STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Поведение решений эллиптических задач при вариации области

С. Г. КРЕЙН (Воронеж)

В ещё неопубликованной работе Г. И. Лаптева и автора [6] делается попытка применить видоизменение теорем Х. Танабе и Т. Като [3], [12] (см. также [4], гл. II, § 5) о решениях абстрактных эволюционных уравнений к изучению уравнений в частных производных параболического типа в нецилиндрических областях. В связи с этим возникла необходимость исследовать поведение решений эллиптических задач в переменных областях, чему и посвящена настоящая статья. В этом исследовании используются, причём по существу, интерполяционные теоремы теории операторов и теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами. При изложении мы, с целью его сокращения, ограничиваемся L_2-теорией и упрощенной постановкой граничных задач. Читатель легко усмотрит возможные здесь обобщения, о которых впрочем говорится в заключительных замечаниях.

1. Функции на близких поверхностях. Пусть G_0 — ограниченная область n-мерного пространства с достаточно гладкой границей Γ_0. Предположим, что на поверхности Γ_0 выбрана некоторая (вообще говоря, локальная) система координат $(s_1, \ldots, s_{n-1})$. В каждой точке $s \in \Gamma_0$ проведем ось нормали к поверхности Γ_0, направленную внутрь области G_0, и координату точки на этой оси обозначим через n. Предположим, что числа $(s_1, \ldots, s_{n-1}; n)$ $(s \in \Gamma_0, |n| < n_0)$ задают систему координат в некоторой окрестности U поверхности Γ_0. Эти координаты являются достаточно гладкими функциями декартовых координат. Для соответствующего якобиана $j(s, n)$ справедливо неравенство

$$0 < m \leqslant j(s, n) \leqslant M, \quad (s, n) \in U. \tag{1.1}$$

Пусть в окрестности U расположено семейство поверхностей Γ_δ, зависящих от параметра δ $(0 < \delta \leqslant \delta_0)$, причем уравнения поверхностей Γ_δ задаются в виде

$$n = \varkappa(s_1, \ldots, s_{n-1}, \delta) \equiv \varkappa(s, \delta),$$

где $\varkappa(s,\delta)$ — однозначные достаточно гладкие функции на Γ_0. При $\delta\to 0$ поверхности Γ_δ стремятся к поверхности Γ_0 в следующем смысле: функция $\varkappa$ и все её частные производные по s достаточно высокого порядка являются величинами порядка δ равномерно по $s\in\Gamma_0$. Предел

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\varkappa(s,\delta)}{\delta}=\zeta(s) \tag{1.2}$$

существует и является достаточно гладкой функцией от δ. Обозначим

$$\theta=\sup_{\substack{0<\delta\leqslant\delta_0\\ s\in\Gamma_0}}\frac{\varkappa(s,\delta)}{\delta}. \tag{1.3}$$

Область, заключённую между поверхностями Γ_0 и Γ_δ обозначим через δG.

Пусть G — область с достаточно гладкой границей, содержащая внутри себя все области $\bar G_\delta$ и пусть $\varphi(x)$ — достаточно гладкая функция в области G. Каждой такой функции поставим в соответствие семейство функций на поверхности Γ_0, определённое по формуле

$$A_\delta\varphi(s)=\varphi\big(s,\varkappa(s,\delta)\big)-\varphi(s,0)\equiv\varphi(s,\varkappa)-\varphi(s,0). \tag{1.4}$$

Мы будем изучать оператор A_δ как оператор действующий из функциональных пространств в области G в пространства функций на Γ_0.

Очевидно, что

$$\|A_\delta\varphi\|_{C(\Gamma_0)}\leqslant\|\varphi\|_{C_1(G)}\max_{s\in\Gamma_0}|\varkappa(s,\delta)|\leqslant\theta\delta\|\varphi\|_{C_1(G)}.$$

Далее для первых производных по координатам s имеем

$$D_sA_\delta\varphi(s)=D_s\varphi(s,\varkappa)-D_s\varphi(s,0)+D_n\varphi(s,\varkappa)D_s\varkappa, \tag{1.5}$$

