STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIII. (1969)

Sur les semi-groupes à n paramètres des opérateurs linéaires

par

J. CHABROWSKI et G. ŁUBCZONOK (Katowice)

Nous allons étudier ici quelques simples propriétés qui caractérisent des semi-groupes d'opérateurs équicontinues dépendantes de n paramètres. Le produit des semi-groupes dans l'espace de Banach, le problème analogue à certain sens, a été traité par H. F. Trotter dans [3] (voir aussi [1], chap. VIII). Les semi-groupes à n paramètres ont été traités en connexion avec un système d'équations différentielles, par A. Haimovici dans [2]. Dans nos considérations nous appliquerons des notations et des définitions de monographie de K. Yosida [4].

1. Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe quasi-complet. Par $L(X, X)$ nous désignons l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans X. L'ensemble de définitions et l'ensemble des valeurs d'une application T nous noterons par $D(T)$ et $R(T)$ respectivement.

Définition. Une famille d'opérateurs $\{T_{s_1,\ldots,s_n} \in L(X, X), s_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n\}$ est dite un *semi-groupe équicontinu de classe* C_0 si elle vérifie les conditions suivantes:

1° $T_{s_1+t_1,\ldots,s_n+t_n} = T_{s_1,\ldots,s_n} T_{t_1,\ldots,t_n}$;

2° $T_{0,\ldots,0} = I$ (I désigne l'opérateur identique);

3° $\lim\limits_{s_i\to s_i^0} T_{s_1,\ldots,s_n} x = T_{s_1^0,\ldots,s_n^0} x$ pour tous $s_i^0 \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ et $x \in X$;

4° la famille $\{T_{s_1,\ldots,s_n}\}$ est équicontinue, c'est-à-dire pour toute semi-norme $p(x)$ continue dans X il existe une semi-norme $q(x)$ continue dans X telle que

$$p(T_{s_1,\ldots,s_n} x) \leqslant q(x) \quad \text{pour } x \in X \text{ et } s_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Posons $T_s^i = T_{s_1,\ldots,s_n}$ lorsque $s_i = s$, $s_j = 0$ pour $j \neq i$. Il résulte de la définition que la famille des opérateurs $\{T_s^i, s \geqslant 0\}$ forme un semi-groupe équicontinu de classe C_0 dépendant d'une paramètre s et de plus en vertu de 1°:

$$T_{s_1,\ldots,s_n} = T_{s_1,0,\ldots,0}\, T_{0,s_2,0,\ldots,0} \cdots T_{0,\ldots,0,s_n} = T_{s_1}^1 T_{s_2}^2 \cdots T_{s_n}^n.$$

Il est clair que les opérateurs T_s^i et T_t^j sont commutatives,

$$T_s^i T_t^j = T_t^j T_s^i,$$

pour tous $s, t \geqslant 0$ et $i, j = 1, \ldots, n$.

Désignons par A_i le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T_s^i, s \geqslant 0\}$ qui s'exprime par la formule

$$A_i x = \lim_{h \to 0} h^{-1}(T_h^i - I)x$$

et de plus x appartient à $D(A_i)$ lorsqu'il existe la limite mentionnée ci-dessus dans ce point. On sait que l'ensemble $D(A_i)$ est dense dans X ([4], chap. IX, théorème 1, p. 328).

2. Les définitions du paragraphe 1 étant adoptées, nous pouvons énoncer nos théorèmes.

THÉORÈME 1. *Pour tous* $\lambda, \mu > 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$

$$(\lambda - A_i)^{-1}(\mu - A_j)^{-1} = (\mu - A_j)^{-1}(\lambda - A_i)^{-1}.$$

Démonstration. On sait que ([4], chap. IX, p. 332)

$$(\lambda - A_i)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s^i x\, ds, \qquad (\mu - A_j)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\mu t} T_t^j x\, dt$$

pour $x \in X$. D'après l'équicontinuité et la commutativité de T_s^i et T_t^j nous obtenons

$$\begin{aligned}(\lambda - A_i)^{-1}(\mu - A_j)^{-1}x &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s^i \big[(\mu - A_j)^{-1}x\big] ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s^i \Big[\int_0^\infty e^{-\mu t} T_t^j x\, dt\Big] ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\Big[\int_0^\infty e^{-\mu t} T_s^i T_t^j x\, dt\Big] ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s - \mu t} T_s^i T_t^j x\, dt\, ds = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s - \mu t} T_t^j T_s^i x\, dt\, ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu t}\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_t^j T_s^i x\, ds\Big] dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} T_t^j \Big[\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s^i x\, ds\Big] dt \\ &= (\mu - A_j)^{-1}(\lambda - A_i)^{-1}x,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de notre théorème.

