Zusammen mit (6) und (7) folgt daraus $f(y) = 0$, da bis auf e^0 alle Doppelfolgen, die auf der rechten Seite von (8) summiert werden, aus RCN sind.

(d) *Nachweis des Widerspruchs.* Aus der Annahme $RCA^* \subseteq B$ und Hilfssatz 2 folgt im Fall $\chi(A) \neq 0$, daß RC in D T_1-dicht ist, und im Fall $\chi(A) = 0$, daß RCN in RC T_1-dicht ist. Das widerspricht der Tatssche, daß $(RC; T_1)$ und $(RCN; T_1)$ Banachräume sind und ein $x \in D \setminus RC$ existiert.

Wenn man davon absieht, daß im Fall $\chi(A) = 0$ die Existenz eines $x \in D \setminus RC$ gar nicht gefordert wird, dann läßt sich wegen $RCA^* \subseteq RCA$ das Ergebnis von Satz 1 durch den folgenden Satz 2 noch einfacher, wenn auch weniger allgemein formulieren:

SATZ 2. *Transformiert eine regulär-konvergenztreue vierdimensionale Matrix eine beschränkte, nicht regulär-konvergente Doppelfolge in eine regulär-konvergente Doppelfolge, so auch eine unbeschränkte.*

Literaturnachweis

[1] V. Darevsky, *On intrinsically perfect methods of summation*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. (Bull. Acad. Sc. URSS) 10 (1946), S. 97–104 (Russisch; englischer Auszug).

[2] H. J. Hamilton, *Transformations of multiple sequences*, Duke Math. J. 2 (1936), S. 29–60.

[3] — and J. D. Hill, *Operation theory and multiple sequence transformations*, ibidem 8 (1941), S. 154–162.

[4] E. Jürimäe, *Funktsionaalanalüüsi Meetodid Kahekordsete Ridade Teoorias*, Tartu Riikl. Ül. Toimetised 55 (1958), S. 3–7 (Estnisch).

[5] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les méthodes linéaires de sommation*, C. R. Acad. Sc. Paris 196 (1933), S. 32–34.

[6] — *On linear methods of summability*, Studia Math. 14 (1954), S. 129–160.

[7] A. Wilansky, *Functional analysis*, New York — Toronto — London 1964.

[8] K. Zeller, *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren*, Math. Z. 53 (1951), S. 463–487.

Reçu par la Rédaction le 8. 2. 1969

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIV. (1970)

Spektraleigenschaften eindimensionaler Differentialoperatoren höherer Ordnung

von

E. MÜLLER-PFEIFFER (Jena, DDR)

Der zugrunde liegende Hilbertraum ist $L_2(-\infty, +\infty)$, die Menge der im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbaren (komplexwertigen) Funktionen, die auf der x-Achse definiert sind. Es wird das kontinuierliche Spektrum [1] von selbstadjungierten Differentialoperatoren untersucht, die von dem Differentialausdruck

$$(1) \qquad l[y] = (-1)^n [p_0 y^{(n)}]^{(n)} + (-1)^{n-1} [p_1 y^{(n-1)}]^{(n-1)} + \ldots + p_n y, \quad n \geqslant 1,$$

erzeugt werden. Von den Koeffizienten $p_k = p_k(x)$ wird vorausgesetzt, daß es reelle Funktionen sind und daß sie resp. lokal zu den Sobolewschen Räumen $W_2^{n-k}(-\infty, +\infty)$ gehören [10],

$$(2) \qquad p_k(x) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{n-k}(-\infty, +\infty).$$

Dann ist $l[y] \in L_2(-\infty, +\infty)$, wenn $y(x)$ zu $C_0^\infty(-\infty, +\infty)$ gehört, d.h. wenn $y(x)$ beliebig oft differenzierbar ist und einen kompakten Träger besitzt. Durch

$$Ay = l[y], \qquad D(A) = C_0^\infty(-\infty, +\infty),$$

wird ein Operator definiert, dessen Definitionsbereich $D(A)$ im Hilbertraum $L_2(-\infty, +\infty)$ dicht liegt; A ist symmetrisch. Alle selbstadjungierten Erweiterungen von A besitzen bekanntlich das gleiche kontinuierliche Spektrum ([8], S. 203).

Die vorliegenden Untersuchungen befassen sich mit der Frage, welchen Einfluß das Verhalten der Koeffizienten $p_k(x)$ auf die Lokalisierung des kontinuierlichen Spektrums einer selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{A}$ von A hat. Dazu werden folgende zusätzlichen Voraussetzungen über die Koeffizienten gemacht:

1. $p_0(x) \geqslant c_0 > 0$.

[1] Als *kontinuierliches Spektrum* wird die Menge der Häufungspunkte des Spektrums verstanden.

2. Bedeutet $p_k^-(x) = \min(p_k(x), 0)$ den Negativteil des Koeffizienten $p_k(x)$, so sei für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ das Integral $\int\limits_0^x p_k^-(t)\,dt$ als Funktion der oberen Grenze x auf der x-Achse gleichmäßig stetig.

3. Für jedes $\omega > 0$ sollen hinsichtlich der Integralmittelwerte der Koeffizienten die Grenzbeziehungen

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\omega} \int\limits_x^{x+\omega} p_k(t)\,dt \geqslant c_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

gelten.

Hinsichtlich des kontinuierlichen Teils $C(\tilde{A})$ des Spektrums einer beliebigen selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{A}$ von A gilt dann folgender Satz, der eine Verallgemeinerung gewisser Resultate von F. M. Glazman darstellt ([4], Kap. III):

Satz 1. *Erfüllen die Koeffizienten des Differentialausdrucks* (1) *die Voraussetzungen* (2) *und* 1-3 *und bezeichnet* μ *das Minimum des Polynoms*

$$\eta = c_0\xi^{2n} + c_1\xi^{2n-2} + \ldots + c_{n-1}\xi^2 + c_n, \tag{4}$$

so liegt links von μ *kein Punkt des kontinuierlichen Spektrums* $C(\tilde{A})$ *einer beliebigen selbstadjungierten Erweiterung* $\tilde{A}$ *von* A,

$$C(\tilde{A}) \cap (-\infty, \mu) = \emptyset.$$

Beweis. Der Beweis wird in drei Schritten geführt.