откуда [1]

$$\|A_\delta\varphi\|_{C_1(\Gamma_0)}\leqslant\theta\delta\|\varphi\|_{C_2(G)}+C\delta\|\varphi\|_{C_1(G)}\leqslant C\delta\|\varphi\|_{C_2(G)}.$$

Приращение

$$\begin{aligned}A_\delta\varphi(s')-A_\delta\varphi(s)&=D_n\varphi(s',\eta')\varkappa(s')-D_n\varphi(s,\eta)\varkappa(s)=\\&=[D_n\varphi(s',\eta')-D_n\varphi(s,\eta)]\varkappa(s')+D_n\varphi(s,\eta)[\varkappa(s')-\varkappa(s)],\end{aligned} \tag{1.6}$$

где η' и η точки на интервалах $\big(0,\varkappa(s')\big)$ и $\big(0,\varkappa(s)\big)$ соответственно. В силу наших предположений о близости Γ_δ к Γ_0

$$|(s',\eta')-(s,\eta)|\leqslant|s'-s|\big(1+O(\delta)\big)$$

[1] Здесь и в дальнейшем через C обозначаются все несущественные константы, не зависящие от δ и функций из соответствующих классов.

Из (1.6) тогда вытекает, что

$$\|A_\delta\varphi\|_{C_\alpha(\Gamma)}\leqslant\|\varphi\|_{C_{1+\alpha}(G)}O(\delta)+\|\varphi\|_{C_1(G)}|s'-s|^{1-\alpha}O(\delta)\leqslant C\delta\|\varphi\|_{C_{1+\alpha}(G)}.$$

Повторяя те же рассуждения для производных высшего порядка, мы приходим к следующему утверждению:

Лемма I. *Норма A_δ, как оператора из $C_{k+\alpha}(G)$, $k\geqslant 1$, в $C_{k-1+\alpha}(\Gamma_0)$ имеет порядок δ*:

$$\|A_\delta\varphi\|_{C_{k-1+\alpha}(\Gamma_0)}\leqslant C\delta\|\varphi\|_{C_{k+\alpha}(G)}. \tag{1.7}$$

Рассмотрим теперь оператор A_δ в интегральных нормах. Соответствующие вычисления мы будем делать при следующих упрощающих предположениях: 1. $\varkappa(s)>0$, 2. нормы в пространствах $W_2^l(G)$ и $W_2^l(\Gamma_0)$ вводятся по мерам с элементами объёма $dn\,ds$ и площади поверхности ds. Эти предположения вводятся лишь для краткости изложения. В частности, второе предположение несущественно в силу (1.1).

Имеем

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0}[A_\delta\varphi]^2ds&=\int_{\Gamma_0}\Big[\int_0^{\varkappa(s;\delta)}D_n\varphi(s,n)\,dn\Big]^2ds\leqslant\\&\leqslant\int_{\Gamma_0}\varkappa(s;\delta)\int_1^{\varkappa}|D_n\varphi(s,n)|^2dn\,ds\leqslant\theta\delta\int_0^{\theta\delta}\int_{\Gamma_0}|D_n\varphi(s,n)|^2ds\,dn\leqslant\\&\leqslant\Theta^2\delta^2\max_{0\leqslant n\leqslant n_0}\int_{\Gamma_0}|D_n\varphi(s,n)|^2ds.\end{aligned} \tag{1.8}$$

В силу теоремы о следах (см. [9]) отсюда вытекает, что [2]

$$\|A_\delta\varphi\|_{L_2(\Gamma_0)}\leqslant C\delta\|\varphi\|_{W_2^{1/2+1'}(G)},\qquad 1'=1+\varepsilon. \tag{1.9}$$

Перейдем к рассмотрению производных функции $A_\delta\varphi$ по координатам s. Из (1.5) имеем

$$\|D_sA_\delta\varphi\|_{L_2(\Gamma_0)}\leqslant\|A_\delta D_s\varphi\|_{L_0(\Gamma_0)}+C\delta\|D_n\varphi\big(s,\varkappa(s)\big)\|_{L_2(\Gamma_0)}. \tag{1.10}$$