THÉORÈME 2. *Soit* $\{S_t^i, t \geqslant 0, i = 1, \ldots, n\}$ *un système de semi-groupe équicontinus de classe* C_0 *tels que*

$$S_t^i S_s^j = S_s^j S_t^i$$

pour tous $s, t > 0$ *et* $i, j = 1, \ldots, n$.

Alors il existe un semi-groupe $\{S_{t_1, \ldots, t_n}, t_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n\}$ *équicontinu de classe* C_0 *dépendant de* n *paramètres tel que*

$$S_{t_1, \ldots, t_n} = S_{t_1}^1 \ldots S_{t_n}^n.$$

Démonstration. Nous définissons

$$S_{s_i}^i = S_{0, \ldots, 0, s_i, 0, \ldots, 0}^i.$$

Posons

$$S_{s_1, \ldots, s_n} = S_{s_1, 0, \ldots, 0}^1 S_{0, s_2, 0, \ldots, 0}^2 \ldots S_{0, \ldots, 0, s_n}^n.$$

Les propriétés 1°, 2° et 3° de la définition du semi-groupe sont évidentes. Nous montrons seulement la propriété 4°. D'après l'équicontinuité du semi-groupe $\{S_t^i, t \geqslant 0\}$ on peut faire correspondre à toute semi-norme $p(x)$ continue dans X une semi-norme $q_i(x)$ continue dans X de façon que

$$p[S_{s_i}^i(S_{s_{i+1}}^{i+1} \ldots S_{s_n}^n x)] \leqslant q_i(S_{s_{i+1}}^{i+1} \ldots S_{s_n}^n x).$$

En s'appuyant sur cette relation il est facile de montrer qu'on peut faire correspondre à toute semi-norme $p(x)$ continue dans X, une semi-norme $q(x)$ continue dans X de façon que

$$p(S_{s_1, \ldots, s_n} x) \leqslant q(x)$$

pour $s_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $x \in X$.

THÉORÈME 3. *Si* A_i $(i = 1, \ldots, n)$ *sont des générateurs infinitésimaux de certains semi-groupes équicontinus de classe* C_0 *dans l'espace* X *tels que*

$$(\lambda - A_i)^{-1}(\lambda - A_j)^{-1} = (\lambda - A_j)^{-1}(\lambda - A_i)^{-1}$$

pour tout $\lambda > 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, *alors ce système engendre un semi-groupe équicontinu de classe* C_0 *dépendant de* n *paramètres.*

Démonstration. En vertu de la formule (7) dans [4] (chap. IX, p. 343)

$$T_t^i x = \lim_{m \to \infty} \exp[mt(J_m^i - I)]x = \lim_{m \to \infty} \exp(tA_i J_m^i)x,$$

où $J_m^i = (I - m^{-1}A_i)^{-1}$.

Il résulte de l'hypothèse que J_m^i et J_m^j sont commutatives et de plus la famille des opérateurs $(J_m^i)^k$ est équicontinue par rapport aux m et k, donc nous pouvons écrire ([4], corollaire 2, chap. IX, p. 338) que

$$\begin{aligned}\exp(tA_i J_m^i + sA_j J_m^j) &= \exp(tA_i J_m^i)\exp(sA_j J_m^j) \\ &= \exp(sA_j J_m^j + tA_i J_m^i) = \exp(sA_j J_m^j)\exp(tA_i J_m^i),\end{aligned}$$

d'où par passage à la limite nous obtenons la formule

$$T_t^i T_s^j = T_s^j T_t^i.$$

En vertu du théorème 2 il existe le semi-groupe $\{T_{t_1,\ldots,t_n}\}$ tel que $T_{t_1,\ldots,t_n} = T^1_{t_1}\ldots T^n_{t_n}$.

