STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIII. (1969)

Zum Problem der Operatorfunktionen mit verschwindender Ableitung

von

LOTHAR BERG (Rostock)

Bekanntlich betrachtet J. Mikusiński in [3] Operatorfunktionen $q(\lambda)$, die eine Darstellung als Quotient (im Sinne der inversen Faltung bezüglich t) $q(\lambda) = f(\lambda)/g$ besitzen, wobei $f(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$ eine für $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2, t \geqslant 0$ stetige Funktion ist und $g = \{g(t)\}$ von λ unabhängig. Für diese Operatorfunktionen gilt im Falle der Differenzierbarkeit (nach λ) der grundlegende Satz: Aus $q'(\lambda) = 0$ folgt $q(\lambda) = q(\lambda_1)$ für alle λ. Dagegen ist die von Mikusiński aufgestellte Vermutung, daß dieser Satz auch dann richtig ist, wenn g in der Darstellung der Operatorfunktion $q(\lambda)$ von λ abhängen darf, bis heute noch ungelöst.

In [1] wurde das hiermit zusammenhängende Problem, ob aus

$$g(\lambda)f'(\lambda) = f(\lambda)g'(\lambda) \tag{1}$$

für parametrische Operatorfunktionen stets

$$g(\lambda)f(\lambda_0) = f(\lambda)g(\lambda_0) \tag{2}$$

für beliebige λ und λ_0 aus dem Definitionsintervall folgt, lediglich unter speziellen Zusatzvoraussetzungen behandelt. Die Ausführungen in [1] bedürfen jedoch einer Ergänzung, da sie unvollständig sind.

Wie nämlich Frau Sändig in [4] festgestellt hat, folgt (2) nicht einmal dann aus (1), wenn die auftretenden Funktionen von t unabhängig sind (und die Multiplikationen im gewöhnlichen Sinn oder nach wie vor als Faltungen bezüglich t verstanden werden). Als Beispiel braucht man nur

$$f(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \leqslant 0, \\ g(\lambda) & \text{für } \lambda > 0 \end{cases} \tag{3}$$

und $g(\lambda) = \lambda^2$ zu wählen, dann ist zwar (1) für alle λ erfüllt, aber (2) für $\lambda_0 = -1$ und $\lambda > 0$ nicht.

Das Beispiel von Frau Sändig ist jedoch kein Gegenbeispiel für die Vermutung von Mikusiński, wenn man nur Operatorfunktionen betrachtet, deren Nenner für keinen Wert von λ identisch verschwinden.

Diese eigentlich selbstverständliche Voraussetzung ist in [1] vergessen worden, man findet sie aber bei Ditkin und Prudnikov [2]. Man könnte jetzt zwar daran denken, die Vermutung von Mikusiński durch eine einfache Abänderung des Beispiels (3) zu widerlegen, doch scheint dies unmöglich zu sein, da für dieses Beispiel die Existenz von Nullteilern (bei der gewöhnlichen Multiplikation) wesentlich ist.

Aus der Existenz des Gegenbeispiels von Frau Sändig (bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation) geht noch hervor, daß die Beweise der Spezialfälle I und III in [1] nur einen lokalen Charakter besitzen, die Aussagen also nur für hinreichend kleine λ-Intervalle bewiesen sind. Will man globale Aussagen für alle vorkommenden λ haben, so sind noch Zusatzbetrachtungen erforderlich.

Außerdem ist im Fall I noch die Voraussetzung hinzuzufügen, daß die dort vorkommenden Laplace-Integrale bezüglich λ gleichmäßig existieren.

Literaturnachweis

[1] L. Berg, *Asymptotische Auffassung der Operatorenrechnung*, Studia Math. 21 (1962), S. 215-229.

[2] V. A. Ditkin u. A. P. Prudnikov, *Integral transforms and operational calculus*, Oxford 1965.

[3] J. Mikusiński, *Operatorenrechnung*, Berlin 1957.

[4] A.-M. Sändig, *Verallgemeinerte Mittelwertformeln*, Diplomarbeit Univ. Rostock 1968.

Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIII. (1969)

The minimal norm problem and Pontriagin's maximum principle for Banach spaces (I)

by

GRAŻYNA TOPOROWSKA (WARSZAWA)

1. Introduction. Balakrishnan [1] discusses some classes of control problems, in which the state and input or control variables are allowed to range in Banach spaces. The equation considered in a general case is of the form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

where, for each t, $u(t)$ and $x(t)$ are values in a Banach space. For the linear case we have

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) = A(t)x(t)+B(t)u(t)+z(t), \tag{1}$$

where $x(t)$ and $z(t)$ for each t belong to a Banach space X_1, $u(t)$ — a control — for each t belongs to another Banach space X_2, $A(t)$ and $B(t)$ are linear operators for each t, $B(t)\colon X_2 \to X_1$ for each t is a bounded operator, and $A(t)\colon X_1 \to X_1$ for each t is a closed operator (not necessarily bounded) with domain dense in X_1.

Balakrishnan in his work discusses the minimal norm problem for a particular case of equation (1), i.e. for

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t), \tag{2}$$

where A and B are constant operators and, besides, the operator A is the generator of a strongly continuous semigroup $S(t)$ of bounded operators (see [3] and [5]). The solution of equation (2) is of the following form:

$$x(t) = S(t)x(0)+\int_0^t (t-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma.$$

The minimal norm problem consists in finding a control $u_0(t)$ with a corresponding state $x_0(t)$ such that

$$\|x_0(T)-y\| = \min \|x(T)-y\|$$