s/M^k})}{M^k} = 1 - \prod_{i=0}^{k-1} \frac{f'(f_i(e^{-s/M^k}))}{M}$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} 1 - \frac{f'(f_i(e^{-s/M^k}))}{M} \leqslant \sum_{i=1}^{k} 1 - \frac{f'(e^{-s/M^i})}{M}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 1 - \frac{f'(e^{-s/M^i})}{M} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M} np(n) \sum_{i=1}^{\infty} (1-e^{-ns/M^i})$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M} np(n) \sum_{i=1}^{\infty} \min\left(1, \frac{ns}{M^i}\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M} np(n)\,\theta(ns).$$

Vu l'équicontinuité de la famille de fonctions $f_n'(e^{-s/M^n})/M^n$, on obtient que $g(s)$ est une fonction admettant une dérivée continue pour $s \geqslant 0$ et $g'(0) = -1$. Ainsi $g'(s) = -\int_0^\infty te^{-st}d\mu(t)$ et l'on obtient que

$$\int_0^\infty t d\mu(t) = 1.$$

Définissons maintenant $g(z)$ pour tout nombre complexe dont la partie réelle est $\geqslant 0$,

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} d\mu(t).$$

Alors $g(z)$ admet une dérivée continue dans tout le demiplan $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Nous améliorons maintenant un résultat de Stigum [10].

Théorème 5. *Si* $\sum_1^\infty np(n) = M > 1$, *si* $\sum_{n=1}^\infty np(n)\log n < +\infty$ *et si* $f(z) \neq z^M$, *alors* $|g(z)| < 1$ *lorsque* $z \neq 0$ *et* $\lim_{z\to\infty} g(z) = q$.

Démonstration. Soit L la période de la fonction $\sum_0^\infty p(n)z^n$, $L > 0$. Puisque $g'(0) = -1$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que si $\varepsilon/M \leqslant |z| \leqslant \varepsilon$, alors $(g(z))^L \neq 1$. Par le théorème 1, on obtient que $\lim_{n\to\infty} f_n(g(z)) = q$ uniformément sur $\{z \mid \varepsilon/M \leqslant |z| \leqslant \varepsilon\}$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} g(M^n z) = q$ uniformément sur le même ensemble. Ce qui établit que $\lim_{z\to\infty} g(z) = q$.

D'autre part, si z est un nombre complexe pour lequel $|g(z)| = 1$, puisque $f(g(z/M)) = g(z)$, on a $(g(z))^L = 1$. Il s'ensuit que $(g(z/M^k))^L = 1$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ D'où $z = 0$.

Remarquons que le fait que $\lim_{z\to\infty} f_n(z) = q$ fait connaître un saut de q unités à $t = 0$ pour la fonction $\mu(t)$. Intéressons nous maintenant au comportement de $g'(z)$ lorsque z tend vers l'infini.

Théorème 6. *Si* $M = \sum_{n=1}^\infty n\, p(n) > 1$, *si* $\mu = f'(q)$, *si* a *est un nombre réel tel que* $M^{1+a} > \mu$, *alors*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{g'(z)}{|z|^a} = 0.$$

Démonstration. On peut évidemment supposer que $a \leqslant 0$. Soit $K = \{z \mid 1 \leqslant |z| \leqslant M\}$, par le théorème 5, il existe un $r < 1$ tel que $|g(z)| \leqslant r$ pour tous les z de K. D'où

$$\lim_{n\to\infty} f'\big(f_n(g(z))\big) = f'(q) = \mu$$

uniformément sur K et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(g(z))}{M^{(1+a)n}} = 0.$$

Puisque $\mu < 1$, il existe un $\delta > 0$, tel que $g'(z) = o(|z|^{-1-\delta})$, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire. *Pour tout* a,

$$\int_{-\infty}^\infty |g'(a+iy)|\,dy < +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^\infty |g'(a+iy)|\,dy = 0$$

ce qui montre que $g'(z)$ *appartient à la classe de Hardy* H^1 *du demi-plan* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Je ne serais pas surpris d'ailleurs que $g'(z)$ soit une fonction sans zéro, mais ceci est un autre problème.

$g'(i\xi)$ étant une fonction sommable qui est la transformée de Fourier de la mesure $td\mu(t)$, on obtient que la mesure $d\mu(t)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour $t > 0$. $d\mu(t) = w(t)dt + q \times$ masse de Dirac à $t = 0$. $tw(t)$ est continue pour tout t,

$$\int_0^\infty w(t)\,dt = 1-q \quad \text{et} \quad \int_0^\infty tw(t)\,dt = 1.$$

Nous désignerons dans la suite par $w_x(t)$ la partie absolument continue de la mesure qui est la convolution de la mesure μ x fois avec elle-même.