I. Als erstes wird gezeigt, daß für die Lokalisierung des kontinuierlichen Spektrums $C(\tilde{A})$ allein wesentlich ist, wie die Koeffizientenfunktionen $p_k(x)$ sich für $|x| \to \infty$ verhalten. Das folgt sofort mit Hilfe der Zerlegungsmethode für Operatoren ([8], S. 306). Durch die Punkte $-x_0$ und $x_0 (> 0)$ wird die x-Achse in drei Teile $(-\infty, -x_0)$, $(-x_0, +x_0)$ und $(x_0, +\infty)$ zerlegt. $D(A_1)$ sei diejenige Teilmenge von $D(A)$, deren Elemente Funktionen mit kompaktem Träger in $(-\infty, -x_0)$ sind. Analog werden die Teilmengen $D(A_2)$ und $D(A_3)$ definiert, die resp. zu den Intervallen $(-x_0, x_0)$, $(x_0, +\infty)$ gehören. Durch die Definitionsbereiche $D(A_j)$, $j = 1, 2, 3$, werden Operatoren A_j definiert, die Einschränkungen von A sind:

$$A_j y = Ay, \qquad y \in D(A_j).$$

Faßt man die A_j, $j = 1, 2, 3$, als Operatoren auf, die resp. in den Hilberträumen $L_2(-\infty, -x_0)$, $L_2(-x_0, x_0)$ und $L_2(x_0, \infty)$ wirken, so erweisen sie sich als symmetrisch. Sind dann $\tilde{A}$, $\tilde{A}_j$ irgendwelche selbstadjungierten Erweiterungen von A, A_j, so liefert die Zerlegungsmethode hinsichtlich der kontinuierlichen Spektren der Operatoren die Beziehung

$$C(\tilde{A}) = C(\tilde{A}_1) \cup C(\tilde{A}_2) \cup C(\tilde{A}_3).$$

$C(\tilde{A}_2)$ ist aber leer, da $\tilde{A}_2$ als selbstadjungierte Erweiterung des regulären Operators [2] A_2 kein kontinuierliches Spektrum besitzt ([8], S. 203). Also ist

$$C(\tilde{A}) = C(\tilde{A}_1) \cup C(\tilde{A}_3). \tag{5}$$

Es genügt, wenn wir uns mit $C(\tilde{A}_3)$ befassen, da für die Bestimmung von $C(\tilde{A})$ die Operatoren A_1 und A_3 gleichberechtigt sind. Der Punkt x_0 kann nach Bedarf groß gewählt werden.

II. $C(\tilde{A}_3)$ stimmt mit dem kontinuierlichen Spektrum $C(\hat{A}_3)$ der Friedrichsschen Erweiterung $\hat{A}_3$ von A_3 überein. Untere Schranken für $C(\hat{A}_3)$ gewinnt man über die quadratische Form (A_3u, u), $u \in C_0^\infty(x_0, \infty)$, von A_3. Um $(A_3u, u)_{(x_0,\infty)}$ [3] nach unten abzuschätzen, wird A_3 wie folgt zerlegt. Bezeichnet A_ε den Operator

$$\begin{aligned} A_\varepsilon y &= (-1)^n[q_0(x)y^{(n)}]^{(n)} + (-1)^{n-1}[q_1(x)y^{(n-1)}]^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)\cdot y, \\ q_k(x) &= p_k(x) - c_k + \varepsilon, \qquad x \in (x_0, \infty);\ k = 0, 1, \ldots, n;\ 0 < \varepsilon < c_0; \end{aligned} \tag{6}$$

mit dem Definitionsbereich $D(A_\varepsilon) = C_0^\infty(x_0, \infty)$ und ist

$$\begin{aligned} B_\varepsilon y &= (-1)^n(c_0 - \varepsilon)y^{(2n)} + (-1)^{n-1}(c_1 - \varepsilon)y^{(2n-2)} + \\ &\qquad + \ldots + (c_n - \varepsilon)y, \quad D(B_\varepsilon) = C_0^\infty(x_0, \infty), \end{aligned} \tag{7}$$

so gilt offenbar $A_3 = A_\varepsilon + B_\varepsilon$, und für die Koeffizienten $q_k(x)$ sind die Bedingungen

$$q_0(x) \geqslant \varepsilon \text{ und } \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\omega} \int\limits_x^{x+\omega} q_k(t)\,dt \geqslant \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

erfüllt. Da die Koeffizienten in (7) Konstanten sind, läßt sich die quadratische Form $(B_\varepsilon u, u)$ von B mit Hilfe der Fouriertransformation leicht nach unten abschätzen. Zu diesem Zweck werden die Funktionen $u = u(x)$ aus $C_0^\infty(x_0, \infty)$ durch Null auf die gesamte x-Achse fortgesetzt gedacht. Durch partielle Integration und Fouriertransformation erhält man dann

$$\begin{aligned} (B_\varepsilon u, u) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{(c_0 - \varepsilon)|u^{(n)}(x)|^2 + (c_1 - \varepsilon)|u^{(n-1)}|^2 + \ldots + (c_n - \varepsilon)|u|^2\}\,dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [(c_0 - \varepsilon)\xi^{2n} + (c_1 - \varepsilon)\xi^{2n-2} + \ldots + (c_n - \varepsilon)]\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\geqslant \mu_\varepsilon \|\hat{u}\|^2 = \mu_\varepsilon \|u\|^2. \end{aligned}$$

---

[2] Ein Operator A heißt *regulär*, wenn das Grundintervall (a,b) endlich ist und die Funktionen $1/p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ im ganzen Intervall (a,b) integrierbar sind ([8], S. 163), was wegen (2) in unserem Fall erfüllt ist.

[3] Der Index (x_0, ∞) weist darauf hin, daß das Skalarprodukt sich auf den Hilbertraum $L_2(x_0, \infty)$ bezieht. Im folgenden werden solche Indizes weggelassen, wenn aus dem Zusammenhang folgt, welcher Hilbertraum jeweils gemeint ist.

