Tables des matières du tome XXXII, fascicule 3

	Pages
J. Reinermann, Über Toeplitzsche Iterationsverfahren und einige ihrer Anwendungen in der konstruktiven Fixpunkttheorie	209-227
G. O. Okikiolu, Extensions of locally bounded convolution operators in L^p-spaces	229-245
A. Pełczyński, Universal bases	247-268
K. Sundaresan, Additive functionals on Orlicz spaces	270-276
R. B. Fraser, Banach spaces of functions satisfying a modulus of continuity condition	277-283
Д. В. Салехов и Е. М. Семенов, О сходимости некоторого семейства функционалов в пространстве Орлича	285-293
L. Tzafriri, An isomorphic characterization of L_p and c_0-spaces	295-304
E. M. Stein, Note on the class $L \log L$	305-310

STUDIA MATHEMATICA publient des travaux de recherches (en langues des congrès internationaux) concernant *l'Analyse Fonctionnelle, les méthodes abstraites d'Analyse* et *le Calcul de Probabilité*. Chaque volume paraît en 3 fascicules.

Les manuscrits dactylographiés sont à adresser à

M. Władysław Orlicz, ul. Libelta 22, m. 4, Poznań (Pologne),

ou à

M. Marceli Stark, ul. Śniadeckich 8, Warszawa 1 (Pologne).

Adresse de l'échange:

STUDIA MATHEMATICA, ul. Śniadeckich 8, Warszawa 1 (Pologne).

Le prix de ce fascicule est 4,00 $.

STUDIA MATHEMATICA sont à obtenir par l'intermédiaire de

ARS POLONA, Krakowskie Przedmieście 7, Warszawa (Pologne).

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

Über Toeplitzsche Iterationsverfahren und einige ihrer Anwendungen in der konstruktiven Fixpunkttheorie

von

J. REINERMANN (Aachen)

1. TOEPLITZSCHE ITERATIONSVERFAHREN

1.1. Es sei durch $T\colon \boldsymbol{Z}^+\times\boldsymbol{Z}^+\to C$ [1] eine unendliche komplexe Toeplitz-Matrix (t_{nk}) definiert, d.h. es gilt:

(i) $$\sup_{n\in \boldsymbol{Z}^+}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}|t_{nk}|\Big\}<\infty;$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}t_{nk}\Big\}=1;$$

(iii) $$\bigwedge_{k\in\boldsymbol{Z}^+}\lim_{n\to\infty}\{t_{nk}\}=0.$$

Es sei E ein (reeller oder komplexer) linearer normierter Raum, $X\subset E$, $X\neq\emptyset$, $f\colon X\to X$ stetig, $x_0\in X$ und dann eine Folge $\{x_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ so bestimmt, daß

(*) $$x_{n+1}=\sum_{k=0}^{\infty}t_{nk}f(x_k)$$

für $n\in\boldsymbol{Z}^+$ stattfindet.

Lemma 1. *Für eine mit einer Toeplitz-Matrix $T=(t_{nk})$ gemäß* (*) *bestimmte Folge $\{x_n\}$ gilt: $x=\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$, $x\in X$, impliziert $f(x)=x$.*

Beweis. Aus $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}=x$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}_{n\in\boldsymbol{Z}^+}=x$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(x_n)\}_{n\in\boldsymbol{Z}^+}=f(x)$ (Stetigkeit). Mittels (*) und der Permanenz von T erhält man $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}=f(x)$. Weil nun die Normtopologie von E hausdorffsch ist, folgt $f(x)=x$.

[1] $\boldsymbol{Z}^+ := $ Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen.

1.2. Wir spezialisieren $T = (t_{nk})$ nun wie folgt:

(i′) $$t_{nk} \geqslant 0 \text{ und } t_{nk} = 0 \quad \text{falls } k > n;$$

(ii′) $$\sum_{k=0}^{n} t_{nk} = 1;$$

(iii′) $$\bigwedge_{k\in \mathbf{Z}^+} \lim_{n\to\infty}\{t_{nk}\} = 0.$$

Nehmen wir überdies die Konvexität von $X \subset E$ an, so wird mit einer Abbildung $f\colon X \to X$ und einem Punkt $x_0 \in X$ durch

(*) $$x_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} t_{nk} f(x_k), \qquad n \in \mathbf{Z}^+,$$

eine Folge $\{x_n\}_{n\in \mathbf{N}}$ iterativ definiert (Toeplitz-Iteration), für die 1.1, (*) und damit die Aussage von Lemma 1 zutrifft. Das mit $(t_{nk}) := (\delta_{nk})$ (Kronecker-Symbol) gemäß (*) definierte Verfahren ist die übliche Picard-Iteration: $x_{n+1} = f(x_n)$.

1.3. Ist $\{c_n\}_{n\in \mathbf{Z}^+}$ eine Folge reeller Zahlen mit

(i) $$c_0 = 1,$$

(ii) $$0 < c_n \leqslant 1 \quad \text{für } n \in \mathbf{N},$$

(iii) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \text{ divergent},$$

so wird durch die Vorschrift

(*) $$t_{nk} := \begin{cases} c_k \prod_{\nu=k+1}^{n} (1-c_\nu) & \text{für } k < n, \\ c_n & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{für } k > n, \end{cases}$$

eine Toeplitz-Matrix definiert, welche überdies (i′)-(iii′) erfüllt. Wegen der Divergenz von $\sum c_\nu$ divergiert nämlich das Produkt $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-c_\nu)$ gegen 0, d.h. es ist für $k \in \mathbf{Z}^+$:

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\prod_{\nu=k+1}^{n}(1-c_\nu)\Big\} = 0.$$

Für $c_n \equiv 1$ ist $(t_{nk}) = (\delta_{nk})$, also $x_n = f^n(x_0)$. Die mit (t_{nk}) nach 1.2, (*) gebildete Folge $\{x_n\}$ kann man auch in der übersichtlicheren Gestalt

(**) $$x_0 \in X, \quad x_{n+1} = (1-c_n)x_n + c_n f(x_n), \qquad n \in \mathbf{Z}^+,$$

schreiben. Mit Lemma 1 folgt aus $x = \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$, $f(x) = x$, eine Aussage die nicht zuzutreffen braucht, falls $\sum c_\nu$ konvergiert. Für einen (B)-Raum E und ein beschränktes, abgeschlossenes X ist nämlich wegen $x_{\nu+1} - x_\nu = c_\nu(f(x_\nu) - x_\nu)$ und der für $n > m$ gültigen Abschätzung

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \sum_{\nu=m}^{n-1} \|x_{\nu+1} - x_\nu\| \leqslant 2M \sum_{\nu=m}^{n-1} c_\nu \qquad (M := \operatorname{Diam}(X)(^2))$$

$\{x_n\}$ für jedes $f\colon X \to X$ und jedes $x_0 \in X$ konvergent: $x = \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$, $x \in X$; jedoch muß jetzt mit der Möglichkeit $f(x) \neq x$ gerechnet werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

$E := c_0$ (Nullfolgen, Sup-Norm $\|\;\|$), $X := \{x \mid x \in E \wedge \|x\| \leqslant 1\}$; $f\colon X \to X$ wird so definiert: $f(\{a_1, a_2, \ldots\}) := \{1, a_1, a_2, \ldots\}$.

Nach den vorangehenden Bemerkungen ist das mit $x_0 := \{0, 0, 0, \ldots\}$ angesetzte Verfahren (**) mit konvergenter Reihe $\sum c_\nu$ konvergent. Wir setzen $x := \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$. Tatsächlich ist $f(x) \neq x$, weil sich andernfalls $x \in X$ zu $x = \{1, 1, 1, \ldots\}$ ergäbe; jedoch ist $x \notin c_0$.