Théorème 7. *Si* $p(0) = 0$, *si* $M = \sum_1^\infty n\,p(n)$ *et si* a *est un nombre réel tel que* $M^a > \mu = f'(0)$, *alors*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{|z|^a} = 0.$$

Démonstration. On procède comme au théorème 6. Soit $K = \{z \mid 1 \leqslant |z| \leqslant M\}$. Comme il est démontré dans le livre de Montel [7], p. 51-52, ou le livre de Picard [8], p. 156-159, si $z^L \neq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(z)}{\mu^n} = F(z),$$

où $F(z)$ est une fonction continue sur $\{z \mid z^L \neq 1, |z| < 1\}$ et analytique sur $\{z \mid |z| < 1\}$. Il existe donc une constante B tel que si $z \in K$ pour tout n, $f_n(g(z)) \leqslant B\mu^n$. Utilisant l'équation fonctionnelle satisfaite par g, on a

$$\left|\frac{g(M^n z)}{M^{an}}\right| \leqslant B\left(\frac{\mu}{M^a}\right)^n.$$

D'où

$$\lim_{z\to\infty}\frac{g(z)}{|z|^a} = 0.$$

COROLLAIRE. *Si* $p(0) = 0$ *et si* $\sum_1^\infty np(n)\log n < \infty$, *les fonctions* $tw_x(t)$ *sont de mieux en mieux dérivables, c'est-à-dire pour tout entier* k, *il existe un entier* N_k *tel que si* $x \geqslant N_k$, *alors* $tw_x(t)$ *admet une dérivée* k^e *continue.*

En effet

$$tw_x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x\big(g(i\xi)\big)^{x-1} g'(i\xi)e^{i\xi t}d\xi.$$

Soit a un nombre négatif tel que $M^a < \mu$; alors $g(i\xi)^{x-1}g'(i\xi) = s(|\xi|^{ax-1})$ lorsque ξ tend vers l'infini. Si x est suffisamment grand, on peut dériver k fois sous le signe intégral et obtenir encore une fonction Lebesgue-intégrable sous le signe intégral.

THÉORÈME 8. *Si* $\sum_1^\infty np(n)\log n < +\infty$, *si* $\sum_1^\infty np(n) = M > 1$, *si* $f(z) \neq z^M$, *alors pour tout* $t > 0$, $w(t) > 0$, *où* $w(t)$ *est la densité de la variable aléatoire* W.

Démonstration. La transformée de Fourier de $w_x(t) + q^x\delta_0(t)$ est $\big(g(i\xi)\big)^x$. Vu que $g(Mz) = f\big(g(z)\big)$, on a

$$\frac{1}{M}w\left(\frac{t}{M}\right) = \sum_{n=1}^\infty p(n)w_n(t)$$

si $t > 0$. Si $w(c) = 0$ et si $p(n) \neq 0$, alors $w_n(cM) = 0$. Comme $w_n(t)$ est en partie la convolution de $w(t)$ n fois avec elle-même, on obtient $w(cM/n) = 0$. Si le demi-groupe multiplicatif engendré par $\{M/n \mid p_n \neq 0\}$ est dense sur $(0, \infty)$, on obtiendrait que $w(t) \equiv 0$, ce qui est impossible. Si le demi-groupe n'est pas dense, comme il existe deux entiers n_1 et n_2 tel que $p(n_1) \neq 0$, $p(n_2) \neq 0$ $(n_1 < M < n_2)$, ce demi-groupe est de la forme $\{k^n\}_{n=-\infty}^\infty$ où $k > 1$.

Soit N un entier tel que $p_N \neq 0$ et soit (a, b) un intervalle sur lequel $w_{N-1}(t)$ est strictement positif. Supposons que $w(c) = 0$, alors que $c > 0$. Nous allons définir par récurrence une suite d'intervalles (c_n, d_n) sur lesquels $w(t)$ s'annulle, $c_0 = d_0 = c$. Supposons que c_n et d_n ont été définis. Si $c_n = 0$, alors $(c_{n+1}, d_{n+1}) = (0, \infty)$. Si $c_n \neq 0$, soit m l'entier tel que $a < k^m c_n M \leqslant ka$. Posons pour la suite $c_n' = k^m c_n$, $d_n' = k^m d_n$. Si $c_n' M \leqslant b$, alors on pose $(c_{n+1}, d_{n+1}) = (0, \infty)$. Si $c_n' M > b$, alors on pose $c_{n+1} = Mc_n' - b$ et $d_{n+1} = d_n'M - b$. Vérifions que si $w(t)$ s'annulle sur (c_n, d_n), alors $w(t)$ s'annulle sur (c_{n+1}, d_{n+1}). Premièrement, $w(t)$ s'annulle sur (c_n', d_n'). Deuxièmement, $w_N(t)$ s'annulle sur (Mc_n', Md_n'). Troisièmement, $w(t)$ doit s'annuller sur $\{t \mid (\exists d)\ a < d < b, t + d \in (Mc_n', Md_n')\} = (Mc_n' - b, Md_n' - a) \cap (0, \infty)$. Si $Mc_n' - b \leqslant 0$, alors $w(t)$ va s'annuller sur $(0, c_n'M - a)$, donc sur $(0, \infty)$. Si $Mc_n' - b > 0$, alors $w(t)$ s'annulle sur (c_{n+1}, d_{n+1}).