Применяя к первому слагаемому (1.9), а ко второму теорему о следах, а затем теорему вложения, получаем

$$\begin{aligned}\|D_sA_\delta\varphi\|_{L_2(\Gamma_0)}&\leqslant C\delta(\|D_s\varphi\|_{W_2^{1/2+1'}(G)}+\|\varphi\|_{W_2^{1/2+1'}(G)})\leqslant\\&\leqslant C\delta\|\varphi\|_{W_2^{3/2+1'}(G)}.\end{aligned}$$

[2] Здесь и в дальнейшем ε обозначает фиксированное сколь угодно малое положительное число. Неявно предполагается, что константы в теореме вложения $W_2^{1/2+1'}(G)\to W_2^1(\Gamma_{0,n})$, где $\Gamma_{0,n}$ „параллельная" поверхность, равномерно по n ограничены.

Из этого неравенства следует, что

$$\|A_\delta \varphi\|_{W_2^1(\Gamma_0)} \leqslant C\delta \|\varphi\|_{W_2^{3/2+1'}(G)}.$$

Повторив аналогичные рассуждения для старших производных от $A_\delta \varphi$, мы при целых $k \geqslant 1$ придем к неравенствам

$$(1.11) \qquad \|A_\delta \varphi\|_{W_2^{k-1}(\Gamma_0)} \leqslant C\delta \|\varphi\|_{W_2^{k-1/2+1'}(G)}.$$

Воспользуемся теперь интерполяционной теоремой для гильбертовых шкал пространств $W_2^l(\Gamma_0)$ и $W_2^l(G)$ (Лионс [8], Крейн [5]; см. также [7]). В силу этой теоремы из неравенств (1.9) и (1.11) вытекает

Лемма 2. *Оператор A_δ, определенный на гладких функциях, допускает замыкание до оператора (обозначаемого так же), действующего из пространства $W_2^{1/2+1'}(G)$ в пространство $L_2(\Gamma_0)$. Сужения этого оператора, как оператора из $W_2^{k-1/2+\alpha+1'}(G)$ в $W_2^{k-1+\alpha}(\Gamma_0)$ (k — целое $\geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha < 1$), имеют нормы порядка δ:*

$$(1.12) \qquad \|A_\delta \varphi\|_{W_2^{k-1+\alpha}(\Gamma_0)} \leqslant C\delta \|\varphi\|_{W_2^{k-1/2+\alpha+1'}(G)}.$$

Если $k-1+\alpha > 0$, то по теореме о следах

$$(1.13) \qquad \|A_\delta \varphi\|_{W_2^{k-1+\alpha}(\Gamma_0)} \leqslant C \|\varphi\|_{W_2^{k-1/2+\alpha}(G)}.$$

Применяя указанную интерполяционную теорему к неравенствам (1.12) и (1.13), получаем

Лемма 3. *При $k-1+\alpha > 0$ и $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ справедливо неравенство* [3]

$$(1.14) \qquad \|A_\delta \varphi\|_{W_2^{k-1+\alpha}(\Gamma_0)} \leqslant C\delta \|\varphi\|_{W_2^{k-1/2+\alpha+\gamma'}(G)}.$$

2. Функции в тонком слое. Нас будут интересовать классы функций, определённых в пересечении области δG с областью G, которое мы обозначим через δG^+. Часть поверхности $\Gamma_0(\Gamma_\delta)$, входящую в границу области δG^+ обозначим через $\Gamma_0^+(\Gamma_\delta^+)$.

Лемма 4. *Если функция $\varphi(x) \in C_{k+\alpha}(\delta G^+)$ и равна нулю вместе со своими производными до порядка l включительно на Γ_0^+ (или Γ_δ^+), то справедливо неравенство*

$$(2.1) \qquad \|\varphi\|_{C_{k-1+\alpha}(\delta G^+)} \leqslant C\delta \|\varphi\|_{C_{k+\alpha}(\delta G^+)}.$$

Лемма доказывается также элементарно, как и лемма 1.

[3] Здесь и в дальнейшем $\gamma' = (1+\varepsilon)\gamma$.