THÉORÈME 4. *Soient $a_1,\ldots,a_n$ des constantes positives, fixées et $\{T_{t_1,\ldots,t_n}, t_i \geqslant 0, i = 1,\ldots,n\}$ un semi-groupe équicontinu de classe C_0. Soit A le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T_{a_1t,\ldots,a_nt}, t\geqslant 0\}$. Si $x\in\bigcap_{i=1}^n D(A_i)$, alors*

$$(2.1)\qquad Ax = \sum_{i=1}^n a_iA_ix.$$

Démonstration. Il est évident que nous pouvons écrire l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
&h^{-1}(T_{a_1h,\ldots,a_nh}-I)x\\
&= h^{-1}T_{a_1h,\ldots,a_{n-1}h,0}(T_{0,\ldots,0,a_nh}-I)+h^{-1}T_{a_1h,\ldots,a_{n-2}h,0,0}(T_{0,\ldots,0,a_{n-1}h,0}-I)x+\\
&\quad +\ldots+h^{-1}T_{a_1h,0,\ldots,0}(T_{0,a_2h,0,\ldots,0}-I)x+h^{-1}(T_{a_1h,0,\ldots,0}-I)x.
\end{aligned}$$

Vu que $x\in\bigcap_{i=1}^n D(A_i)$ et par conséquent que les opérateurs $T_{a_1h,\ldots,a_ih,0,\ldots,0}$ $(i = 1,\ldots,n-1)$ sont équicontinues, par passage à la limite on obtient la formule (2.1).

Remarque 1. Il est évident que $\bigcap_{i=1}^n D(A_i)\subset D(A)$.

THÉORÈME 5. *Si des générateurs infinitésimaux A_i $(i = 1,\ldots,n)$ de certaines semi-groupes équicontinus de classe C_0 satisfont aux conditions*

$$(\lambda-A_i)^{-1}(\lambda-A_j)^{-1} = (\lambda-A_j)^{-1}(\lambda-A_i)^{-1}$$

pour chaque $\lambda > 0$ $(i,j = 1,\ldots,n)$, alors pour tout système de nombres positifs $a_1,\ldots,a_n$ la fermeture de l'opérateur $A = \sum_{i=1}^n a_iA_i$ engendre un semi-groupe équicontinu de classe C_0.

Démonstration. Soit $\bar{A}$ le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T_{a_1t,\ldots,a_nt}, t\geqslant 0\}$. D'accord du théorème 4 si $x\in\bigcap_{i=1}^n D(A_i)\subset D(\bar{A})$, alors $\bar{A}x = \sum_{i=1}^n a_iA_ix$, donc l'opérateur $\bar{A}$ est un prolongement fermé de $\sum_{i=1}^n a_iA_i$ ([4], chap. IX, corollaire 3, p. 333). Il suffit de démontrer que $\bar{A}$ est la prolongement minimal. On sait que ([4], chap. IX, p. 333)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda-A_i)^{-1}x = x.$$

Posons

$$K_\lambda x = \lambda^n(\lambda-A_1)^{-1}\ldots(\lambda-A_n)^{-1}x.$$

Nous allons démontrer que

$$\lim_{\lambda\to\infty}K_\lambda x = x$$

pour tout $x\in X$. Soit $p(x)$ une semi-norme continue et arbitraire dans X. Puisque pour chaque i $(i = 1,\ldots,n)$ la famille des opérateurs $\{\lambda(\lambda-A_i)^{-1}\}$ est équicontinue ([4], théorème 3, p. 333), donc il existe une semi-norme $q(x)$ telle que

$$(2.2)\qquad p\{\lambda(\lambda-A_2)^{-1}[\lambda(\lambda-A_1)^{-1}x-x]\}\leqslant q\big(\lambda(\lambda-A_1)^{-1}x-x\big).$$

Pour chaque nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre λ_0 tel que

$$(2.3)\qquad q(\lambda(\lambda-A_1)^{-1}x-x) < \varepsilon$$

pour $\lambda\geqslant\lambda_0$ et $x\in X$. Il en déduit que

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2(\lambda-A_2)^{-1}(\lambda-A_1)^{-1}x &= \lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2(\lambda-A_1)^{-1}(\lambda-A_2)^{-1}x\\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda-A_2)^{-1}x = x.
\end{aligned}$$

En s'appuyant sur l'équicontinuité des familles d'opérateurs $\{\lambda(\lambda-A_i)^{-1}\}$ nous montrons facilement par l'induction que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^j(\lambda-A_1)^{-1}\ldots(\lambda-A_j)^{-1}x\\
&\qquad = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda-A_j)^{-1}x = x\qquad (j = 2,\ldots,n),
\end{aligned}$$

d'ou résulte que $\lim_{\lambda\to\infty}K_\lambda x = x$.