Puisque $w(t) \not\equiv 0$, alors pour tout entier n, $c_n \neq 0$, c'est-à-dire $Mc_n' - b > 0$ et on doit avoir $d_n/c_n < k$. Etudions maintenant comment varient ces rapports d_n/c_n; $d_{n+1}/c_{n+1} = Md_n' - a/Mc_n' - b$. Puisque $a/b < 1 \leqslant d_n'/c_n'$, $ac_n' < bd_n'$. D'où $Mc_n'd_n' - ac_n' > Mc_n'd_n' - bd_n'$ et $Md_n' - a/Mc_n' - b > d_n'/c_n'$. Ainsi $d_n/c_n = d_n'/c_n' < d_{n+1}/c_{n+1}$. La suite c_n' est bornée et ne s'approche pas de zéro; comme $d_n' < kc_n'$, d_n' est également une suite bornée. Soit $\bar{c}$, $\bar{d}$ un point limite de la suite (c_n', d_n'). On aura $M\bar{c} - b \geqslant 0$; si $M\bar{c} = b$, alors $M\bar{d} = a$, ce qui est impossible. Si $M\bar{c} \neq b$, alors $(M\bar{d} - a)/(M\bar{c} - b) = \bar{d}/\bar{c}$. Cette équation étant impossible à réaliser lorsque $\bar{c} \leqslant \bar{d}$, on a donc obtenu une contradiction. Donc $w(t)$ ne peut pas s'annuller sur $(0, \infty)$.

4. La fonction de Green. Pour la suite $\sum_{n=0}^\infty np(n)\log n < +\infty$, $\sum_1^\infty np(n) = M > 1$ et $\sum_{n=0}^\infty p(n)z^n$ est une fonction dont la *période est* 1. Le lecteur nous rendra grâce de cette simplification pour les calculs qui viendront. Un peu plus loin, nous aurons à supposer que $\sum_{n=1}^\infty np(n)\log^2 n < +\infty$. Passons à l'étude de la fonction de Green.

Nous nous intéressons désormais au comportement de $G(x, y)$ lorsque y tend vers l'infini; x sera fixe tout au long de nos considérations. Nous avons

$$p_n(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f_n(e^{i\theta})\big)^x e^{-iy\theta}d\theta,$$

$$yp_n(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\big(f_n(e^{i\theta})\big)^{x-1}f_n'(e^{i\theta})e^{i\theta}e^{-iy\theta}d\theta$$

après une intégration par partie.

Demandons comment se comporte $yp_n(x, y)$ lorsque n et y se transportent vers l'infini de telle sorte que yM^{-n} tend vers un nombre $c > 0$

$$yp_n(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi M^n}^{\pi M^n} x\big(f_n(e^{i\xi/M^n})\big)^{x-1}\frac{f_n'(e^{i\xi/M^n})}{M^n}e^{i\xi/M^n}e^{-iy\xi/M^n}d\xi.$$

Majorons l'intégrand par une fonction sommable positive. Si $|\xi|\leqslant\pi$, alors l'intégrand est majoré par x. Si $\pi M^{k-1}\leqslant\xi\leqslant\pi M^k$, où k est un entier $\geqslant 1$, alors l'intégrand est majoré par

$$x\left|\frac{f_n'(e^{i\xi/M^n})}{M^n}\right|\leqslant x\left|\frac{f_k'\big(f_{n-k}(e^{i\xi/M^n})\big)}{M^k}\,\frac{f_{n-k}'(e^{i\xi/M^n})}{M^{n-k}}\right|\leqslant\frac{x}{M^k}\big|f_k'\big(f_{n-k}(e^{i\xi/M^n})\big)\big|.$$

Soit K la fermeture de

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\Big\{f_n(e^{i\xi/M^n})\,|\,\frac{\pi}{M}\leqslant\xi\leqslant\pi\Big\};$$

alors K est une partie compacte de $\{z|\ |z|\leqslant 1\}$ qui ne contient pas $z=1$. D'où si $\mu_k=\sup\{|f_k'(z)|\ |z\in K\}$, alors $\sum_0^\infty\mu_k<\infty$.