Лемма 5. *Для гладких функций в области δG^+, равных нулю на Γ_0 (или Γ_δ), справедливо неравенство*

$$(2.2) \qquad \|\varphi\|_{L_2(\delta G^+)} \leqslant C\delta \|D_n \varphi\|_{L_2(\delta G^+)}.$$

Доказательство. Для любой гладкой $\psi \in L_2(\delta G^+)$ имеем

$$\Big|\int_0^\varkappa \varphi(s,n)\psi(s,n)\,dn\Big| = \Big|\int_0^\varkappa D_n\varphi(s,n)\int_n^\varkappa \psi(s,\tau)\,d\tau\,dn\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{\int_0^\varkappa |D_n\varphi|^2\,dn \int_0^\varkappa \Big|\int_n^\varkappa \psi(s,\tau)\,d\tau\Big|^2 dn\Big\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa \Big\{\int_0^\varkappa |D_n\varphi|^2\,dn \int_0^\varkappa |\psi|^2\,dn\Big\}^{1/2}.$$

Интегрируя по Γ_0^+ и применяя снова неравенство Шварца, получаем

$$\Big|\int_{\delta G^+} \varphi\psi\,dx\Big| \leqslant \int_{\Gamma_0^+}\Big|\int_0^\varkappa \varphi\psi\,dn\Big|\,ds \leqslant \theta\delta \|D_n\varphi\|_{L_2(\delta G^+)} \|\psi\|_{L_2(\delta G^+)},$$

откуда следует (2.2). Лемма доказана.

Обозначим через $\tilde W_2^l(\delta G^+)$ $(1 \leqslant l \leqslant \frac{3}{2})$ подпространство $W_2^l(\delta G^+)$ всех функций, аннулирующихся на Γ_0, а через $\tilde W_2^{-l}(\delta G^+)$ сопряженное к нему пространство в смысле обычного скалярного произведения. Из леммы 2.5 вытекают

Следствие 1. *Если $\varphi \in \tilde W_2^1(\delta G^+)$, то*

$$(2.3) \qquad \|\varphi\|_{L_2(\delta G^+)} \leqslant C\delta \|\varphi\|_{W_2^1(\delta G^+)}.$$

Следствие 2. *Если $\psi \in L_2(\delta G^+)$, то*

$$(2.4) \qquad \|\psi\|_{\tilde W_2^{-1}(\delta G^+)} \leqslant C\delta \|\psi\|_{L_2(\delta G^+)}.$$

Действительно, при гладких $\varphi \in \tilde W_2^1(\delta G^+)$

$$\Big|\int_{\delta G^+} \varphi\psi\,dx\Big| \leqslant \|\varphi\|_{L_2(\delta G^+)} \|\psi\|_{L_2(\delta G^+)} \leqslant C\delta \|\varphi\|_{W_2^1(\delta G^+)} \|\psi\|_{L_2(\delta G^+)},$$

откуда следует (2.4).

Лемма 6. *Для частных производных $D\varphi$ первого порядка от гладкой функции φ справедливы неравенства:*

$$\|D\varphi(x)\|_{L_2(\delta G^+)} \leqslant C\delta^{1/2} \|\varphi\|_{W_2^{1+1/2'}(\delta G^+)}.$$

При доказательстве неравенства (1.8) утверждение леммы фактически доказано для производной $D_n\varphi$. Аналогично оно доказывается и для производных $D_s\varphi$

Из лемм 5 и 6 непосредственно получаем

Следствие 3. *Если* $\varphi \in \tilde{W}_2^{1+1/2'}(\delta G^+)$, *то*

$$\|\varphi\|_{W_2^1(\delta G^+)} \leqslant C\delta^{1/2}\|\varphi\|_{W_2^{1+1/2'}(\delta G^+)}. \tag{2.5}$$

Применение интерполяционной теоремы к неравенству (2.5) и тривиальному равенству $\|\varphi\|_{W_2^1} = \|\varphi\|_{W_2^1}$ дает

Следствие 4. *Если* $\varphi \in \tilde{W}_2^{1+\gamma'}(\delta G^+)$ *при* $0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2}$, *то*

$$\|\varphi\|_{W_2^1(\delta G^+)} \leqslant C\delta^{\gamma}\|\varphi\|_{W_2^{1+\gamma'}(\delta G^+)}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) так же, как и в следствии 2 получаем двойственное утверждение