2. EINE KONSTRUKTIVE VARIANTE DES BROUWERSCHEN FIXPUNKTSATZES FÜR KOMPAKTE INTERVALLE DES $\mathbf{R}^1$

Wie das Beispiel $E := \mathbf{R}^1$, $X := [-1, 1]$, $f(x) := -x$ zeigt, gibt es stetige Selbstabbildungen kompakter Intervalle des $\mathbf{R}^1$ mit genau einem Fixpunkt, die für jeden vom Fixpunkt verschiedenen Anfangswert x_0 eine divergente Picard-Folge $\{f^n(x_0)\}$ erzeugen. Für eine spezielle Klasse von Toeplitz-Verfahren beweisen wir jedoch den

2.1. Satz 1.

Voraussetzungen. (1) $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $x_0 \in [a, b]$, $f\colon [a, b] \to [a, b]$ *stetig, und f habe auf $[a, b]$ höchstens einen Fixpunkt.*

(2) *Für das unter* 1.3 *definierte Toeplitz-Verfahren* (**) *gelte neben* (i), (ii), (iii) *noch* $\lim_{n\to\infty}\{c_n\} = 0$.

Behauptung. *Es gibt genau ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$, und überdies ist $x = \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$ mit Startwert x_0.*

Beweis. O. B. d. A. können wir a zu 0 und b zu 1 annehmen. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz sind die Existenz und nach Voraussetzung die Eindeutigkeit eines $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$ schon klar. Wir behaupten

(²) $\operatorname{Diam}(X) := \sup_{x,y\in X} \|x - y\|$.

nun, daß gilt:

((i)) $\bigwedge\limits_{y\in[0,1]} : (y < x) \Rightarrow (f(y)-y > 0)$;

((ii)) $\bigwedge\limits_{y\in[0,1]} : (y > x) \Rightarrow (f(y)-y < 0)$.

In der Tat, ist $x = 0$, so gilt ((i)). Ist $x > 0$ und existiert ein $y_1 \in [0,1]$ mit $y_1 < x$ und $f(y_1)-y_1 \leqslant 0$, so gibt es wegen $f(0)-0 = f(0) \geqslant 0$ ein $z\in[0,y_1]$ mit $f(z) = z$. Jedoch ist $z \neq x$, im Widerspruch zu (1). Analog wird ((ii)) bewiesen.

Für die Folge $\{x_n\}$ besteht nun folgende Alternative I-II:

I. Es gibt $n_1 \in \boldsymbol{Z}^+$ mit $x_{n_1} = x$.

Dann ist $x_n = x$ für $n \geqslant n_1$, also die Behauptung bewiesen.

II. Für $n \in \boldsymbol{Z}^+$ ist $x_n \neq x$.

Dann gilt entweder

1. Für fast alle $n \in \boldsymbol{Z}^+$ ist $x_n < x$. Aus $x_{n+1}-x_n = c_n(f(x_n)-x_n)$ und ((i)) folgt dann, daß $\{x_n\}$ schließlich monoton wächst und also wegen $x_n \leqslant 1$ auch konvergiert. Nach Lemma 1 und der Eindeutigkeit von x kann nur $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = x$ sein; oder es gilt

2. Für fast alle $n \in \boldsymbol{Z}^+$ ist $x_n > x$. In diesem Fall folgt aus ((ii)) wie unter 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = x$; oder es gilt

3. Weder 1 noch 2. Wir geben $\varepsilon > 0$ vor und wählen $n_0 \in \boldsymbol{Z}^+$ so, daß $|x_{n+1}-x_n| < \varepsilon$ ist für $n \geqslant n_0$. Das ist wegen $|x_{n+1}-x_n| \leqslant 2c_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\{c_n\} = 0$ möglich. Es gibt nun ein $n_1 \in \boldsymbol{Z}^+$ mit $n_1 \geqslant n_0$ und $|x_{n_1}-x| < \varepsilon$. Andernfalls haben wir entweder (im Falle $x_{n_0} \leqslant x-\varepsilon$) $x_n \leqslant x-\varepsilon$ für $n \geqslant n_0$ (wegen $|x_{n+1}-x_n| < \varepsilon$), also 1, oder (im Falle $x_{n_0} \geqslant x+\varepsilon$) $x_n \geqslant x+\varepsilon$ für $n \geqslant n_0$ (wegen $|x_{n+1}-x_n| < \varepsilon$), also 2, in jedem Fall also 1 oder 2, was ausgeschlossen wurde. Für $n \geqslant n_1$ wollen wir nun $|x_n - x| < \varepsilon$ nachweisen. Den Fall $n = n_1$ haben wir gerade erledigt. Ist $n \geqslant n_1$ und die Abschätzung $|x_n - x| < \varepsilon$ für dieses n schon gezeigt, so besteht folgende Alternative A-B:

A. $x-\varepsilon < x_n < x$. Für x_{n+1} ist dann entweder

(a) $x_{n+1} < x$, also wegen $x_{n+1}-x_n = c_n(f(x_n)-x_n)$ und ((i)) $x_{n+1}-x_n > 0$, woraus $|x_{n+1}-x| = x-x_{n+1} < x-x_n = |x_n-x| < \varepsilon$ folgt, oder

(b) $x_{n+1} > x$, also $|x_{n+1}-x| = x_{n+1}-x < x_{n+1}-x_n = |x_{n+1}-x_n| < \varepsilon$, oder

B. $x < x_n < x+\varepsilon$, woraus sich mit Hilfe von ((ii)) wie unter A $|x_{n+1}-x| < \varepsilon$ ergibt.

Insgesamt haben wir $|x_{n+1}-x| < \varepsilon$, also kraft Induktionsschlusses $|x_n-x| < \varepsilon$ für jedes $n \geqslant n_1$ bewiesen. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = x$, q.e.d.

2.2. Für die zulässige Wahl $c_n := 1/(n+1)$ ergibt die nach 1.3, (*) gebildete Matrix (t_{nk}) die Cesàro-Matrix der Limitierungstheorie (Zeller [8]). Der mit diesen c_n formulierte Satz 1 stammt von Mann [4].

3. KONSTRUKTIVE VARIANTEN DES BROWDERSCHEN FIXPUNKTSATZES IN GLEICHMÄSSIG KONVEXEN BANACH-RÄUMEN

3.1. Definition 1. Ein linearer normierter Raum $(E, \|\ \|)$ heißt *gleichmäßig konvex*, wenn gilt:

$$(*)\qquad \bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{\substack{\delta\\0<\delta<1}} : \big(x, y\in E \wedge (\|x\|, \|y\| \leqslant 1) \wedge \|x-y\| \geqslant \varepsilon\big) \Rightarrow \Rightarrow \big(\tfrac{1}{2}\|x+y\| \leqslant 1-\delta\big).$$

Definition 2. Für ein $\alpha\in(0,1)$ heißt ein linearer normierter Raum $(E, \|\ \|)$ C_α*-konvex*, wenn gilt:

$$(**)\qquad \bigwedge_{\substack{M,\varepsilon\\0<\varepsilon\leqslant 2M}}\ \bigvee_{\substack{\delta\\0<\delta<1}} : \big(x, y\in E \wedge (\|x\|, \|y\| \leqslant M) \wedge \|x-y\| \geqslant \varepsilon\big) \Rightarrow \Rightarrow \big(\|\alpha x+(1-\alpha)y\| \leqslant (1-\delta)\max(\|x\|, \|y\|)\big).$$

Es ist nicht schwer einzusehen, daß ein gleichmäßig konvexer linearer normierter Raum $(\alpha = \frac{1}{2})$ für jedes $\alpha\in(0,1)$ C_α-konvex ist (Schaefer [6]).

3.2. Wir wollen für den Fall eines (reellen oder komplexen) Hilbert-Raums E, $\dim E \geqslant 1$, einen solchen Konvexitätsmodul $\delta(M, \varepsilon, \alpha)$, wie er in 3.1, (**) vorkommt, explizit angeben. Für $x, y\in E$ mit $\|x\| + \|y\| \neq 0$ und $\alpha\in(0,1)$ erhalten wir zunächst aus der Identität

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|^2+\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 = \alpha\|x\|^2+(1-\alpha)\|y\|^2$$

die Abschätzung

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\| \leqslant \left(1-\frac{\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2}{2\max^2(\|x\|, \|y\|)}\right)\max(\|x\|, \|y\|),$$

so daß wir

$$\delta := \frac{\alpha(1-\alpha)}{2M^2}\,\varepsilon^2$$

wählen können und mit diesem δ 3.1, (**) erfüllt sehen. Es ist $\delta > 0$ und wegen $\dim E \geqslant 1$ auch $\delta < 1$.