Dabei ist μ_ε das Minimum des Polynoms

$$\eta_\varepsilon(\xi) = (c_0-\varepsilon)\,\xi^{2n}+(c_1-\varepsilon)\,\xi^{2n-2}+\ldots+(c_n-\varepsilon)$$

und

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}u(x)\,dx$$

die Fouriertransformierte von $u(x)$ [1].

Im dritten Schritt des Beweises wird gezeigt, daß der Operator A_ε für jedes ε positiv ist, so daß aus

$$(A_\varepsilon u,\, u)_{(x_0,\infty)} \geqslant 0 \quad \text{und} \quad (B_\varepsilon u,\, u)_{(x_0,\infty)} \geqslant \mu_\varepsilon \|u\|^2_{(x_0,\infty)}$$

durch Addition

$$(A_3 u,\, u)_{(x_0,\infty)} \geqslant \mu_\varepsilon \|u\|^2_{(x_0,\infty)}$$

folgt. Da diese Abschätzung für jedes $\varepsilon > 0$ richtig ist und μ_ε für $\varepsilon \to 0$ gegen μ strebt, gilt dann auch

$$(A_3 u,\, u) \geqslant \mu \|u\|^2, \qquad u \in C_0^\infty(x_0,\, \infty).$$

Links von μ liegt demnach kein Punkt des Spektrums der Friedrichsschen Erweiterung $\hat{A}_3$ von A_3, was insbesondere

$$C(\hat{A}_3) \cap (-\infty,\, \mu) = \emptyset$$

bedeutet. Damit ist auch

$$C(\tilde{A}_3) \cap (-\infty,\, \mu) = \emptyset$$

für eine beliebige selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}_3$ von A_3. Entsprechend gilt

$$C(\tilde{A}_1) \cap (-\infty,\, \mu) = \emptyset,$$

so daß aus (5) die Behauptung folgt.

III. Es bleibt nachzuweisen, daß für ein beliebiges $\varepsilon > 0$

$$(A_\varepsilon u,\, u) \geqslant 0, \qquad u \in C_0^\infty(x_0,\, \infty),$$

erfüllt ist. Das Intervall $[x_0,\, \infty)$ wird durch Teilpunkte $x_0,\, x_1,\, \ldots$ in Intervalle der Länge $\omega_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$ zerlegt. Die Koeffizienten $q_k(x)$ werden in den Positivteil $q_k^+(x) = \max\big(q_k(x),\, 0\big)$ und den Negativteil $q_k^-(x) = \min\big(q_k(x),\, 0\big)$ aufgespalten und

(9)

$$\int\limits_{(\omega_\nu)} q_k^+(x)\,dx = {}_k\alpha_\nu, \qquad \int\limits_{(\omega_\nu)} q_k^-(x)\,dx = {}_k\beta_\nu, \qquad k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots,$$

gesetzt, wobei (ω_ν) das Intervall $(x_{\nu-1},\, x_\nu)$ bedeutet. In der Darstellung

$$(A_\varepsilon u,\, u) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_{(\omega_\nu)} \big(q_0(x)\,|u^{(n)}(x)|^2 + q_1(x)\,|u^{(n-1)}|^2 + \ldots + q_n(x)\,|u|^2\big)\,dx$$
$$\geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\varepsilon\,\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)} + \int\limits_{(\omega_\nu)} q_1(x)\,|u^{(n-1)}|^2 + \ldots + q_n(x)\,|u|^2\,dx\Big)$$

der quadratischen Form von A_ε wird zwecks Abschätzung nach unten zunächst der Anteil

$${}_1S_\nu = \varepsilon\,\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)} + \int\limits_{(\omega_\nu)} q_1(x)\,|u^{(n-1)}|^2\,dx$$

entsprechend (9) wie folgt zerlegt:

$${}_1S_\nu = \frac{\varepsilon}{2}\,\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)} + \int\limits_{(\omega_\nu)} q_1^+(x)\,|u^{(n-1)}|^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\,\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)} + \int\limits_{(\omega_\nu)} q_1^-(x)\,|u^{(n-1)}|^2\,dx,$$

$${}_1S_\nu^+ = \frac{\varepsilon}{2}\,\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)} + \int\limits_{(\omega_\nu)} q_1^+(x)\,|u^{(n-1)}|^2\,dx,$$

$${}_1S_\nu^- = \frac{\varepsilon}{2}\,\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)} + \int\limits_{(\omega_\nu)} q_1^-(x)\,|u^{(n-1)}|^2\,dx.$$

Im folgenden wird die Ungleichung

$$\int\limits_0^\omega |v'(x)|^2\,dx \geqslant \frac{1}{\omega^2}\int\limits_0^\omega |v(x)|^2\,dx \tag{10}$$

benutzt, die für Funktionen $v(x)$ gilt, die auf dem Intervall $[0,\omega]$ eine Nullstelle besitzen. (10) folgt leicht aus der Schwarzschen Ungleichung für Integrale ([6], S. 53). Wenn $M_\nu^{(n-1)}$ und $m_\nu^{(n-1)}$ diejenigen (komplexen) Werte der auf das Intervall $[x_{\nu-1},\, x_\nu]$ eingeschränkten Funktion $u^{(n-1)}(x)$ bezeichnen, deren absolute Beträge Maximum bzw. Minimum von $|u^{(n-1)}(x)|$ auf $[x_{\nu-1},\, x_\nu]$ sind, kann wie folgt abgeschätzt werden:

$${}_1S_\nu^+ \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\,\|(u^{(n-1)} - m_\nu^{(n-1)})'\|^2_{(\omega_\nu)} + {}_1\alpha_\nu\,|m_\nu^{(n-1)}|^2$$
$$\geqslant \frac{\varepsilon}{2\omega_\nu^2}\,\|u^{(n-1)} - m_\nu^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)} + \frac{{}_1\alpha_\nu}{\omega_\nu}\,\|m_\nu^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}$$
$$= \frac{{}_1\alpha_\nu}{\omega_\nu(1+\varepsilon_\nu^2)}\left[\frac{\varepsilon_\nu^2\,\varepsilon}{2\,{}_1\alpha_\nu\,\omega_\nu}(1+\varepsilon_\nu^{-2})\,\|u^{(n-1)} - m_\nu^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)} + (1+\varepsilon_\nu^2)\,\|m_\nu^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}\right].$$