Следствие 5. *Если* $\psi \in \tilde{W}_2^{-1}(\delta G^+)$, *то*

$$\|\psi\|_{\tilde{W}_2^{-1-\gamma'}(\delta G^+)} \leqslant C\delta^{\gamma}\|\psi\|_{\tilde{W}_2^{-1}(\delta G^+)}. \tag{2.7}$$

3. Гладкое семейство областей. Пусть G — снова ограниченная область с достаточно гладкой границей. В области G содержится семейство замкнутых областей $\bar{G}_t$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ с границами S_t. Предполагается, что при каждом $t \in [0, T]$ поверхность $\Gamma_0 = S_t$ обладает всеми свойствами, описанными в п. 1-2, при этом роль Γ_δ играют поверхности $S_{t+\Delta_t}$ с $\Delta t = \delta$ функция $\varkappa$, введенная в п. 1, теперь будет зависеть от t и Δt: $\varkappa = \varkappa(s; t, \Delta t)$ и

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varkappa(s; t, \Delta t)}{\Delta t} = \zeta(s, t) \tag{3.1}$$

будет гладкой функцией s и t.

Все константы, связанные со свойствами поверхностей $\Gamma_0 = S_t$ и рассмотренными в п. 1-2 считаются равномерно ограниченными по $t \in [0, T]$. Для краткости такое семейство областей будем называть *гладким*.

Если функция $u(x)$ задана в области G_t, то её можно продолжить на всю область G с сохранением гладкости, причем оператор продолжения R_t можно выбрать так, чтобы он был линейным ограниченным оператором, действующим из $C_N(G_t)$ в $C_N(G)$. Этот оператор будет ограниченным оператором из любых пространств $C_l(G_t)$, $W_2^l(G_t)$, $0 \leqslant l \leqslant N$, соответственно в пространства $C_l(G)$, $W_2^{(l)}(G)$.

Мы предполагаем, что для достаточно большого N существуют линейные операторы продолжения R_t равномерно ограниченные во всех пространствах C_l и W_2^l:

$$\|R_t u\|_{C_l(G)} \leqslant \sigma\|u\|_{C_l(G)} \quad (0 \leqslant l \leqslant N,\ 0 \leqslant t \leqslant T) \tag{3.2}$$

и

$$\|R_t u\|_{W_2^l(G)} \leqslant \sigma\|u\|_{W_2^l(G_t)} \quad (0 \leqslant l \leqslant N,\ 0 \leqslant t \leqslant T). \tag{3.3}$$

В дальнейшем применяется сокращенное обозначение $R_t u = u_t$ функция $u_t(x)$ определена во всей области G.

4. Эллиптическая задача в гладком семействе областей; гладкие решения. Пусть в G определен равномерно эллиптический оператор порядка $2m$ $(\leqslant N)$

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u$$

с достаточно гладкими коэффициентами и система операторов

$$B_j u = \sum_{|\beta| \leqslant m_j} b_\beta^j D^\beta u$$

порядков m_j. Коэффициенты операторов B_j для упрощения дальнейших формул предполагаются постоянными.

При каждом $t \in [0, T]$ рассмотрим в области G_t краевую задачу

$$Lu = f, \quad x \in G_t \tag{4.1}$$

и

$$B_j u = \varphi_j \quad \text{на } S_t \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{4.2}$$

где f — функция, заданная в области G, а φ_j — функции, определенные на S_t.

Предполагается, что в области G_t оператор L правильно эллиптичен, операторы L и B_j удовлетворяют условиям накрывания Шапиро-Лопатинского, операторы B_j образуют нормальную систему. Как известно (см. [1]), при этих условиях и при определенной гладкости функций φ_j задача (4.1), (4.2) нормально разрешима в пространствах $C_{2m+l}(G_t)$ и $W_2^{2m+l}(G_t)$. Если, кроме того, предположить, что она однозначно разрешима, то справедливы неравенства

$$\|u\|_{C_{2m+l}(G)} \leqslant C\Big(\|f\|_{C_l(G_t)} + \sum_j \|\varphi_j\|_{C_{2m+l-m_j}(G)}\Big), \quad l > 0 \text{ и нецелое}, \tag{4.3}$$

$$\|u\|_{W_2^{l+2m}(G)} \leqslant C\Big(\|f\|_{W_2^l(G_t)} + \sum_j \|\varphi_j\|_{W_2^{2m+l-m_j}(G)}\Big), \quad l \geqslant 0. \tag{4.4}$$

Предполагается, что операторы L, B_j и области G_t таковы, что константа C в неравенствах (4.3) и (4.4) может быть выбрана независимо от $t \in [0, T]$.