Ainsi l'intégrand est majorée sur $[\pi M^{k-1},\pi M^k]$ par la constante $(x/M^k)\mu_k$. La fonction réelle paire qui vaut x sur $[0,\pi]$ et qui vaut $x\mu_k\,M^{-k}$ sur $(\pi M^{k-1},\pi M^k]$, $k=1,2,\ldots$, est une fonction intégrable qui majore l'intégrand pour tout n et tout y.

L'intégrand, vers quoi tend-il lorsque $n\to\infty$ alors que $yM^{-n}\to c$? Il tend vers $-x\big(g(-i\xi)\big)^{x-1}g'(-i\xi)e^{-ic\xi}$. Par le principe de convergence bornée, $yp_n(x,y)$ tend donc vers

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}-x\big(g(-i\xi)\big)^{x-1}g'(-i\xi)e^{-ic\xi}d\xi$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x\big(g(i\xi)\big)^{x-1}g'(i\xi)e^{ic\xi}d\xi=cw_x(c),$$

ce qui nous donne une bonne idée pour estimer $G(x,y)$. Pour cela, il faudrait cependant avoir un contrôle de ce qui se passe à la tête et à la queue de la série $\sum_{n=0}^\infty p_n(x,y)$.

1. *Estimation de la queue*. Estimons

$$\sum_{M^n\geqslant Ly}yp_n(x,y)$$
$$=\sum_{M^n\geqslant Ly}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi M^n}^{\pi M^n}x\big(f_n(e^{i\xi/M^n})\big)^{x-1}\frac{f_n'(e^{i\xi/M^n})}{M^n}e^{i\xi/M^n}(e^{-iy\xi/M^n}-1)\,d\xi.$$

Il nous suffit comme tantôt de trouver une majoration adéquate des diverses contributions venant des intervalles $[-\pi,\pi]$, $[\pi M^{k-1},\pi M^k]$ et $[-\pi M^k,-\pi M^{k-1}]$, $k\geqslant 1$.

$$\text{(a)}\qquad\sum_{M^n\geqslant Ly}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\big(f_n(e^{i\xi/M^n})\big)^{x-1}\frac{f_n'(e^{i\xi/M^n})}{M^n}e^{i\xi/M^n}(e^{-iy\xi/M^n}-1)\,d\xi\leqslant\frac{x\pi}{L-1}.$$

$$\text{(b)}\qquad\sum_{\substack{M^n\geqslant Ly\\ n\geqslant k}}\frac{1}{2\pi}\int_{\pi M^{k-1}}^{\pi M^k}x\big(f_n(e^{i\xi/M^n})\big)^{x-1}\frac{f_n'(e^{i\xi/M^n})}{M^n}e^{i\xi/M^n}(e^{-iy\xi/M^n}-1)\,d\xi$$
$$\leqslant\sum_{\substack{M^n\geqslant Ly\\ n\geqslant k}}\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/M}^{\pi}x\big|f_k'\big(f_{n-k}(e^{i\xi/M^{n-k}})\big)\big|\,|e^{iy\xi/M^{n-k}}-1|\,d\xi$$
$$\leqslant\sum_{\substack{M^n\geqslant Ly\\ n\geqslant k}}x\mu_k\min\Big(2,\frac{\pi y}{M^{n-k}}\Big).$$

Pour un entier k fixe, majorons la série suivante:

$$\sum_{\substack{M^n\geqslant Ly\\ n\geqslant k}}\min\Big(1,\frac{y}{M^{n-k}}\Big)\leqslant\begin{cases}\dfrac{M}{L}\,\dfrac{M}{M-1} & \text{si}\quad M^k\leqslant L,\\[2ex] k+\dfrac{M}{M-1} & \text{si}\quad L\leqslant M^k.\end{cases}$$

Soit $\varepsilon>0$, vérifions maintenant qu'il existe un nombre N_ε tel que si $y\geqslant 1$ et $L\geqslant N_\varepsilon$, alors $\sum_{M^n\geqslant Ly}yp_n(x,y)<\varepsilon$. On sait qu'il existe un nombre A et un nombre r tels que $r<1$ et $\mu_k\leqslant Ar^k$ $(k\geqslant 1)$.

$$\sum_{M^n\geqslant Ly}yp_n(x,y)\leqslant\frac{MA\pi x}{M-1}\Big(\sum_{M^k\leqslant L}\frac{r^kM^k}{L}+\sum_{M^k\geqslant L}2kr^k\Big).$$

Lorsque L est suffisamment grand, on a bien que cette dernière parenthèse est suffisamment petite.