3.3. Definition 3. Es sei $(E, \|\ \|)$ ein linearer normierter Raum, $X \subset E$, $X \neq \emptyset$. Eine Abbildung $f: X \to X$ heißt *kontrahierend*, wenn die Abschätzung $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|x-y\|$ für alle $x, y\in E$ zutrifft.

Es ist klar, daß eine kontrahierende Abbildung stetig ist. Für kontrahierende Abbildungen und gleichmäßig konvexe Banach-Räume beweist Browder [1] folgenden Fixpunktsatz:

Satz 2. *Es sei E ein gleichmäßig konvexer Banach-Raum; X eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von E und $f: X \to X$ kontrahierend.*

Dann besitzt f einen Fixpunkt.

Daß auf die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvexität nicht verzichtet werden kann, zeigt schon das Beispiel $E: = C_0[0,1]$, $X: = = \{x \mid x \in C_0[0,1], x(0) = 0, x(1) = 1, 0 \leqslant x(t) \leqslant 1\}$, wenn $f: X \to X$ durch $f(x)[t]: = tx(t)$ definiert wird.

3.4. Lemma 2.

Voraussetzungen a. *Es sei $(E, \| \, \|)$ ein gleichmäßig konvexer linearer normierter Raum; X eine nichtleere beschränkte, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E, $x \in E$; $f: X \to X$ kontrahierend; $f(x) = x$.*

b. *Für das Toeplitz-Verfahren:* $x_0 \in X$, $x_n: = (1-c_{n-1})x_{n-1} + c_{n-1}f(x_{n-1})$ $(n \geqslant 1)$ *gilt* (s. 1.3):

(i) $c_0 = 1$; (ii) $\bigwedge\limits_{n \in \boldsymbol{N}} 0 < c_n < 1$; (iii) *die Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ *divergiert*; (iv) $\{c_n\}$ *fällt monoton*; (v) *ist* $\varepsilon > 0$, $M: = \mathrm{Diam}(X)$, *so kann zu* $(M, \varepsilon, c_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ *nach* 3.1, (**) $\delta_n = \delta(M, \varepsilon, c_n)$ *derart gewählt werden, daß auch* $\sum \delta_\nu$ *divergiert.*

Behauptungen. (a) *Jede der Folgen* $\{\|x_n - x_{n-1}\|\}$; $\{\|x_n - x\|\}$; $\{\|f(x_n) - x_n\|\}$ *fällt monoton* $(n \geqslant 1)$.

(b) *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty}\{\|f(x_n) - x_n\|\} = 0$.

Beweis. (a) Man hat wegen $x_{n+1} - x_n = c_n(f(x_n) - x_n)$ die für $n \geqslant 1$ gültige Identität

$$x_{n+1} - x_n = c_n\big(f(x_n) - f(x_{n-1})\big) + c_n\left(\frac{1}{c_{n-1}} - 1\right)(x_n - x_{n-1}),$$

woraus wegen der Kontraktionseigenschaft von f die Abschätzung

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant c_n\|x_n - x_{n-1}\| + c_n\left(\frac{1}{c_{n-1}} - 1\right)\|x_n - x_{n-1}\| = \frac{c_n}{c_{n-1}}\|x_n - x_{n-1}\|$$

folgt. Wegen (iv) ist $c_n \leqslant c_{n-1}$, also $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \|x_n - x_{n-1}\|$, q.e.d.

Mit $n \geqslant 1$ und $f(x) = x$ ist weiter

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x\| &= \|c_n\big(f(x_n) - f(x)\big) + (1-c_n)(x_n - x)\| \\ &\leqslant c_n\|x_n - x\| + (1-c_n)\|x_n - x\| = \|x_n - x\|, \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Für $n \geqslant 1$ ist schließlich

$$\|f(x_{n+1}) - x_{n+1}\| = \frac{\|x_{n+2} - x_{n+1}\|}{c_{n+1}} \leqslant \frac{c_{n+1}}{c_{n+1}\cdot c_n}\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - x_n\|,$$

womit (a) bewiesen ist.

(b) Wäre nicht $\lim\limits_{n\to\infty}\{\|f(x_n) - x_n\|\} = 0$, so existierte wegen der schon bewiesenen fallenden Monotonie von $\{\|f(x_n) - x_n\|\}$ ein $\varepsilon > 0$ mit $\|f(x_n) - - x_n\| \geqslant \varepsilon > 0$ für $n \in \boldsymbol{N}$. Es sei nun $\{\delta_n\}$ die gemäß b, (v) bestimmte Folge der Konvexitätsmoduln δ_n. Dann ist für $n \in \boldsymbol{N}$ wegen $\|x_{n+1} - x\| = \|c_n\big(f(x_n) - f(x)\big) + (1-c_n)(x_n - x)\|$ und $\|\big(f(x_n) - f(x)\big) - (x_n - x)\| = \|f(x_n) - - x_n\| \geqslant \varepsilon$ die Abschätzung $\|x_{n+1} - x\| \leqslant (1-\delta_n)\max\big(\|f(x_n) - f(x)\|, \|x_n - x\|\big) \leqslant (1-\delta_n)\|x_n - x\|$ gültig. Durch Induktion folgt

$$\|x_{n+1} - x\| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n}(1-\delta_\nu)\|x_1 - x\|.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1-\delta_\nu)\} = 0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty}\{\|x_{n+1} - x\|\} = 0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = x$. Mit $f(x) = x$ und der Stetigkeit von f folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = f(x) = x$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty}\{\|f(x_n) - x_n\|\} = 0$, im Widerspruch zu $\|f(x_n) - x_n\| \geqslant \varepsilon > 0$ für $n \in \boldsymbol{N}$, q.e.d.

3.5. Bemerkungen zu Lemma 2. 1. Die unter (a) formulierten Monotonie-Aussagen gelten ersichtlich in beliebigen linearen normierten Räumen und auch für manche monoton fallende Folgen $\{c_n\}$, die durch b, (ii) ausgeschlossen werden, z. B. $c_n \equiv 1$ (Picard-Folge). Insbesondere existiert für monotone $\{c_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\{\|f(x_n) - x_n\|\}$ stets, doch kann dann selbst für gleichmäßig konvexes E nicht mehr auf $\lim\limits_{n\to\infty}\{\|f(x_n) - x_n\|\} = 0$ geschlossen werden, wie das Beispiel $(E, \| \, \|): = (\boldsymbol{R}$, Absolutbetrag), $X: = [-1, 1]$, $f(x): = -x$ zeigt. Es ist hier nämlich mit $x_0: = 1$, $\|f(x_n) - x_n\| \equiv 2$.

2. Der Beweis von (b) zeigt genauer: Ist $\{c_n\}$ irgendeine (nicht notwendig monoton fallende) Folge reeller Zahlen mit $0 < c_n < 1$, und lassen sich zu (M, ε, c_n) Konvexitätsmoduln δ_n mit divergenter Reihe $\sum \delta_\nu$ finden, so führt die Annahme „Es gibt $\varepsilon > 0$ mit $\|f(x_n) - x_n\| \geqslant \varepsilon$ für fast alle $n \in \boldsymbol{N}$" auf einen Widerspruch, m. a. W.: Es gibt eine o. B. d. A. streng monotone Teilfolge $\{k_n\}$ von $\boldsymbol{N}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\{\|f(x_{k_n}) - x_{k_n}\|\} = 0$. Im Falle der Monotonie der $\{c_n\}$ kann $k_n \equiv n$ gewählt werden.