Лемма 7. *Пусть* $f \in C_l(G)$ *при некотором* $l > 1$ *и* $u(t, x)$ *решение задачи* (4.1), (4.2) *с однородными граничными условиями*

$$B_j u = 0 \quad \text{на } S_t \quad (j = 1, 2, \ldots, m); \tag{4.5}$$

тогда функция $u_t(t, x)$ *вместе со своими производными по* x *до порядка* $2m$ *непрерывно дифференцируема по* t *в области* G_t *и её производная* $D_t u_t(t, x) \equiv v(t, x)$ *является в* G_t *решением задачи*

$$Lv = 0 \quad \text{в } G_t \tag{4.6}$$

и

$$B_j v = -\zeta D_n B_j u \quad \text{на } S_t \tag{4.7}$$

(n — *направление внутренней нормали*).

Доказательство. Составим разностное отношение

$$\frac{\Delta u_t}{\Delta t} = \frac{u_{t+\Delta t}(t+\Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t}.$$

Очевидно в G_t

$$L\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right) = \frac{1}{\Delta_t}\left(L(u_{t+\Delta t}) - f\right) = F_{\Delta t} \tag{4.8}$$

и так как $u_{t+\Delta t} \in C_{2m+l}(G)$ и $f \in C_l(G)$, то $F_{\Delta t} \in C_l(G)$. Далее, в G_t

$$F_{\Delta t}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \overline{G_t \cap G_{t+\Delta t}}, \\ \dfrac{1}{\Delta t}\left(L(u_{t+\Delta t}) - f\right), & x \in \delta G^+. \end{cases}$$

Из этого следует, что функция $F_{\Delta t}$ вместе с производными до порядка $[l]$ обращается в нуль на $\Gamma_\delta^+ = S_{t+\Delta t}^+$, поэтому, в силу леммы 4 и неравенства коэрцитивности (4.3)

$$\|F_{\Delta t}\|_{C_{l-1}(G_t)} \leqslant C\|L(u_{t+\Delta t}) - f\|_{C_l(\delta G^+)} \leqslant \tag{4.9}$$
$$\leqslant C\{\|u_{t+\Delta t}\|_{C_{2m+l}(G)} + \|f\|_{C_l(G)}\} \leqslant C\|f\|_{C_l(G)}.$$

Очевидно, что $F_{\Delta t}(x) \to 0$ при $\Delta t \to 0$ для любого $x \in G$. Если $0 < \alpha < l-1$, то, в силу компактности вложения $C_{l-1}(G_t)$ в $C_\alpha(G_t)$

$$\|F_{\Delta t}\|_{C_\alpha(G_t)} \to 0.$$

В любой точке s границы S_t вычисляем

$$B_j\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right) = \frac{1}{\Delta t} B_j(u_{t+\Delta t}) = -\frac{A_{\Delta t} B_j U_{t+\Delta t}}{\varkappa(s; t, \Delta t)} \cdot \frac{\varkappa(s; t, \Delta t)}{\Delta t} \tag{4.10}$$

(определение $A_{\Delta t}$ см. в (1.4)). При этом мы воспользовались тем, что функция $U_{t+\Delta t}$ удовлетворяет однородным граничным условиям на $S_{t+\Delta t}$.