2. *Estimation de la tête*. Estimons maintenant

$$\sum_{M^n\leqslant\delta y}yp_n(x,y)=\sum_{M^n\leqslant\delta y}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi M^n}^{\pi M^n}x\big(f_n(e^{i\xi/M^n})\big)^{x-1}\frac{f_n'(e^{i\xi/M^n})}{M^n}e^{i\xi/M^n}e^{-iy\xi/M^n}d\xi.$$

Encore ici on brise l'intégrale sous divers intervalles et fondamentalement on utilise le fait que si $h(t)$ est une fonction continue sur $[a,b]$, alors

$$\Big|\int_a^b h(t)e^{-iyt}dt\Big|\leqslant H\frac{\pi}{|y|}+\frac{b-a}{2}\,\omega_h\Big(\frac{\pi}{|y|}\Big),$$

où

$$H=\sup\{|h(t)|\ |t\in[a,b]\}\quad\text{et}\quad\omega_h(\delta)=\sup\{|h(t_1)-h(t_2)|\ |t_1-t_2|\leqslant\delta\}.$$

Nous allons utiliser le théorème 4 pour obtenir un estimé du module de continuité des fonctions $f_n'(e^{i\xi})$. Sachant que

$$f_n'(e^{i\xi}) = \sum_{y=0}^{\infty} y p_n(1, y) e^{iy\xi},$$

$$|f_n'(e^{i\xi_1}) - f_n'(e^{i\xi_2})| \leqslant \sum_{y=0}^{\infty} y p_n(1, y) |e^{iy\xi_1} - e^{iy\xi_2}|,$$

$$|f_n'(e^{i\xi_1}) - f_n'(e^{i\xi_2})| \leqslant \sum_{y=0}^{\infty} y p_n(1, y) 2 \left| \sin \frac{y}{2}(\xi_1 - \xi_2) \right|.$$

Remarquant que si $x \geqslant 0$, $\sin x \leqslant e^{\pi/2}(1 - e^{-x})$, alors

$$|f_n'(e^{i\xi_1}) - f_n'(e^{i\xi_2})| \leqslant 2e^{\pi/2}(M^n - f_n'(e^{-|\xi_1 - \xi_2|/2})).$$

Nous désignerons par $\omega(t)$ la série similaire à celle du théorème 4,

$$\omega(t) = 2e^{\pi/2} M^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n p(n) \theta\left(\frac{nt}{2}\right) \right).$$

D'où

$$\frac{|f_n'(e^{i\xi_1}) - f_n'(e^{i\xi_2})|}{M^n} \leqslant \omega(|\xi_1 - \xi_2|).$$

(a) $$\left| \sum_{M^n \leqslant \delta y} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f_n(e^{i\xi/M^n})\right)^{x-1} \frac{f_n'(e^{i\xi/M^n})}{M^n} e^{i\xi/M^n} e^{-iy\xi/M^n} d\xi \right|$$

$$\leqslant \sum_{M^n \leqslant \delta y} \left(\frac{\pi}{(y-1)} M^n + \pi(x-1) \frac{\pi M^n}{(y-1)} + \pi\omega\left(\frac{\pi}{(y-1)} M^n\right) \right)$$

$$\leqslant \left(\frac{y\pi}{y-1}\right) \delta \frac{M}{M-1} + \pi^2 \frac{(x-1)}{(y-1)} y\delta \frac{M}{M-1} + \pi \sum_{n=0}^{\infty} \omega\left(\frac{\pi y}{(y-1)} \delta M^{-n}\right).$$

(b) $$\left| \sum_{M^n \leqslant \delta y} \int_{\pi M^{k-1}}^{\pi M^k} \left(f_n(e^{i\xi/M^n})\right)^{x-1} \frac{f_n'(e^{i\xi/M^n})}{M^n} e^{-i(y-1)\xi/M^n} d\xi \right| = I(k, y, \delta)$$

$$= \Bigg| \sum_{\substack{M^n \leqslant \delta y \\ n \geqslant k}} \int_{\pi/M}^{\pi} \left(f_k\left(f_{n-k}(e^{i\xi/M^{n-k}})\right)\right)^{x-1} \times$$

$$\times f_k'\left(f_{n-k}(e^{i\xi/M^{n-k}})\right) \frac{f_{n-k}'(e^{i\xi/M^{n-k}})}{M^{n-k}} e^{-i(y-1)\xi/M^{n-k}} d\xi \Bigg|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{M^n \leqslant \delta y \\ n \geqslant k}} \Bigg(\mu_k \frac{\pi}{y-1} M^{n-k} + \frac{\pi}{2} \frac{(M-1)}{M} \Bigg[(x-1)(\mu_k)^2 \frac{\pi}{y-1} M^{n-k} +$$

$$+ \sigma_k \frac{\pi}{y-1} M^{n-k} + \mu_k \omega\left(\frac{\pi}{(y-1)} M^{n-k}\right) \Bigg] \Bigg) + R_k(y).$$