Setzt man

$$\varepsilon_\nu^2 = \frac{2\,{}_1\alpha_\nu\,\omega_\nu}{\varepsilon}$$

und benutzt

$$\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)\|f-g\|^2+(1+\eta^2)\|g\|^2 \geqslant \|f\|^2,$$

so erhält man

$$(11)\qquad {}_1S_\nu^+ \geqslant \frac{\varepsilon\, {}_1\alpha_\nu}{\omega_\nu(\varepsilon+2\, {}_1\alpha_\nu\,\omega_\nu)}\,\|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}.$$

Um S_1^- abzuschätzen, werde folgendes vorausgeschickt. Aus der Ungleichung (10) folgt

$$\omega_\nu\|u^{(n)}\|_{(\omega_\nu)} = \omega_\nu\|(u^{(n-1)}-M_\nu^{(n-1)})'\|_{(\omega_\nu)} \geqslant \|M_\nu^{(n-1)}-u^{(n-1)}\|_{(\omega_\nu)}$$
$$\geqslant \|M_\nu^{(n-1)}\|_{(\omega_\nu)}-\|u^{(n-1)}\|_{(\omega_\nu)}$$

und damit

$$\|M_\nu^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)} \leqslant \|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}+\omega_\nu^2\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)}+2\omega_\nu\|u^{(n-1)}\|_{(\omega_\nu)}\|u^{(n)}\|_{(\omega_\nu)}$$
$$\leqslant (1+\delta_\nu^2)\|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}+\omega_\nu^2(1+\delta_\nu^{-2})\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)}.$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich

$${}_1S_\nu^- \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)}+\frac{{}_1\beta_\nu}{\omega_\nu}\|M_\nu^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}$$
$$\geqslant\left[\frac{\varepsilon}{2}+{}_1\beta_\nu\,\omega_\nu(1+\delta_\nu^{-2})\right]\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)}+\frac{{}_1\beta_\nu}{\omega_\nu}(1+\delta_\nu^2)\|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)},$$

woraus mit

$$\delta_\nu^2=-\frac{2\,{}_1\beta_\nu\,\omega_\nu}{\varepsilon+2\,{}_1\beta_\nu\,\omega_\nu}$$

die Abschätzung

$$(12)\qquad {}_1S_\nu^- \geqslant \frac{\varepsilon\,{}_1\beta_\nu}{\omega_\nu(\varepsilon+2\,{}_1\beta_\nu\,\omega_\nu)}\,\|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}$$

folgt. Bedingung dabei ist, daß

$$\omega_\nu<\frac{\varepsilon}{2|{}_1\beta_\nu|}$$

gewählt wird. Faßt man (11) und (12) zusammen, ergibt sich

$${}_1S_\nu = {}_1S_\nu^+ + {}_1S_\nu^- = \varepsilon\|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)}+\int\limits_{(\omega_\nu)} q_1(x)\,|u^{(n-1)}|^2\,dx$$
$$\geqslant \frac{\varepsilon^2({}_1\alpha_\nu+{}_1\beta_\nu)+4\varepsilon\,{}_1\alpha_\nu\cdot{}_1\beta_\nu\,\omega_\nu}{\omega_\nu(\varepsilon+2\,{}_1\alpha_\nu\,\omega_\nu)(\varepsilon+2\,{}_1\beta_\nu\,\omega_\nu)}\,\|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)},$$

und wenn der Mittelwert

$${}_1\gamma_\nu=\frac{1}{\omega_\nu}\int\limits_{(\omega_\nu)} q_1(x)\,dx$$

benutzt wird

$$(13)\qquad {}_1S_\nu \geqslant \frac{\varepsilon\cdot{}_1\gamma_\nu(\varepsilon+4\omega_\nu\cdot{}_1\beta_\nu)-4\varepsilon\,{}_1\beta_\nu^2}{(\varepsilon+2\,{}_1\gamma_\nu\cdot\omega_\nu^2-2\,{}_1\beta_\nu\cdot\omega_\nu)(\varepsilon_1+2\beta_\nu\cdot\omega_\nu)}\,\|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}.$$

Da mit der Funktion $\int\limits_0^x p_1^-(t)\,dt$ auch $\int\limits_0^x q_1^-(t)\,dt$ gleichmäßig stetig ist, werden die Zahlen $|{}_1\beta_\nu|$ mit $\omega_\nu={}_1\omega\to 0$ gleichmäßig klein. Für hinreichend kleines ${}_1\omega$ (>0) und hinreichend großes x_0 wird wegen

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{\omega}\int\limits_x^{x+\omega} q_1(t)\,dt\geqslant\varepsilon$$

für jedes ν die Abschätzung

$${}_1S_\nu\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}$$

richtig sein, was an der Struktur des Koeffizienten von $\|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}$ in (13) zu erkennen ist. Für hinreichend großes x_0 $(x_0\geqslant{}_1x_0)$ gilt demnach

$$(A_\varepsilon u,u)\geqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2}\|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}+\int\limits_{(\omega_\nu)} q_2(x)\,|u^{(n-2)}|^2\,dx+\ldots+\int\limits_{(\omega_\nu)} q_n(x)\,|u|^2\,dx\right)$$
$$\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\|u^{(n-1)}\|^2_{(x_0,\infty)}+\int\limits_{x_0}^{\infty} q_2(x)\,|u^{(n-2)}|^2\,dx+\ldots+\int\limits_{x_0}^{\infty} q_n(x)\,|u|^2\,dx.$$

Durch eine analoge Rechnung ergibt sich daraus für hinreichend großes x_0 die Abschätzung

$$(A_\varepsilon u,u)\geqslant\frac{\varepsilon}{3}\|u^{(n-2)}\|^2_{(x_0,\infty)}+\int\limits_{x_0}^{\infty} q_3(x)\,|u^{(n-3)}|^2\,dx+\ldots+\int\limits_{x_0}^{\infty} q_n(x)\,|u|^2\,dx,$$
$$x_0\geqslant{}_2x_0\geqslant{}_1x_0.$$

Nach endlich vielen Schritten erhält man

$$(A_\varepsilon u,u)_{(x_0,\infty)}\geqslant\frac{\varepsilon}{n+1}\|u\|^2_{(x_0,\infty)},\quad u\in C_0^\infty(x_0,\infty),\ x_0\geqslant{}_nx_0\geqslant{}_{n-1}x_0\geqslant\ldots\geqslant{}_1x_0,$$

womit der Beweis vollständig ist.