3. Für einen Hilbert-Raum konnten wir in 3.2 Konvexitätsmoduln δ_n zu

$$\delta_n = \frac{c_n(1-c_n)}{2M^2}\varepsilon^2$$

ermitteln. Wegen $c_\nu \leqslant c_1 < 1$ und der daraus folgenden Abschätzung

$$\sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu \geqslant \frac{\varepsilon^2}{2M^2}\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu(1-c_\nu) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{2M^2}(1-c_1)\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu$$

ist dann $\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_\nu$ mit $\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu$ divergent, also die getroffene Wahl der δ_n im Sinne der Forderung b, (v) geeignet.

4. Für die speziellen Folgen $c_n\equiv\frac{1}{2}$ bzw. allgemeiner $c_n\equiv\alpha$ $(0<\alpha<1)$ und die dazu passenden Konvexitätsmoduln $\delta_n\equiv\delta$ (3.1, (*), (**)) sind die Voraussetzungen von Lemma 2 natürlich erfüllt. Die sich jeweils ergebenden Sätze sind in Aussagen von Krasnoselski [3] bzw. Schaefer [6] enthalten.

3.6. Daß aus $\lim_{n\to\infty}\{\|f(x_n)-x_n\|\}=0$ allein die Existenz eines Fixpunktes nicht folgt, zeigt das Beispiel $(E,\|\ \|):=(C_0[0,1]$, Max-Norm); $X:=\{x\mid x\in E,\ x(0)=0,\ x(1)=1,\ 0\leqslant x(t)\leqslant 1\}$, $x_0(t):=t$, $f(x)[t]:=tx(t)$, $c_n\equiv\frac{1}{2}$. f ist kontrahierend und $\{x_n\}$ explizit durch

$$x_n(t)=\frac{(1+t)^n}{2^n}t$$

gegeben. Wegen $\|f(x_n)-x_n\|\leqslant 1/(n+1)$ ist $\lim_{n\to\infty}\{\|f(x_n)-x_n\|\}=0$, jedoch besitzt f auf X keinen Fixpunkt.

Mit $X:=\{x\mid x\in C_0[0,1]\wedge\|x\|\leqslant 1\}$, $x_0(t)\equiv 1$ und den übrigen Daten des vorherigen Beispiels zeigt sich: Selbst die Gültigkeit von $\lim_{n\to\infty}\{\|f(x_n)-x_n\|\}=0$ und die Existenz eines einzigen Fixpunktes $z\in X$ (hier $z(t)\equiv 0$) implizieren nicht das Zutreffen von $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=z$. Für $n\in N$ ist nämlich $\|x_n\|\equiv 1$, also nicht $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=0$.

Wir zeigen nun, daß der bei den obigen Beispielen jeweils aufgezeigte Sachverhalt bei schließlich vollstetigen kontrahierenden Abbildungen nicht vorliegen kann:

Satz 3.

Voraussetzungen. a. *Es sei* $(E,\|\ \|)$ *ein gleichmäßig konvexer linearer normierter Raum,* X *eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von* E; $f\colon X\to X$ *kontrahierend, und für ein* $n_0\in N$ *sei* f^{n_0} *vollstetig (d. h.* $\overline{f^{n_0}(X)}$ *kompakt).*

b. *Für das Toeplitz-Verfahren:* $x_0\in X$, $x_n:=(1-c_{n-1})x_{n-1}+c_{n-1}f(x_{n-1})$ $(n\geqslant 1)$ *gilt:*

(i) $c_0=1$; (ii) $\bigwedge_{n\in N}0<c_n<1$; (iii) $\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu$ *divergiert*; (iv) $\{c_n\}$ *fällt monoton*; (v) *ist* $\varepsilon>0$ *und* $M:=\operatorname{Diam}(X)$, *so ist für* $n\in N$ *zu* (M,ε,c_n) *gemäß* 3.1, (**) *eine solche Wahl der Konvexitätsmoduln* δ_n *möglich, daß auch* $\sum\delta_\nu$ *divergiert.*

Behauptung. *Das unter* b *definierte Toeplitz-Verfahren* $\{x_n\}$ *konvergiert gegen einen Fixpunkt von* f.

Beweis. Nach einem Resultat von Göhde [2] gibt es $x\in X$ mit $f(x)=x$, so daß Lemma 2 $\lim_{n\to\infty}\{\|f(x_n)-x_n\|\}=0$ garantiert. Wegen der für $u\in X$ gültigen Abschätzung

$$\|f^{n_0}(u)-u\|\leqslant\sum_{\nu=0}^{n_0-1}\|f^{n_0-\nu}(u)-f^{n_0-\nu-1}(u)\|\leqslant n_0\|f(u)-u\|$$

ist dann auch

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}\{\|f^{n_0}(x_n)-x_n\|\}=0.$$

Weiter ist $f^{n_0}(x_n)\in f^{n_0}(X)$ und $f^{n_0}(X)$ relativ folgenkompakt in E, weshalb eine streng monotone Teilfolge $\{k_n\}$ von N und ein $z\in X$ mit $\lim_{n\to\infty}\{f^{n_0}(x_{k_n})\}=z$ existieren. Vermöge (*) ist auch $\lim_{n\to\infty}\{x_{k_n}\}=z$ und wegen $\overline{X}=X$ sogar $z\in X$, so daß aus

$$\begin{aligned}\|f(z)-z\|&\leqslant\|f(z)-f^{n_0+1}(x_{k_n})\|+\|f^{n_0+1}(x_{k_n})-f^{n_0}(x_{k_n})\|+\|f^{n_0}(x_{k_n})-z\|\\&\leqslant 2\|z-f^{n_0}(x_{k_n})\|+\|f(x_{k_n})-x_{k_n}\|,\end{aligned}$$

$f(z)=z$ resultiert. Nach Lemma 2 ist $\{\|x_n-z\|\}$ monoton fallend, so daß mit $\lim_{n\to\infty}\{\|x_{k_n}-z\|\}=0$ schließlich $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=z$ folgt.

Bemerkungen zu Satz 3. 1. Ist E ein Hilbert-Raum, so kann gemäß 3.5, 3 auf (v) verzichtet werden.

2. Für $\alpha\in(0,1)$, $c_n\equiv\alpha$ und $n_0=1$ geht Satz 3 in ein Resultat von Schaefer [6] über (hinsichtlich des Erfülltseins von (v), vgl. 3.5, 4). Speziell für $\alpha\equiv\frac{1}{2}$ ergibt sich ein Satz von Krasnoselski [3].

Wie die Lemmata 3 und 4 (s. 4) zeigen, kann die im zweiten der obigen Beispiele aufgezeigte Situation bei affinen stetigen Selbstabbildungen f eines komplexen Banach-Raumes E; d.h. $f(x)=Ax+b$, A beschränkter, linearer Operator über E, $b\in E$; nicht eintreten, wenn 1 nicht dem Spektrum $\sigma(A)$ von A angehört, d.h. $(I-A)^{-1}$ ein auf ganz E definierter und dort beschränkter linearer Operator ist. Für kontrahierendes f gilt sogar der

Satz 4.

Voraussetzungen. *Es sei* E *ein komplexer Hilbert-Raum,* $A\colon E\to E$ *ein beschränkter, linearer und überdies normaler Operator mit* $1\notin\sigma(A)$. *Es sei* $b\in E$ *und die durch* $f(x):=Ax+b$ *definierte affine Abbildung* $f\colon E\to E$ *kontrahierend.*

Behauptung. *Das durch* $x_0:=b$, $x_n:=\frac{1}{2}\big(f(x_{n-1})+x_{n-1}\big)$ $(n\geqslant 1)$ *definierte Toeplitz-Verfahren* $\{x_n\}$ *konvergiert und es ist* $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=(I-A)^{-1}b$.

Beweis. 4, Korollar 5.

Satz 5.