Ici

$$\sigma_k = \sup\{|f_k''(z)| \mid (\exists n \geqslant 1)(\exists \xi) \frac{\pi}{M} < |\xi| \leqslant \pi, z = f_n(e^{i\xi/M^n})\}$$

et

$$R_k(y) = \int_{\pi/M}^{\pi} |f_k'(e^{i\xi}) - f_k'(e^{i(\xi - \pi/(y-1))})| d\xi.$$

$R_k(y)$ se présente parce que $f''(z)$ existe sur $\{z \mid |z| < 1\}$, mais $f''(z)$ n'existe peut-être pas pour $|z| = 1$. Il existe une constante A_1 et un nombre $r < 1$ tels que $\mu_k \leqslant Ar^k$ et $\sigma_k \leqslant A_1 r^k$. Ainsi l'on peut choisir un nombre C (qui ne dépend ni de y, ni de δ) tel que

$$\sum_{M^n \leqslant \delta y} y\, p_n(x, y) \leqslant C \Bigg(\delta + \sum_{n=0}^{\infty} \omega(2\pi\delta M^{-n}) +$$

$$+ \sum_{\substack{M^n \leqslant \delta y \\ n \geqslant k}} r^k \left(\frac{M^{n-k}}{y} + \omega\left(\frac{2\pi M^{n-k}}{y}\right) \right) \Bigg) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(y).$$

Puisque $|R_k(y)| \leqslant 2\pi\mu_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty$ et $\lim_{y \to \infty} R_k(y) = 0$, si y est suffisamment grand, $\sum_{k=1}^{\infty} R_k(y)$ est suffisamment petit.

$$\sum_{\substack{M^n \leqslant \delta y \\ n \geqslant k}} \frac{r^k M^{n-k}}{y} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{M^k} \frac{\delta M}{M-1}.$$

Ce dernier terme est de l'ordre de δ.

$$\sum_{\substack{M^n \leqslant \delta y \\ n \geqslant k}} \omega\left(\frac{2\pi M^{n-k}}{y}\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \omega(2\pi\delta M^{-n}).$$

Vérifions que si $\sum_{n=1}^{\infty} n p(n) \log^2 n < \infty$, alors $\lim_{\delta \to 0} \sum_{n=0} \omega(2\delta M^{-n}) = 0$. Lorsque $\delta \leqslant 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m p(m) \theta(m\delta M^{-n}) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m p(m) \theta(m M^{-n})$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} m p(m) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta(m M^{-n}) \right)$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} m p(m) \frac{((\log m) + 1)^2}{2 \log M} < +\infty.$$

Comme $\lim_{\delta\to 0}\theta(m\delta M^{-n}) = 0$, alors $\lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\omega(2\pi\delta M^{-n}) = 0$.

Ces calculs démontrent que si $\sum_{1}^{\infty} np(n)\log^2 n < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre N_ε et un nombre δ tel que, si $y \geqslant N_\varepsilon$,

$$\sum_{M^n \leqslant \delta y} yp_n(x, y) < \varepsilon.$$

Nous avons établi le théorème suivant:

THÉORÈME 9. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} np(n)\log^2 n < \infty$, *si* $\sum_{1}^{\infty} np(n) = M > 1$, *si* $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n$ *est apériodique, si* $w_x(t)$ *est la densité de la variable aléatoire limite de* Z_n^x/M^n *et si* $h(x; c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} cM^n w_x(cM^n)$, *alors* $h(x; c)$ *est une fonction continue par rapport à* c, *strictement positive. Si* y_n *est une suite d'entiers tels que* $\lim_{n\to\infty} y_n M^{-n} = c > 0$, *alors* $\lim_{n\to\infty} y_n G(x, y_n) = h(x; c)$.

Le fait que $h(x; c) > 0$ découle du théorème 8.

5. Fonctions harmoniques. Pour la nomenclature et pour les résultats fondamentaux au sujet des fonctions surharmoniques d'un processus de Markov sur un nombre dénombrable d'états, je renvoie le lecteur au volume de Spitzer [9], p. 322-338. Ce que j'appelle ici fonctions harmoniques est appelé "regular functions" par Spitzer. Quant à la terminologie ayant trait aux cônes convexes, on peut se reférer aux travaux de Choquet (par exemple cf. [1]).