Es erhebt sich nun die Frage, ob das kontinuierliche Spektrum von rechts her bis an den Punkt $x = \mu$ herankommt. Wenn z.B. die Koeffizienten $p_k(x)$ Konstanten sind, $p_k(x) = c_k$, ergibt sich bekanntlich $C(\tilde{A}) = [\mu, \infty)$. Im Satz 2 wird ausgesagt, daß bei folgenden Voraussetzungen der Punkt $x = \mu$ zum kontinuierlichen Spektrum von $\tilde{A}$ gehört.

1′. $p_0(x) = c_0 > 0$.

2′. $\int_0^x p_k^+(t)\,dt$, $\int_0^x p_k^-(t)\,dt$, $k = 1, \ldots, n$, seien gleichmäßig stetige Funktionen der oberen Grenze x.

3′. Für jedes $\omega > 0$ gelte

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} p_k(t)\,dt = c_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nach Satz 1 ist $C(\tilde{A}) \cap (-\infty, \mu) = \emptyset$. A wird wie oben zerlegt. A_3 wirkt im Hilbertraum $L_2(x_0, \infty)$. Bezeichnet jetzt $A_{-\varepsilon}$ den Operator

$$A_{-\varepsilon}y = (-1)^n[q_0(x)y^{(n)}]^{(n)} + (-1)^{n-1}[q_1(x)y^{(n-1)}]^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)y,$$

$$D(A_{-\varepsilon}) = C_0^\infty(x_0, \infty),$$

$$q_k(x) = p_k(x) - c_k - \varepsilon, \quad x \in (x_0, \infty);\ k = 0, 1, \ldots, n;\ 0 < \varepsilon < c_0,$$

und $B_{-\varepsilon}$ den Operator

$$B_{-\varepsilon}y = (-1)^n(c_0+\varepsilon)y^{(2n)} + (-1)^{n-1}(c_1+\varepsilon)y^{(2n-2)} + \ldots + (c_n+\varepsilon)y,\ D(B_{-\varepsilon}) = C_0^\infty(x_0, \infty),$$

so ist

$$A_3 = A_{-\varepsilon} + B_{-\varepsilon}$$

und für die Koeffizienten $q_k(x)$ gelten die Beziehungen

$$q_0(x) = -\varepsilon \quad \text{und} \quad \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} q_k(t)\,dt = -\varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Der Operator $-A_{-\varepsilon}$ ist dann so beschaffen, daß für ihn das gilt, was im dritten Schritt des Beweises von Satz 1 bezgl. A ausgeführt worden ist. Also ist

$$(A_{-\varepsilon}u, u) \leqslant 0, \quad u \in C_0^\infty(x_0, \infty),$$

x_0 hinreichend groß, was

$$(A_3u, u) \leqslant (B_{-\varepsilon}u, u), \quad u \in C_0^\infty(x_0, \infty), \tag{14}$$

zur Folge hat. Bezeichnet $\mu_{-\varepsilon}$ das Minimum des Polynoms

$$\eta_{-\varepsilon}(\xi) = (c_0+\varepsilon)\xi^{2n} + (c_1+\varepsilon)\xi^{2n-2} + \ldots + (c_n+\varepsilon),$$

so gilt nach [4], S. 207, für das kontinuierliche Spektrum $C(\hat{B}_{-\varepsilon})$ der selbstadjungierten Erweiterung $\hat{B}_{-\varepsilon}$ von $B_{-\varepsilon}$

$$C(\hat{B}_{-\varepsilon}) = [\mu_{-\varepsilon}, \infty).$$

Aus (14) folgt mit Hilfe des Variatronsprinzips von Courant, daß in $(-\infty, \mu_{-\varepsilon}]$ mindestens ein Punkt des kontinuierlichen Spektrums von $\tilde{A}_3$ liegen muß. Da für $\varepsilon \to 0$ das Minimum $\mu_{-\varepsilon}$ von rechts gegen μ strebt, muß auch

$$C(\tilde{A}_3) \cap (-\infty, \mu] \neq \emptyset$$

sein. Andererseits ist $C(\tilde{A}_3) \cap (-\infty, \mu) = \emptyset$, womit dann $\mu \in C(\tilde{A}_3)$ folgt. Es gilt also der

Satz 2. *Erfüllen die Koeffizienten des Differentialausdrucks* (1) *die Voraussetzungen* (2) *und* 1′-3′ *und bezeichnet* μ *das Minimum des Polynoms*

$$\eta = c_0\xi^{2n} + c_1\xi^{2n-2} + \ldots + c_{n-1}\xi^2 + c_n,$$

so gilt bezgl. des kontinuierlichen Spektrums $C(\tilde{A})$ *einer beliebigen selbstadjungierten Erweiterung* $\tilde{A}$ *von* A

$$C(\tilde{A}) \cap (-\infty, \mu) = \emptyset \quad \textit{und} \quad \mu \in C(\tilde{A}).$$

Ist im Satz 1 $c_n = \infty$, d.h. gilt für jedes $\omega > 0$

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_x^{x+\omega} p_n(t)\,dt = \infty, \tag{15}$$

so ist das Spektrum von $\tilde{A}$ offenbar diskret. In Verallgemeinerung eines Kriteriums von Molčanov [7] werden die Voraussetzungen über die Koeffizienten $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ so gefaßt, daß sich die Bedingung (15) als notwendig und hinreichend für die Diskretheit des Spektrums von $\tilde{A}$ erweist (4).