Voraussetzungen. a. *Es sei* $(E, \|\ \|)$ *ein gleichmäßig konvexer Banach-Raum,* X *eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von* E; $f\colon X\to X$ *kontrahierend.*

b. *Für jede nichtleere, beschränkte, abgeschlossene Teilmenge* $A\subset X$ *von* E *mit* $f(x)\neq x$ *für* $x\in A$ *ist* $\inf\limits_{x\in A}\big(\|f(x)-x\|\big)>0$.

c. *Für das gemäß* 1.3, (**) *definierte Toeplitz-Verfahren:* $x_0\in X$, $x_n := (1-c_{n-1})x_{n-1}+c_{n-1}f(x_{n-1})$ $(n\geqslant 1)$ *gilt:*

(i) $c_0=1$; (ii) $\bigwedge\limits_{n\in N} 0<c_n<1$; (iii) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ *divergiert*; (iv) $\{c_n\}$ *fällt monoton*; (v) *ist* $\varepsilon>0$, $M := \mathrm{Diam}(X)$, *so kann zu* (M, ε, c_n), $n\in N$, *nach* 3.1, (**) $\delta_n := \delta(M, \varepsilon, c_n)$ *derart gewählt werden, daß auch* $\sum\delta_\nu$ *divergiert.*

Behauptung. $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$ *existiert, und setzt man* $x := \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$, *so ist* $x\in X$ *und* $f(x)=x$.

Beweis. Mit den vorliegenden Voraussetzungen und dem gemäß Satz 2 hiernach gesicherten Fixpunkt $z_0\in X$ stehen uns alle Aussagen von Lemma 2 zur Verfügung. Bezeichnet weiter F die dann nichtleere Menge der Fixpunkte von f, so ist für jedes $\eta>0$ eine Menge $R(F,\eta)$ durch $R(F,\eta) := \{x \mid x\in X \wedge \varrho(x,F)\geqslant\eta\}$ (3) definiert und sowohl beschränkt als auch abgeschlossen. Nebenbei bemerken wir, daß die Aussage „$\bigwedge\limits_{\eta>0} R(F,\eta)=\emptyset$" wegen $F=\bar F$ genau dann zutrifft, wenn f die Identität ist. Wegen $F\neq\emptyset$ ist nun auch die Folge $\{\varrho(x_n,F)\}$ definiert und monoton fallend, wie aus $\|x_{n+1}-x\|\leqslant\|x_n-x\|$ für $x\in F$ gemäß Lemma 2, (a) folgt. Wir wollen sogar $\lim\limits_{n\to\infty}\{\varrho(x_n,F)\}=0$ beweisen. Ist $\eta_0>0$ und nicht für fast alle $n\in N$ $\varrho(x_n,F)<\eta_0$, also $\varrho(x_{k_n},F)\geqslant\eta_0$ für eine streng monotone Teilfolge $\{k_n\}$ von N, so wäre wegen der Monotonie $\varrho(x_n,F)\geqslant\eta_0$ für alle $n\in N$, m.a.W. es ist $x_n\in R(F,\eta_0)$ für $n\in N$, d.h. $R(F,\eta_0)\neq\emptyset$ und daher gemäß b

$$\|f(x_n)-x_n\|\geqslant\inf_{x\in R(F,\eta_0)}\big(\|f(x)-x\|\big)>0,$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty}\{\|f(x_n)-x_n\|\}>0,$$

was Lemma 2, (b) widerspricht: Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}\{\varrho(x_n,F)\}=0$. Sei nun $\varepsilon>0$ und dazu $n_0\in N$ mit $\varrho(x_{n_0},F)<\varepsilon/2$ gewählt. Es gibt $z_1\in F$ mit $\|x_{n_0}-z_1\|<\varepsilon/2$. Für $n, m\geqslant n_0$ ist dann wegen der Monotonie von $\{\|x_n-z_1\|\}$ (Lemma 2, (a)) sowohl $\|x_n-z_1\|\leqslant\|x_{n_0}-z_1\|$, als auch $\|x_m-z_1\|\leqslant\|x_{n_0}-z_1\|$,

(3) $\varrho(x,F) := \inf\limits_{u\in F}(\|x-u\|)$.

was schließlich $\|x_n-x_m\|\leqslant\|x_n-z_1\|+\|x_m-z_1\|\leqslant 2\|x_{n_0}-z_1\|<\varepsilon$ ergibt: $\{x_n\}$ ist Cauchyfolge in E. Wegen der Vollständigkeit von E gibt es $x\in E$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=x$. Wegen $x_n\in X$ und $\bar X=X$ ist $x\in X$. Daß auch $f(x)=x$ zutrifft, folgt aus 1.3, (*) und Lemma 1.

4. DIE ITERATIVE LÖSUNG DER LINEAREN FREDHOLM-GLEICHUNG $(I-A)x=b$ MITTELS TOEPLITZ-VERFAHREN

4.1. Es sei E ein komplexer Banach-Raum, $\mathscr{L}(E,E)$ der Banach-Raum der auf E definierten und dort beschränkten linearen Operatoren, $A\in\mathscr{L}(E,E)$ und $\sigma(A)$ das (kompakte) Spektrum von A. Ist $1\notin\sigma(A)$, d.h. existiert $(I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(E,E)$ so besitzt die Gleichung

$$(*)\qquad (I-A)x=b$$

für jedes $b\in E$ genau eine Lösung, nämlich $x=(I-A)^{-1}b$. Liegt $\sigma(A)$ im offenen Einheitskreis $|z|<1$, gilt also für den Spektralradius

$$\nu(A) := \lim_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{\|A^n\|}\}=\max_{z\in\sigma(A)}|z|<1,$$

so konvergiert die Neumannsche Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}A^\nu b$ für jedes $b\in E$ gegen diese Lösung. Soll das umgekehrt gelten, so ist $\nu(A)\leqslant 1$, d.h. das Spektrum von A liegt ganz im abgeschlossenen Einheitskreis. Das folgt aus

Satz 6. *Ist* E *ein komplexer Banach-Raum,* $A\in\mathscr{L}(E,E)$ *und für alle* $b\in E$ *die Neumannsche Reihe* $\sum A^\nu b$ *konvergent, so ist* $\nu(A)\leqslant 1$.

Beweis. Definieren wir eine Folge $\{N_n\}_{n\in Z^+}$ von linearen beschränkten Operatoren N_n durch $N_n(b) := \sum\limits_{\nu=0}^{n}A^\nu b$, so ist nach Voraussetzung insbesondere $\sup\limits_{n\in Z^+}\|N_n(b)\|\leqslant N$, wo N von b abhängen mag. Nach dem Resonanz-Theorem von Banach (s. Yosida [7]) gibt es $M>0$ mit $\sup\limits_{n\in Z^+}\|N_n\|\leqslant M$. Für $n\in Z^+$ ist dann $(N_{-1} := 0)$

$$\|A^n\|=\Big\|\sum_{\nu=0}^{n}A^\nu-\sum_{\nu=0}^{n-1}A^\nu\Big\|\leqslant\Big\|\sum_{\nu=0}^{n}A^\nu\Big\|+\Big\|\sum_{\nu=0}^{n-1}A^\nu\Big\|=\|N_n\|+\|N_{n-1}\|\leqslant 2M,$$

also $\nu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{\|A^n\|}\}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{(2M)}\}=1$, q.e.d.

Bemerkungen zu Satz 6. 1. Die Aussage des Satzes 6 bleibt ersichtlich gültig, wenn nur die Beschränktheit der Folge der Partialsummen der Neumannschen Reihe angenommen wird.

2. Besitzt A ein reines Punktspektrum (z. B. wenn E endlichdimensional, oder, allgemeiner, wenn A vollstetig ist), so kann die Aussage des

Satzes 6 zu $\nu(A) < 1$ verschärft werden. Zu $z \in \sigma(A)$ gibt es dann nämlich ein $b \in E$ mit $\|b\| = 1$ und $Ab = zb$. Durch Induktion folgt $A^\nu b = z^\nu b$ für $\nu \in \boldsymbol{Z}^+$. Die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} A^\nu b$ impliziert $\lim_{\nu\to\infty}\{A^\nu b\} = 0$, woraus $\lim_{\nu\to\infty}\{|z|^\nu\} = \lim_{\nu\to\infty}\{\|A^\nu b\|\} = 0$, d.h. $|z| < 1$ resultiert. Wegen der Kompaktheit von $\sigma(A)$ ist also auch $\nu(A) = \max_{z\in\sigma(A)} |z| < 1$, q.e.d.