Je veux indiquer quelques propriétés des fonctions harmoniques d'un processus de Galton-Watson indécomposable. Soit $h(x)$ une fonction harmonique pour la matrice $p(x, y)$, c'est-à-dire $\sum_{y=0}^{\infty} p(x, y)h(y) = h(x)$. Si l'on considère le cône des séries de puissances d'une variable z à coefficients positifs, une fonction harmonique induit une fonctionnelle linéaire sur ce cône: si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)z^n$, posons

$$H(g) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)c(n) \leqslant +\infty.$$

La propriété fondamentale de cette fonctionnelle est que $H(g\circ f) = H(g)$ (cf. l'article [2]).

Comme je l'ai remarqué dans [2], il est beaucoup plus facile d'étudier les fonctions harmoniques lorsque $p(0) = 0$ et par bonheur, on peut toujours se ramener à ce cas. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n$, considérons la fonction

$$f^*(w) = \frac{f(q+(1-q)w)-q}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} p^*(n)w^n;$$

alors $p^*(0) = 0$. La correspondance entre les fonctions harmoniques des processus en cascade issus de $f(z)$ et de $f^*(w)$ est la suivante:

$$H^*(w^x) = H\left(\left(\frac{z-q}{1-q}\right)^x\right) \quad \text{et} \quad H(z^x) = H^*\left((q+(1-q)w)^x\right).$$

Remarquons que

$$p^*(n) = \sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n} q^{m-n}(1-q)^{n-1}p(m) \quad \text{si } n > 0.$$

Si $g(n)$ est une fonction croissante positive, comparons $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)g(n)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} p^*(n)g(n)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^*(n)g(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n} q^{m-n}(1-q)^{n-1}p(m)g(n)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n} q^{m-n}(1-q)^{n-1}g(n)p(m) \leqslant \frac{1}{1-q}\sum_{m=1}^{\infty} g(m)p(m).$$

Par exemple, si $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)n\log^a n < \infty$, alors $\sum_{1}^{\infty} p^*(n)n\log^a n < \infty$.

THÉORÈME 10. *Si* $h(x)$ *est une fonction harmonique et si* $h(0) = 0$, $h(x)$ *est la limite d'une suite croissante de potentiels.*

Démonstration. Considérons la fonction harmonique h^* pour la fonction f^*; alors si

$$h_n^*(x) = \begin{cases} h^*(x) & \text{si } x \leqslant n, \\ 0 & \text{si } x > n, \end{cases}$$

$P^*h_n \leqslant h_n$. Vu que $(P^*)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, alors $\lim_{m\to\infty}(P^*)^m h_n = 0$. Si h_n est la fonction telle $h_n(x) = h_n^*\big((q+(1-q)w)^x\big)$, alors $h_n(x)$ est un potentiel pour la fonction f et $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$.

THÉORÈME 11. *Le cône des fonctions surharmoniques positives d'un processus de Galton-Watson indécomposable avec une moyenne supérieure à 1 est à base compacte.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $p(0) = 0$.

(a) Nous allons d'abord vérifier qu'il existe un entier n et un entier y tel que $p_n(1, y) > 0$ et $p_n(1, y+1) > 0$. Si pour $n = 1$, ceci ne se produit jamais pour deux entiers consécutifs y et $y+1$, vu que par hypothèse $\{n-m \mid p(1, n) \neq 0, p(1, m) \neq 0\}$ engendre comme sous-groupe les entiers, il existe 4 entiers x_1, x_2, x_3, x_4 tels que $p(1, x_i) > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $x_1 < x_2, x_3 < x_4$ et les deux entiers $x_2 - x_1, x_4 - x_3$ sont relativement premiers. On se convainc facilement que parmi ces 4 entiers, on peut en choisir 3, y_1, y_2 et y_3 tels que $y_1 < y_2 < y_3$ et les entiers $y_2 - y_1, y_3 - y_1$ sont relativement premiers. On peut donc trouver deux entiers positifs N_2 et N_3 tels que $N_2(y_2 - y_1) - N_3(y_3 - y_1) = \pm 1$. Soit n un entier pour lequel $y_1^{n-1} \geqslant N_2$ et $y_1^{n-1} \geqslant N_3$. Il y a une probabilité > 0 qu'à la génération $(n-1)$, y_1^{n-1} particules soient produites $(p_{n-1}(1, y_1^{n-1}) > 0)$. Avec une probabilité strictement positive, de ces y_1^{n-1} particules, N_2 produiront chacune y_2 particules et les autres produiront chacune y_1 particules, c'est-à-dire $p_n(1, y_1^n + N_2(y_2 - y_1)) > 0$. De même $p_n(1, y_1^n + N_3(y_3 - y_1)) > 0$. Et précisément les deux entiers $y_1^n + N_2(y_2 - y_1)$ et $y_1^n + N_3(y_3 - y_1)$ sont deux entiers consécutifs.