Satz 3. *Über die Koeffizienten des Differentialausdrucks* (1) *werde folgendes vorausgesetzt:*

1. $p_k(x) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{n-k}(-\infty, +\infty)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
2. $p_0(x) \geqslant c_0 > 0$.
3. *Es existiert eine Konstante* C_1, *so daß für jedes* x *die Ungleichungen*

$$\int_x^{x+1} |p_k(t)|\,dt \leqslant C_1,\ k = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad \int_x^{x+1} |p_n^-(t)|\,dt \leqslant C_1$$

bestehen.

---

(4) Das Kriterium von Molčanov wurde von Brink ($n = 1$; [3]) und von Ismagilov ($p_0(x) \equiv 1, p_1(x) = \ldots = p_{n-1}(x) \equiv 0$, [5]) verallgemeinert.

4. *Es existiert eine Konstante C_2, so daß für jedes $\omega > 0$ die Grenzbeziehungen*

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} p_k(t)\,dt \geqslant C_2 > -\infty, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

gelten.

Dann gilt: Der Operator

$$A, \; Ay = l[y], \qquad y \in C_0^\infty(-\infty, +\infty),$$

ist halbbeschränkt nach unten. Das Spektrum jeder selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{A}$ von A ist genau dann rein diskret, wenn für jedes $\omega > 0$ (15) *gilt.*

Beweis. Zunächst wird die Halbbeschränktheit von A bewiesen. Es sei

$$(16) \quad A_\varkappa y = (-1)^n [q_0(x) y^{(n)}]^{(n)} + (-1)^{n-1} [q_1(x) y^{(n-1)}]^{(n-1)} + \ldots + q_n(x) y,$$

$$D(A_\varkappa) = C_0^\infty(-\infty, +\infty),$$

mit

$$q_0(x) = p_0(x) - \frac{c_0}{2} \left(\geqslant \frac{c_0}{2}\right), \qquad q_k(x) = p_k(x) + \varkappa, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

und

$$B_\varkappa y = (-1)^n \frac{c_0}{2} y^{(2n)} - (-1)^{n-1} \varkappa y^{(2n-2)} - \ldots - \varkappa y,$$

$$D(B_\varkappa) = C_0^\infty(-\infty, +\infty).$$

Über die positive Konstante $\varkappa$ wird noch verfügt. Es ist

$$A = A_\varkappa + B_\varkappa.$$

Um $A_\varkappa$ nach unten abzuschätzen, wird die x-Achse durch Teilpunkte $\ldots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$ in Intervalle $(\omega_\nu) = (x_{\nu-1}, x_\nu)$ der Längen $x_\nu - x_{\nu-1} = \omega_\nu$ zerlegt. Dann ist

$$(A_\varkappa u, u) \geqslant \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{c_0}{2} \|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)} + \int_{(\omega_\nu)} q_1(x) |u^{(n-1)}|^2 dx + \ldots + \int_{(\omega_\nu)} q_n(x) |u|^2 dx \right).$$

Wie im Beweis des Satzes 1 werden zunächst die Summanden

$${}_1S_\nu = \frac{c_0}{2} \|u^{(n)}\|^2_{(\omega_\nu)} + \int_{(\omega_\nu)} q_1(x) |u^{(n-1)}|^2 dx, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

nach unten abgeschätzt. x_0 wird fest gewählt. Es ist

$$\left| \int_{(\omega_\nu)} q_1^-(t)\,dt \right| = |{}_1\beta_\nu| \leqslant C_1$$

für $\omega_\nu = \omega \leqslant 1$ wegen Voraussetzung 3 und

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} q_1(t)\,dt \geqslant \varkappa + C_2 - 1$$

für $|x| \geqslant {}_1x(\omega)$ nach Voraussetzung 4. Es ist also

$${}_1\gamma_\nu = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega_\nu)} q_1(t)\,dt \geqslant \varkappa + C_2 - 1,$$

wenn $|\nu| \geqslant {}_1N(\omega)$ gewählt wird. Aus der Formel (13) (mit $\varepsilon = c_0/2$) folgt dann für hinreichend kleines $\omega_\nu = \omega > 0$ und hinreichend großes $\varkappa$ $(\geqslant \varkappa_1)$ für jedes ν mit $|\nu| \geqslant {}_1N$ die Ungleichung

$${}_1S_\nu \geqslant \|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}.$$

Für die restlichen ν $(|\nu| < {}_1N)$ kann aber durch evtl. Vergrößern von $\varkappa$ $(\varkappa \geqslant \varkappa_2)$ ebenfalls

$${}_1S_\nu \geqslant \|u^{(n-1)}\|^2_{(\omega_\nu)}$$

erreicht werden. Damit ergibt sich für $\varkappa \geqslant \max(\varkappa_1, \varkappa_2) = {}_1\varkappa$

$$(A_\varkappa u, u)_{(-\infty,+\infty)} \geqslant \|u^{(n-1)}\|^2_{(-\infty,+\infty)} + \int_{-\infty}^{+\infty} q_2(x) |u^{(n-2)}|^2 dx + \ldots + \int_{-\infty}^{+\infty} q_n(x) |u|^2 dx.$$

Wiederholt man diese Schlußweise, so erhält man schließlich

$$(17) \quad (A_\varkappa u, u)_{(-\infty,+\infty)} \geqslant \|u'\|^2_{(-\infty,+\infty)} + \int_{-\infty}^{+\infty} q_n(x) |u|^2 dx, \qquad \varkappa \geqslant {}_{n-1}\varkappa \geqslant \ldots \geqslant {}_1\varkappa,$$

und

$$(18) \quad (A_\varkappa u, u)_{(-\infty,+\infty)} \geqslant \|u\|^2_{(-\infty,+\infty)}, \qquad \varkappa = {}_n\varkappa \geqslant \ldots \geqslant {}_1\varkappa.$$

$\varkappa$ ist jetzt fixiert. Aus

$$(B_\varkappa u, u) \geqslant \mu_\varkappa \|u\|^2_{(-\infty,+\infty)}, \qquad u \in C_0^\infty(-\infty, +\infty),$$

wobei $\mu_\varkappa$ das Minimum des Polynoms

$$\eta(\xi) = \frac{c_0}{2} \xi^{2n} - \varkappa(\xi^{2n-2} + \ldots + \xi^2 + 1)$$

bezeichnet, und (18) ergibt sich dann

$$(19) \quad (Au, u) = (A_\varkappa u, u) + (B_\varkappa u, u) \geqslant (1 + \mu_\varkappa) \|u\|, \qquad u \in C_0^\infty(-\infty, +\infty),$$

womit die Halbbeschränktheit von A bewiesen ist.