Il est évident que

$$R(K_\lambda)\subset\bigcap_{i=1}^n R\big((\lambda-A_i)^{-1}\big) = \bigcap_{i=1}^n D(A_i)\subset D(\bar{A}).$$

Puisque l'opérateur K_λ est commutative avec $T_{a_1t,\ldots,a_nt}$, donc elle est aussi commutative avec $\bar{A}$, c'est-à-dire que si $x\in D(\bar{A})$ alors $K_\lambda\bar{A}x = \bar{A}K_\lambda x$, $\bar{A}$ est le prolongement d'A et $R(K_\lambda)\subset D(A)$, donc si $x\in D(\bar{A})$ alors

$$K_\lambda\bar{A}x = \bar{A}K_\lambda x = AK_\lambda x.$$

Si $\lambda\to\infty$, $K_\lambda x\to x$, alors $AK_\lambda x = K_\lambda\bar{A}x\to\bar{A}x$, d'où tout prolongement fermé d'A est prolongement d'$\bar{A}$, donc $\bar{A}$ est la fermeture d'A.

THÉORÈME 6. *Soit $\{T_{s_1,\ldots,s_n}, s_i\geqslant 0, i = 1,\ldots,n\}$ un semigroupe équicontinu de classe C_0. Soient A_i les générateurs infinitésimaux des semi-groupes $\{T^i_s, s\geqslant 0\}$ (voir § 1). Alors l'intersection $\bigcap_{i=1}^n D(A_i)$ est dense dans X.*

Démonstration. En effet, soit K_λ l'opérateur introduite dans la démonstration du théorème précédent. Puisque $\lim_{\lambda\to\infty} K_\lambda x = x$, donc $\bigcup_{\lambda>0}^{*} R(K_\lambda) = X$. D'autre part $R(K_\lambda) \subset \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i)$, donc $\bigcap_{i=1}^{n} D(A_i)$ est dense dans X.

Travaux cités

[1] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, part. I, New York 1958.

[2] A. Haimovici, *Sur une généralisation du problème de Cauchy*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, 17 (1963), p. 124-131.

[3] H. F. Trotter, *On the product of semi-groups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1958), p. 545-552.

[4] K. Yosida, *Functional analysis*, Moscou 1967 (en russe).

Reçu par la Rédaction le 18. 3. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIII. (1969)

p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen

von

ARNE PERSSON (Lund) und ALBRECHT PIETSCH (Jena)

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir für jede Zahl p mit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ vier Typen von beschränkten linearen Abbildungen, die als p-nuklear, p-integral, quasi-p-nuklear und quasi-p-integral bezeichnet werden. Diese Abbildungsklassen haben den Charakter von Idealen und sind vollständig bezüglich einer in geeigneter Weise definierten Norm. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Abbildungstypen werden durch das folgende Diagramm veranschaulicht:

$$\begin{array}{ccc} p\text{-nuklear} & \to & \text{quasi-}p\text{-nuklear} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ p\text{-integral} & \to & \text{quasi-}p\text{-integral.} \end{array}$$

Dabei deuten die waagerechten Pfeile stetige und die senkrechten Doppelpfeile isometrische Einbettungen an. Für zwei konjugierte Exponenten p and p' besteht außerdem zwischen den p-nuklearen und den quasi-p'-integralen bzw. zwischen den quasi-p-nuklearen und den p'-integralen Abbildungen eine gewisse Dualitätsrelation. Die einzelnen Abbildungsklassen wachsen in Abhängigkeit von p streng monoton, und es gelten interessante Multiplikationssätze. Als Anwendung der allgemeinen Theorie erhalten wir einen neuen Zugang zu einigen sehr interessanten Ergebnissen von A. Grothendieck [6] über Produkte von beschränkten linearen Abbildungen zwischen gewissen Typen von Banachräumen.

Für $p = 1$ geht die Definition der nuklearen und integralen Abbildungen auf R. Schatten [20] und A. Grothendieck [4] zurück. Die quasinuklearen und quasi-integralen Abbildungen wurden in [15] und [14] eingeführt. Die erste Verallgemeinerung auf den Fall $p > 1$ stammt von P. Saphar [19], der 2-nukleare Abbildungen betrachtete. Schließlich findet man in [16] eine vollständige Theorie der quasi-p-integralen Abbildungen, die dort allerdings unter einem anderen Gesichtspunkt untersucht werden.

A. Badrikian und S. Chevet haben sich kürzlich ebenfalls mit der Theorie der p-nuklearen Abbildungen beschäftigt (vgl. [2]).