Wenigstens für den Fall eines komplexen Hilbert-Raumes und normales A werden wir im folgenden zeigen, daß es Toeplitz-Verfahren der unter 1.3 betrachteten Art gibt, welche auch bei allgemeinerer Lage des Spektrums $\sigma(A)$ von A für jedes $b \in E$ (gegen eine Lösung von (*)) konvergieren. Bei dieser Zielsetzung bedeutet es keine weitere Einschränkung der Allgemeinheit, auch noch $1 \notin \sigma(A)$ anzunehmen. Denn setzt man, zu einem $b \in E$, $x := \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$, so ist $(I-A)x = b$ (Stetigkeit von A), d.h. $(I-A)$ ist surjektiv. Ist andererseits $(I-A)b = 0$ für ein $b \in E$, d.h. $Ab = b$, so lautet die Iteration 1.3, (**) mit $x_0 := b$

$$x_n = \Big(1 + \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu\Big) b.$$

Wegen der vorausgesetzten Konvergenz von $\{x_n\}$ und der Divergenz von $\sum c_\nu$ kann nur $b = 0$ sein, m.a.W. $(I-A)$ ist injektiv. Beides zusammen ergibt die Existenz von $(I-A)^{-1}$ auf E und wegen der Vollständigkeit von E ist $(I-A)^{-1}$ überdies stetig (Satz von Banach), d.h. es ist $1 \notin \sigma(A)$. Daß diese Aussage in voller Allgemeinheit nicht umkehrbar ist, besagt Satz 6 und ist gerade der eigentliche Anlaß zu den folgenden Untersuchungen.

4.2. Definiert man $f: E \to E$ durch $f(x) := Ax + b$, so ist die lineare Gleichung $(I-A)x = b$ dem Fixpunktproblem $f(x) = x$ äquivalent. Ist weiter (t_{nk}) eine Toeplitz-Matrix der unter 1.2 beschriebenen Art, so lautet das dortige Verfahren (*) mit diesem f

$$(*) \qquad x_0 := b, \qquad x_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} t_{nk}(Ax_k + b) = \sum_{k=0}^{n} t_{nk}Ax_k + b \qquad (n \in \boldsymbol{Z}^+).$$

Neben (*) betrachten wir noch die Iterationsfolge $\{y_n\}$, welche durch

$$(**) \qquad y_0 := b, \qquad y_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} t_{nk}Ay_k \qquad (n \in \boldsymbol{Z}^+)$$

definiert ist.

Lemma 3. *Für $n \in \boldsymbol{Z}^+$ gilt $(I-A)x_n - b = -Ay_n$.*

Beweis. Unmittelbar durch Induktion.

Lemma 4. *Es sei $A \in \mathscr{L}(E, E)$, $1 \notin \sigma(A)$, $b \in E$ und seien $\{x_n\}$ bzw. $\{y_n\}$ die gemäß (*) bzw. (**) definierten Folgen. Dann gilt: Genau dann konvergiert $\{x_n\}$ gegen die Lösung von $(I-A)x = b$, wenn $\lim_{n\to\infty}\{Ay_n\} = 0$ stattfindet.*

Beweis. (a) Es sei $\{x_n\}$ konvergent: $x := \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$ und $x = (I-A)^{-1}b$. Dann folgt mit Lemma 3:

$$\lim_{n\to\infty}\{Ay_n\} = b - \lim_{n\to\infty}\{(I-A)x_n\}$$
$$= b - (I-A)\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = b - (I-A)(I-A)^{-1}b = b - b = 0.$$

(b) Es sei $\lim_{n\to\infty}\{Ay_n\} = 0$. Wegen Lemma 3 ist $\lim_{n\to\infty}\{(I-A)x_n\} = b$. Aus $1 \notin \sigma(A)$ folgt aber $(I-A)^{-1} \in \mathscr{L}(E, E)$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \lim_{n\to\infty}\{(I-A)^{-1}(I-A)x_n\} = (I-A)^{-1}b, \qquad \text{q.e.d.}$$

4.3. Es sei (t_{nk}) nun weiter zu der in 1.3 beschriebenen Art spezialisiert, also

$$(*) \qquad x_0 := b,\ x_{n+1} := (1-c_n)x_n + c_n(Ax_n + b) \qquad (n \in \boldsymbol{Z}^+),$$

$$(**) \qquad y_0 := b,\ y_{n+1} := (1-c_n)y_n + c_nAy_n \qquad (n \in \boldsymbol{Z}^+);$$

wobei $c_n \in (0, 1]$ ist und $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ divergiert.

Lemma 5. *Ist $c_n \equiv \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, $f: E \to E$ durch $f(x) := Ax + b$ für $x \in E$ definiert und dann $g := (1-\alpha)I + \alpha f$ gesetzt, so gilt für das Verfahren (*)*

$$(***) \qquad x_n = g^n(b) = \big((1-\alpha)I + \alpha f\big)^n(b),$$ *d.h. $\{x_n\}$ läßt sich als Picard-Iteration einer Funktion g schreiben.*

Beweis. Unmittelbar.

Lemma 6. *Ist $c_n \equiv \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ und $f: E \to E$ durch $f(x) := Ax + b$ für $x \in E$ definiert, so gilt für das Verfahren (*)*

$$(****) \qquad x_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}(1-\alpha)^{n-\nu}\alpha^\nu f^\nu(b),$$ *d.h. wegen $f^\lambda(b) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} A^\nu b$: $\{x_n\}$ ist die Euler-Knopp-Transformierte der Neumannschen Reihe* (s. Zeller [8]).

Beweis. Die affine Abbildung f hat die folgende Eigenschaft:

$$(+) \qquad \bigwedge_{x,y\in E}\ \bigwedge_{\alpha\in[0,1]} : f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Durch Induktion folgt daraus leicht

$$(++)\qquad \bigwedge_{(x_1,\ldots,x_n)\in E^n}\ \bigwedge_{(a_1,\ldots,a_n)\in[0,1]^n} f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 1$$

Für $n=0$ ist nun $x_0 = b$. Ist $n \geqslant 0$ und für dieses n (****) bereits bewiesen, so folgt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \big((1-a)I+af\big)^{n+1}(b) \qquad \text{(nach Lemma 5)}\\
&= \big((1-a)I+af\big)\big((1-a)I+af\big)^{n}(b)\\
&= \big((1-a)I+af\big)\sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{n}{\nu}(1-a)^{n-\nu}a^{\nu}f^{\nu}(b)\\
&= \sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{n}{\nu}(1-a)^{n+1-\nu}a^{\nu}f^{\nu}(b)+\sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{n}{\nu}(1-a)^{n-\nu}a^{\nu+1}f^{\nu+1}(b)\\
&\qquad\qquad \Big(\text{wegen } \sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{n}{\nu}(1-a)^{n-\nu}a^{\nu}=1 \text{ und } (++)\Big)\\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1}\tbinom{n}{\nu}(1-a)^{n+1-\nu}a^{\nu}f^{\nu}(b)+\sum_{\nu=0}^{n+1}\tbinom{n}{\nu-1}(1-a)^{n+1-\nu}a^{\nu}f^{\nu}(b)\\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1}\tbinom{n+1}{\nu}(1-a)^{n+1-\nu}a^{\nu}f^{\nu}(b), \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

4.4. Um die Konvergenz eines der in Rede stehenden Toeplitz-Verfahren gegen die Lösung von $(I-A)x = b$ zu gewährleisten, genügt es nach Lemma 4 nach Bedingungen zu suchen, welche die Aussage $\lim\limits_{n\to\infty}\{Ay_n\} = 0$ zur Folge haben. Wir betrachten die durch (*), (**) in 4.3 gegebenen Verfahren $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Entsprechend Lemma 5 gilt für $\{y_n\}$:

$$(*)\qquad y_n = \prod_{\nu=1}^{n}[(1-c_{\nu-1})I+c_{\nu-1}A](b) \qquad (n\in \boldsymbol{N}).$$

Definiert man eine Folge von linearen beschränkten Operatoren $\{A_n\}$ durch

$$(**)\qquad A_n := \prod_{\nu=1}^{n}[(1-c_{\nu-1})I+c_{\nu-1}A] = \prod_{\nu=1}^{n}[I-c_{\nu-1}(I-A)],$$

so ist $y_n = A_n b$.