Wir zeigen, daß $C(\tilde{A}) = \emptyset$ ist. Dazu wird die x-Achse wieder in drei Teile $(-\infty, -x_0), (-x_0, x_0)$ und (x_0, ∞) zerlegt und

$$C(\tilde{A}) = C(\tilde{A}_1) \cup C(\tilde{A}_3)$$

benutzt. Es reicht wieder aus, $C(\tilde{A}_3)$ zu untersuchen. Wir gehen von (17) aus und erhalten

$$(A_\varkappa u, u)_{(x_0,\infty)} \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\|u'\|^2_{(\omega_\nu)} + \int_{(\omega_\nu)} q_n(x)\, |u|^2\, dx \Big), \qquad u \in C_0^\infty(x_0, \infty).$$

Der Summand

$${}_nS_\nu = \|u'\|^2_{(\omega_\nu)} + \int_{(\omega_\nu)} q_n(x)\, |u|^2\, dx$$

wird nach unten abgeschätzt. Es ergibt sich (vergl. (13) mit $\varepsilon = 1$)

$$(20) \qquad {}_nS_\nu \geqslant \frac{{}_n\gamma_\nu (1 + 4\omega_\nu \cdot {}_n\beta_\nu) - 4\,{}_n\beta_\nu^2}{(1 + 2\,{}_n\gamma_\nu \cdot \omega_\nu^2 - 2\,{}_n\beta_\nu\, \omega_\nu)(1 + 2\,{}_n\beta_\nu\, \omega_\nu)} \|u\|^2_{(\omega_\nu)}.$$

Da für jedes $\omega > 0$ mit $\int_x^{x+\omega} p_n(t)\, dt$ auch $\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} q_n(t)\, dt$ gegen Unendlich strebt für $|x| \to \infty$, ist für hinreichend kleines $\omega_\nu = \omega > 0$ und hinreichend großes $x_0, x_0 \geqslant x_K$, zu erreichen, daß der Koeffizient von $\|u\|^2_{(\omega_\nu)}$ in (20) größer als jedes vorgegebene $K > 0$ ausfällt. Aus

$${}_nS_\nu \geqslant K \|u\|^2_{(\omega)_\nu}$$

folgt dann

$$(21) \qquad (A_\varkappa u, u)_{(x_0,\infty)} \geqslant K \|u\|^2_{(x_0,\infty)}, \qquad u \in C_0^\infty(x_0, \infty),\ x_0 \geqslant x_K.$$

Zusammen mit

$$(B_\varkappa u, u)_{(x_0,\infty)} \geqslant \mu_\varkappa \|u\|^2_{(x_0,\infty)}$$

ergibt sich

$$\big((A_\varkappa + B_\varkappa) u, u\big)_{(x_0,\infty)} \geqslant (K + \mu_\varkappa) \|u\|^2_{(x_0,\infty)}.$$

Wegen

$$A_3 u = (A_\varkappa + B_\varkappa) u, \qquad u \in C_0^\infty(x_0, \infty),$$

bedeutet das

$$(A_3 u, u)_{(x_0,\infty)} \geqslant (K + \mu_\varkappa) \|u\|^2_{(x_0,\infty)}, \qquad u \in C_0^\infty(x_0, \infty).$$

Für die Friedrichssche Erweiterung $\hat{A}_3$ von A_3 ergibt sich daraus

$$C(\hat{A}_3) \cap (-\infty, K + \mu_\varkappa) = \emptyset,$$

und wegen $C(\hat{A}_3) = C(\tilde{A}_3)$ auch

$$C(\tilde{A}_3) \cap (-\infty, K + \mu_\varkappa) = \emptyset,$$

wobei $\tilde{A}_3$ eine beliebige selbstadjungierte Erweiterung von A_3 bezeichnet. Entsprechend erhält man

$$C(\tilde{A}_1) \cap (-\infty, K + \mu_\varkappa) = \emptyset,$$

woraus zunächst

$$C(\tilde{A}) \cap (-\infty, K + \mu_\varkappa) = \emptyset$$

folgt. Weil K beliebig vorgebbar ist, ergibt sich die Behauptung

$$C(\tilde{A}) = \emptyset.$$

Ist (15) nicht erfüllt, so existieren ein $\omega = \omega^* > 0$ und eine Konstante $K^* < \infty$ derart, daß für eine Folge von Punkten $x_{(j)}, j = 1, 2, \ldots$, mit $\lim_{j\to\infty} |x_{(j)}| = \infty$ die Ungleichung

$$(22) \qquad \int_{x_{(j)}}^{x_{(j)}+\omega^*} p_n(t)\, dt \leqslant K^*, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

erfüllt ist. Die Intervalle $(x_{(j)}, x_{(j)} + \omega^*)$ sollen disjunkt liegen. Wir wählen eine nicht identisch verschwindende (reelle) Funktion aus $C_0^\infty(-\infty, +\infty)$ aus, deren Träger in $(x_{(1)}, x_{(1)} + \omega^*)$ liegt. Durch Translationen dieser Funktion gewinnt man Funktionen $u_{(j)}(x) \in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$, deren Träger resp. in $(x_{(j)}, x_{(j)} + \omega^*)$ liegen. Für diese Funktionen ist, wenn

$$\max_{x;\, 0 \leqslant \nu \leqslant n} (u_{(j)}^{(\nu)})^2 \leqslant C^* < \infty$$

verwendet wird,

$$(Au_{(j)}, u_{(j)})_{(-\infty,+\infty)} = \int_{-\infty}^{+\infty} [p_0(x) (u_{(j)}^{(n)})^2 + \ldots + p_n(x) (u_{(j)})^2]\, dx$$
$$\leqslant C^* \Big\{ \int_{x_{(j)}}^{x_{(j)}+\omega^*} |p_0(t)|\, dt + \ldots + \int_{x_{(j)}}^{x_{(j)}+\omega^*} |p_n(t)|\, dt \Big\}.$$