(b) Nous allons maintenant vérifier qu'il existe un entier y_0 tel que si $y \geqslant y_0$, il existe un entier n tel que $p_n(1, y) > 0$. Soient N et y_1 deux entiers tels que $p_N(1, y_1) > 0$ et $p_N(1, y_1 + 1) > 0$; on peut trouver un entier L tel que $y_1^{L+1} \leqslant (y_1 + 1)^L$. On pose alors $y_0 = y_1^L$. On remarque que

$$[y_0, \infty) = \bigcup_{k=0}^{\infty} [y_1^{L+k}, (y_1 + 1)^{L+k}]$$

et que si $y \in [y_1^{L+k}, (y_1 + 1)^{L+k}]$, alors $p_{N(L+k)}(1, y) > 0$.

(c) On peut donc trouver une fonction $c(y)$ définie sur les entiers $y \geqslant y_0$, prenant des valeurs entières positives pour laquelle $p_{c(y)}(1, y) > 0$. Si $h(x)$ est une fonction surharmonique telle que $h(1) \leqslant 1$, si $x \geqslant y_0$, alors $h(x) \leqslant 1/p_{c(x)}(1, x)$ étant donné que

$$\sum_{y=0}^{\infty} p_{c(x)}(1, y) h(y) \leqslant h(1),$$

ce qui permet de dire que $\{h(x) \mid h$ est surharmonique et positive; $0 \leqslant x < y_0 \Rightarrow h(x) \leqslant 1\}$ est un ensemble compact, qui est une base pour le cône des fonctions surharmoniques positives. Ce qui complète la démonstration.

Lorsque l'on a dans un compact convexe K une suite croissante de parties convexes fermées K_n telles que la réunion des K_n est dense dans K les points extrémaux de K peuvent s'obtenir comme limite de points extrêmes de K_n. On sait également que si $U(x)$ est un potentiel qui est extrême dans le cône des fonctions surharmoniques, alors il existe un y et une constante C tels que $U(x) = CG(x, y)$. Reliant ces remarques avec les théorèmes 9, 10 et 11 on obtient le corollaire suivant:

Corollaire. *Si f est apériodique, si $\sum_{1}^{\infty} n \log^2 n p(n) < \infty$, $\sum_{1}^{\infty} np(n) > 1$, si $h(x)$ est une fonction harmonique extrémale, si $h(0) \neq 0$, $h(x) = h(0) q^x$,*

si $h(0) = 0$, il existe un c tel que

$$h(x) = h(1) \frac{h(x; c)}{h(1, c)}.$$

Quelques remarques pour terminer:

1. Le lecteur attentif pourra déterminer les fonctions harmoniques pour une fonction f dont la période est $L > 1$ à l'aide de la technique que nous avons exposé.

2. Dans un article subséquent, j'établirai que si c_1 et c_2 sont deux nombres tels que $1 \leqslant c_1 < c_2 < M$, alors $h(x, c_1)$ et $h(x, c_2)$ sont deux fonctions linéairement indépendantes. De plus, $h(x; c)$ est pour tout c effectivement une fonction harmonique extrémale. Malheureusement, nous établirons ceci sous l'hypothèse quelque peu restrictive que $\sum_{1}^{\infty} n^2 p(n) < +\infty$.

Travaux cités

[1] G. Choquet et P. A. Meyer, *Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 1963, p. 139–154.

[2] S. Dubuc, *Positive harmonic functions of branching processes*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), p. 324–326.

[3] T. E. Harris, *The theory of branching processes*, 1963.

[4] H. Kesten et B. P. Stigum, *A limit theorem for multi-dimensional Galton-Watson processus*, Ann Math. Stat. 37 (1966), p. 1211–1223.

[5] N. Levinson, *Limiting theorems for Galton-Watson branching process*, Illinois J. Math. 3 (1959), p. 554–565.

[6] M. Loeve, *Probability theory*, New York 1960.

[7] P. Montel, *Leçons sur les récurrences et leurs applications*, Paris 1957.

[8] E. Picard, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*, Paris 1950.

[9] F. Spitzer, *Principles of random walk*, Princeton 1964.

[10] B. P. Stigum, *A theorem in the Galton-Watson process*, Ann. Math. Stat. 37 (1966), p. 695–698.

[11] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton 1946.

Reçu par Rédaction le 15. 11. 1968