Wir wollen nach handlichen Bedingungen Ausschau halten, welche $\lim\limits_{n\to\infty}\{A_n\} = 0$ in $\mathscr{L}(E, E)$ implizieren. Dann ist natürlich auch $\lim\limits_{n\to\infty}\{y_n\} = 0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty}\{Ay_n\} = 0$ (Stetigkeit und Linearität von A).

LEMMA 7. *Es sei $(E, \|\ \|)$ ein komplexer (B)-Raum, $A\in\mathscr{L}(E, E)$, $\{x_n\}$ gemäß 4.3, (*) und A_n nach 4.4, (**) definiert. Ist weiter $\beta\in(0,1)$, und sind dann $\varkappa, \lambda, \delta, \mu \in \boldsymbol{R}$ durch*

$$\varkappa := \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\{c_\nu\}, \qquad \lambda := 2\min_{z\in\sigma(A)}\frac{1-\mathrm{Re}(z)}{|1-z|^2}, \qquad \varkappa<\lambda,$$
$$\delta := \beta(\lambda-\varkappa), \qquad \mu := \min_{z\in\sigma(A)}|1-z|$$

sowie $n_0\in\boldsymbol{N}$ durch $c_n \leqslant \lambda-\delta$ für $n>n_0$ festgelegt, so findet für $n\geqslant n_0+1$

$$(***)\qquad \nu(A_n) \leqslant (2+\|A\|)^{n_0}\prod_{\nu=n_0+1}^{n}\big(1-(\delta/2)\mu^2 c_{\nu-1}\big)$$

statt.

Beweis. Bezeichnet $\Pi_n(z)$ das komplexe Polynom $\prod\limits_{\nu=1}^{n}[(1-c_{\nu-1})+c_{\nu-1}z]$, so gilt nach dem Dunfordschen Spektralabbildungssatz (Yosida [7]) für $n\in\boldsymbol{N}$

$$(+)\qquad \nu(A_n) = \sup_{w\in\sigma(\Pi_n(A))}|w| = \sup_{w\in\Pi_n(\sigma(A))}|w| = \sup_{z\in\sigma(A)}\Big|\prod\nolimits_n(z)\Big|$$
$$= \sup_{z\in\sigma(A)}\prod_{\nu=1}^{n}|1-c_{\nu-1}(1-z)| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n}\sup_{z\in\sigma(A)}|1-c_{\nu-1}(1-z)|.$$

Nun ist für $\nu\geqslant 1$

$$|1-c_{\nu-1}(1-z)|^2 = 1-c_{\nu-1}\big(2\big(1-\mathrm{Re}(z)\big)-c_{\nu-1}|1-z|^2\big)$$

und daher für $\nu\geqslant n_0+1$ sowie $z\in\sigma(A)$

$$|1-c_{\nu-1}(1-z)| \leqslant \Big[1-c_{\nu-1}\Big(\frac{2\big(1-\mathrm{Re}(z)\big)}{|1-z|^2}-c_{\nu-1}\Big)|1-z|^2\Big]^{1/2}$$
$$\leqslant \big[1-c_{\nu-1}\big(\lambda-(\lambda-\delta)\big)\mu^2\big]^{1/2} = (1-\delta\mu^2 c_{\nu-1})^{1/2} \leqslant 1-\frac{\delta}{2}\mu^2 c_{\nu-1}.$$

Mit (+) und der für $z\in\sigma(A)$ gültigen Abschätzung $|z|\leqslant\nu(A)\leqslant\|A\|$ folgt die Behauptung.

KOROLLAR 1. *Definitionen und Voraussetzungen wie bei Lemma 7. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}\{\nu(A_n)\} = 0$.*

Beweis. Man bestimmt $n_0\in\boldsymbol{N}$ so, wie in Lemma 7 beschrieben und hat dann (***) für $n\geqslant n_0+1$. Andererseits impliziert die Divergenz von $\sum c_\nu$ die von $\sum\limits_{\nu}\frac{\delta}{2}\mu^2 c_{\nu-1}$ und also auch

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\prod_{\nu=n_0+1}^{n}\Big(1-\frac{\delta}{2}\mu^2 c_{\nu-1}\Big)\Big\} = 0,$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty}\{\nu(A_n)\} = 0$ wegen (***), q.e.d.

Es sei E im folgenden ein komplexer Hilbert-Raum und $A \in \mathscr{L}(E, E)$ ein normaler Operator, d.h. es ist $A^*A = AA^*$ [4]. Mit A ist dann auch A_n normal, und weil überdies $\mathscr{L}(E, E)$ mit der Involution $A \to A^*$ eine $\mathfrak{B}^*$-Algebra ist, gilt für $n \in \boldsymbol{N}$

$$(++) \qquad \nu(A_n) = \|A_n\|.$$

Satz 7.

Voraussetzungen. a. *Es sei E ein komplexer Hilbert-Raum, $b \in E$, $A \in \mathscr{L}(E, E)$, normal und $\beta \in (0, 1)$.*

b. *Es sei $\{c_n\}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < c_n \leqslant 1$ und divergenter Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$.*

c. *Es seien $\varkappa, \lambda, \delta, \mu \in \boldsymbol{R}$, $n_0 \in \boldsymbol{N}$ durch*

$$\varkappa := \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\{c_\nu\}, \qquad \lambda := 2\min_{z\in\sigma(A)} \frac{1-\operatorname{Re}(z)}{|1-z|^2},$$

$$\delta := \beta(\lambda-\varkappa), \qquad \mu := \min_{z\in\sigma(A)} |1-z|,$$

$$c_n \leqslant \lambda-\delta \quad \text{für } n > n_0$$

definiert und überdies gelte $\varkappa < \lambda$.

Behauptungen. I. *Es gilt $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = (I-A)^{-1}b$.*

II. *Mit $x := (I-A)^{-1}b$ findet für $n \geqslant n_0+1$*

$$(**) \qquad \|x-x_n\| \leqslant \|Ab\| \frac{(2+\|A\|)^{n_0}}{\mu} \prod_{\nu=n_0+1}^{n} \left(1-\frac{\delta}{2}\mu^2 c_{\nu-1}\right)$$

statt.

Beweis. Zu I: Nach Lemma 7, Korollar 1 und $(++)$ ist $\lim_{n\to\infty}\{\|A_n\|\} = 0$, also auch $\lim_{n\to\infty}\{Ay_n\} = \lim_{n\to\infty}\{AA_nb\} = 0$. Lemma 4 liefert die Behauptung.

Zu II: Wegen $x = (I-A)^{-1}b$ und $x_n = (I-A)^{-1}(b-Ay_n) = (I-A)^{-1} \times (b-AA_nb)$ (s. 4.4, $(**)$) ist

$$(+++) \qquad \|x-x_n\| = \|(I-A)^{-1}b-(I-A)^{-1}(b-AA_nb)\|$$
$$\leqslant \|(I-A)^{-1}\|\,\|A_nAb\| \leqslant \|(I-A)^{-1}\|\,\|A_n\|\,\|Ab\|.$$

Mit A sind aber nun auch $I-A$ und $(I-A)^{-1}$ normal, weshalb $(+++)$ wegen $(++)$ in der Form

$$(++++) \qquad \|x-x_n\| \leqslant \nu[(I-A)^{-1}]\cdot\nu(A_n)\,\|Ab\|$$

[4] A^* ist der zu A adjungierte Operator.

geschrieben werden kann. Nach Dunford's Spektralabbildungssatz ist nun

$$\nu[(I-A)^{-1}] = \max_{w\in\sigma(I-A)^{-1}} |w| = \max_{z\in\sigma(A)} |1-z|^{-1} = \frac{1}{\min_{z\in\sigma(A)}|1-z|} = \frac{1}{\mu}$$

($\mu > 0$ wegen $1 \notin \sigma(A)$), so daß wir mit Lemma 7, $(+++)$ für $n \geqslant n_0+1$

$$\|x-x_n\| \leqslant \|Ab\| \frac{(2+\|A\|)^{n_0}}{\mu} \prod_{\nu=n_0+1}^{n} \left(1-\frac{\delta}{2}\mu^2 c_{\nu-1}\right)$$

erhalten, q.e.d.