Berücksichtigt man die Voraussetzung 3 und (22), so ergibt sich

$$(23) \qquad (Au_{(j)}, u_{(j)}) \leqslant C' < \infty, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Aus (19) folgt, daß der Operator

$$A - \mu_\varkappa E, \qquad D(A - \mu_\varkappa E) = C_0^\infty(-\infty, +\infty)$$

positiv definit ist,

$$\big((A - \mu_\varkappa E) u, u\big)_{(-\infty,+\infty)} \geqslant \|u\|^2_{(-\infty,+\infty)}, \qquad u \in C_0^\infty(-\infty, +\infty).$$

In der Metrik der energetischen Norm

$$\big((A - \mu_\varkappa E) u, u\big) = |u|^2$$

dieses Operators ist die Menge $\{u_{(j)}\}$ wegen (23) beschränkt. Im Raum $L_2(-\infty, +\infty)$ ist sie nicht relativ kompakt, so daß nach einem Satz von Rellich [9] folgt, daß die Friedrichssche Erweiterung von $A-\mu_\varkappa E$ kontinuierliches Spektrum besitzt. Also ist auch $C(\tilde{A})\neq\emptyset$, wenn $\tilde{A}$ eine beliebige selbstadjungierte Erweiterung von A bedeutet. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Literaturnachweis

[1] N. I. Achieser und J. M. Glasmann, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum*, Berlin 1965.

[2] M. Sch. Birman, *Störung quadratischer Formen und Spektren singulärer Randwertaufgaben* (russ.), DAN SSSR 125 (1959), S. 471-474.

[3] I. Brink, *Selfadjointness and spectra of Sturm-Liouville operators*, Math. Scand. 7, Nr. 1 (1959), S. 219-239.

[4] J. M. Glazman, *Direkte Methoden der qualitativen Spektralanalysis singulärer Differentialoperatoren* (russ.), Moskau 1963.

[5] R. S. Ismagilov, *Über Bedingungen für die Halbbeschränktheit und Diskretheit des Spektrums eindimensionaler Differentialoperatoren* (russ.), DAN SSSR 140 (1961), S. 33-36.

[6] L. W. Kantorowitsch und G. P. Akilow, *Funktionalanalysis in normierten Räumen*, Berlin 1964.

[7] A. M. Molčanov, *Über Bedingungen für die Diskretheit des Spektrums selbstadjungierter Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (russ.), Tr. Mosk. matem. ob-va 2 (1953), S. 169-200.

[8] M. A. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, Berlin 1963.

[9] F. Rellich, *Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung*, Math. Ann. 122 (1951), S. 343-368.

[10] S. L. Sobolew, *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*, Berlin 1964.

Reçu par la Rédaction le 11. 2. 1969

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIV. (1970)

Determinant system for composite of generalized Fredholm operators

by

A. BURACZEWSKI (Warszawa)

1. Introduction. The main purpose of this paper is to give a general formula for the determinant system for composite of two generalized Fredholm operators provided their determinant systems are known.

Let Ω and X be two fixed linear spaces over the real or complex field $\mathfrak{F}$. The letters x, y, z will denote elements of X, the letters ω, η, ζ elements of Ω and the letters a, b, c numbers of $\mathfrak{F}$. Every mapping into $\mathfrak{F}$ will be called a *functional*. Following Sikorski [3], we assume that Ω and X are *conjugate*, i.e. there exists a bilinear functional defined on $\Omega\times X$ whose value at a point (ω, x) is denoted by ωx and which satisfies two conditions:

(a) if $\omega x = 0$ for every $\omega\in\Omega$, then $x = 0$;

(a′) if $\omega x = 0$ for every $x\in X$, then $\omega = 0$.

If $\omega x = 0$, then ω, x are said to be *orthogonal*. In the following $\mathfrak{A}$ will denote the class of all bilinear functionals on $\Omega\times X$ such that:

(b) For every fixed $x\in X$ there exists a $y\in X$ such that $\omega Ax = \omega y$ for every $\omega\in\Omega$ (this unique element y will be denoted by Ax).

(b′) For every fixed $\omega\in\Omega$ there exists an $\eta\in\Omega$ such that $\omega Ax = \eta x$ for every $x\in X$ (this unique element η will be denoted by ωA).

Thus, every bilinear functional $A\in\mathfrak{A}$ can simultaneously be interpreted as the endomorphism $y = Ax$ in X and the endomorphism $\eta = \omega A$ in Ω. $\mathfrak{A}$ is a ring with the following definition of multiplication: if $A_1, A_2\in\mathfrak{A}$, then by A_1A_2 we understand the bilinear functional $\omega(A_1A_2)x = (\omega A_1)(A_2x)$. It is evident that the product A_1A_2 interpreted as an endomorphism in X (in Ω) is the composite of the endomorphisms A_2, A_1 in X (A_1, A_2 in Ω). The bilinear functional $I\in\mathfrak{A}$ such that $\omega Ix = \omega x$, will be called the *identity bilinear functional*. By definition, $Ix = x$ for each $x\in X$ and $\omega I = \omega$ for each $\omega\in\Omega$.

If x_0 and ω_0 are fixed, then the bilinear functional K defined by the formula $\omega Kx = \omega x_0\cdot\omega_0 x$ is called *one-dimensional* and is denoted by $x_0\cdot\omega_0$. Any finite sum of one-dimensional bilinear functionals is called a *finite-dimensional bilinear functional*.