Daß es ein für alle normalen $A \in \mathscr{L}(E, E)$ mit

$$\lambda := 2\min_{z\in\sigma(A)} \frac{1-\operatorname{Re}(z)}{|1-z|^2} > 0$$

konvergentes Toeplitz-Verfahren $\{x_n\}$ (mit von A unabhängiger Folge $\{c_n\}$) gibt, besagt

Korollar 2. *Definitionen und Voraussetzungen wie bei Satz 7, jedoch gelte bei* b *zusätzlich $\lim_{\nu\to\infty}\{c_\nu\} = 0$ (z. B. $c_\nu := 1/(\nu+1)$ (Cesàro-Matrix)). Dann gilt:*

I. $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = (I-A)^{-1}b$.

II. *Ist $n_0 \in \boldsymbol{N}$ und $c_n \leqslant \lambda-\delta$ für $n \geqslant n_0+1$, so gilt für $n \geqslant n_0+1$*

$$\|x-x_n\| \leqslant \|Ab\| \frac{(2+\|A\|)^{n_0}}{\mu} \prod_{\nu=n_0+1}^{n} \left(1-\frac{\delta}{2}\mu^2 c_{\nu-1}\right).$$

Beweis. Wegen $\varkappa = 0$ und $\lambda > 0$ ist $\varkappa < \lambda$ erfüllt, d.h. I bewiesen, und die Behauptung II folgt unmittelbar aus Satz 7.

Daß es zu jedem normalen Operator $A \in \mathscr{L}(E, E)$ mit $\lambda > 0$ eine konvergente Toeplitz-Iteration mit sogar konstanter (aber von A abhängender) Folge $\{c_n\}$ gibt, besagt

Korollar 3. *Definitionen und Voraussetzungen wie bei Satz 7, jedoch gelte bei* b *$c_n \equiv a$ mit $a \in (0, 1]$ und $a < \lambda$. Dann gilt:*

I. $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = (I-A)^{-1}b$.

II. *Für $n \geqslant 2$ ist*

$$\|x-x_n\| \leqslant \|Ab\| \frac{2+\|A\|}{\mu} \left(1-\frac{1}{4}(\lambda-a)\mu^2\right)^{n-1}.$$

Beweis. Mit $\varkappa = a$ und $a < \lambda$ ist $\varkappa < \lambda$, d.h. I ist bewiesen. Setzen wir weiter $\beta := \frac{1}{2}$, so ist $\delta = \frac{1}{2}(\lambda-a)$, also, wegen $a < \lambda$, $c_n \leqslant \lambda-\delta$ für $n \in \boldsymbol{N}$. Nach Satz 7 ist II bewiesen.

Bemerkungen zu Korollar 3. 1. Ist $\operatorname*{Re}_{z\epsilon\sigma(A)}(z) \leqslant \gamma < 1$, $z\epsilon\sigma(A)$ (was mit $\lambda > 0$ äquivalent ist), so kann

$$\alpha := \min\left(1, \frac{1-\gamma}{(1+\|A\|)^2}\right)$$

gesetzt werden; es ist nämlich $\alpha\epsilon(0,1]$ und weiterhin für $z\epsilon\sigma(A)$

$$\alpha < 2\frac{1-\mathrm{Re}(z)}{(1+|z|)^2} \leqslant 2\frac{1-\mathrm{Re}(z)}{|1-z|^2},$$

also auch $\alpha < \lambda$.

2. Mit Lemma 6 und der daran anschließenden Bemerkung kann man Korollar 3 in limitierungstheoretischer Sprache so formulieren: Für jeden normalen beschränkten linearen Operator A mit

$$\lambda := 2\min_{z\epsilon\sigma(A)}\frac{1-\mathrm{Re}(z)}{|1-z|^2} > 0 \qquad (\text{oder } \mathrm{Re}(z) < 1, z\epsilon\sigma(A))$$

und für jedes reelle $\alpha\epsilon(0,1]$ mit $\alpha < \lambda$ ist die zum Problem $(I-A)x = b$ angesetzte Neumannsche Reihe $\sum A^\nu b$ zur Lösung $(I-A)^{-1}b$ Euler-Knopp limitierbar mit Koeffizient α.

Korollar 4. *Ist A ein normaler Operator, $\alpha\epsilon(0,1]$ und liegt das Spektrum $\sigma(A)$ von A ganz im offenen Euler-Knopp-Kreis*

$$EK_\alpha := \left\{z \,|\, z\epsilon C \wedge \left|z - \frac{\alpha-1}{\alpha}\right| < \frac{1}{\alpha}\right\},$$

so ist das Toeplitz-Verfahren 4.3, (*) *mit $c_n :\equiv \min(1,\alpha)$ konvergent gegen $(I-A)^{-1}b$, und es gilt eine entsprechende Fehlerabschätzung wie in Korollar* 3.

Beweis. Die Aussage

$$„\bigwedge_{z\epsilon\sigma(A)}\left|z - \frac{\alpha-1}{\alpha}\right| < \frac{1}{\alpha}“$$

ist

$$„\alpha < \lambda“$$

äquivalent. Korollar 3 liefert die Behauptung.

Aus Korollar 4 erhellt auch die geometrische Bedeutung von

$$\lambda := 2\min_{z\epsilon\sigma(A)}\frac{1-\mathrm{Re}(z)}{|1-z|^2} > 0;$$

es ist λ^{-1} der kleinste Radius eines abgeschlossenen Euler-Knopp-Kreises $\overline{EK}_\alpha$, der das Spektrum von A enthält.

Beweis von Satz 4. Wegen der Kontraktionseigenschaft von f ist $\|A\| \leqslant 1$ und daher auch $\nu(A) \leqslant 1$. Für $z\epsilon\sigma(A)$ besagt das $|z| \leqslant \nu(A) \leqslant 1$, was mit $1 \notin \sigma(A)$ die Inklusion $\sigma(A) \subset \overline{EK}_1 - \{1\} \subset EK_{1/2}$ ergibt. Korollar 4 ergibt die Behauptung.

Literaturnachweis

[1] F. E. Browder, *Non-expansive non-linear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. 54 (1965), S. 1041-1043.

[2] D. Göhde, *Über Fixpunkte bei stetigen Selbstabbildungen mit kompakter Iterierten*, Math. Nachr. 28 (1964), S. 45-55.

[3] M. A. Krasnoselski, *Zwei Bemerkungen über die Methode der sukzessiven Näherungen*, Uspehi, Mat. Nauk (N. S) 10, No 1 (63) (1955), S. 123-127 (Russisch).

[4] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Am. Math. Soc. 4 (1953), S. 506-510.

[5] J. Reinermann, *Über Fixpunkte kontrahierender Abbildungen in uniformen Räumen und deren Darstellung durch konvergente Iterationsverfahren*, Schriften des Rheinisch-Westfälischen Instituts für Instrumentelle Mathematik, Bonn (erscheint demnächst).

[6] H. Schaefer, *Über die Methode der sukzessiven Approximationen*, Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 59 (1957), S. 131-140.

[7] K. Yosida, *Functional Analysis*, Berlin - Heidelberg - New York 1966.

[8] K. Zeller, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1958.

Reçu par la Rédaction le 16. 2. 1968