Из последнего тождества и неравенств (1.7), (3.2) и (4.3) следует оценка

$$\left\|B_j\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right)\right\|_{C_{2m+l-m_j-1}(G_t)} \leqslant C\|u_{t+\Delta t}\|_{C_{2m+l}(G)} \leqslant C\|f\|_{C_l(G)}. \tag{4.11}$$

Используя (4.9) и (4.11), из неравенства коэрцитивности (4.3) получаем (с заменой l на $l-1$)

$$\left\|\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right\|_{C_{2m+l-1}(G_t)} \leqslant C\|f\|_{C_l(G)}.$$

Благодаря компактности вложения $C_{2m+l-1}(G_t)$ в $C_{2m+\alpha}(G_t)$ $0 < \alpha < l-1$, можно выбрать подпоследовательность $\Delta_n t \to 0$ так, чтобы функции $\Delta u_t / \Delta_n t$ сходились в $C_{2m+\alpha}(G_t)$ к пределу, который мы обозначим через $v(t, x)$. Из (4.8) немедленно вытекает, что $Lv = 0$. Далее, переходя к пределу в (4.10) при $\Delta t = \Delta_n t \to 0$ получаем граничное условие (4.7). Из единственности решения задачи (4.1), (4.2) следует, что в пространстве $C_{2m+\alpha}(G_t)$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u_t}{\Delta t} = v.$$

Лемма доказана.

Замечание. Мы доказали существование производной по t от $u_t(t, x)$, как абстрактной функции со значениями в $C_{2m+\alpha}(G_t)$ $(0 < \alpha < l-1)$, при этом производная $v(t, x)$ не зависит от способа продолжения $u(t, x)$ в область G.

5. Эллиптические задачи в L_2; основные результаты. Подпространство пространства $W_2^{2m}(G_t)$, состоящее из функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям (4.5), обозначим через $W_{2,\text{гр}}^{2m}(G_t)$, а его замыкание в нормах $W_2^l(G_t)$ при $0 < l < 2m$ через $W_{2,\text{гр}}^l(G_t)$. Аналогично вводятся пространства $W_{2,\text{гр}*}^l(G_t)$, соответствующие сопряженным к (4.2) условиям. Наконец, пространство сопряженное к $W_{2,\text{гр}*}^l(G_t)$ в смысле обычного скалярного произведения обозначается через $W_{2,\text{гр}}^{-l}(G_t)$ (см. [2]).

Сформулируем одно из утверждений теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическим оператором, установленной Ройтбергом [11] (см. [2]); справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_2^{2m-k}(G_t)} \leqslant C\left\{\|Lu\|_{W_{2,\text{гр}}^{-k}(G_t)} + \sum_j \|B_j u\|_{W_2^{2m-m_j-K-1/2}(S_t)}\right\} \tag{5.1}$$

при условии, что $2m - m_j - k - \frac{1}{2} > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Лемма 8. *Если* $\max m_j \leqslant 2m-2$, *то все функции из* $W_{2,\text{гр}*}^{2m}(G_t)$ *равны нулю на границе* S_t.

Эта простая лемма, полученная в [6], здесь приводится без доказательства.

Из теорем вложения следует, что в условиях леммы 8 следы всех функций из $W^l_{2,\text{гр}*}(G_t)$, $l \geqslant 1$, на границе S_t равны нулю. Это, в частности, означает, что совокупность сужений на δG^+ всех функций из $W^l_{2,\text{гр}*}(G_t)$, $1 \leqslant l \leqslant \frac{3}{2}$, совпадает с пространством $\tilde{W}^l_2(\delta G^+)$, или является его подпространством, при этом

(5.2) $$\|\varphi\|_{W^l_2(\delta G^+)} \leqslant \|\varphi\|_{W^l_{1,\text{гр}*}(G_t)}.$$

Двойственное соотношение будет следующее:

(5.3) $$\|\psi\|_{W^{-l}_{2,\text{гр}}(G_t)} \leqslant \|\psi\|_{\tilde{W}^{-l}_2(\delta G^+)}.$$

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(G)$ и пусть $u(t,x)$ — решение задачи* (4.1), (4.5). *Если* $\max m_j \leqslant 2m-2$, *то функция $u_t(t,x)$ дифференцируема по t как абстрактная функция со значениями в $W_2^{2m-1'}(G_t)$ и её производная $v \in W_2^{2m-1}(G_t)$ является в G_t решением задачи* (4.6), (4.7).

Доказательство. Рассуждаем так же, как и при доказательстве леммы 7. Функция $F_{\Delta t}$ теперь принадлежит $L_2(G_t)$, поэтому из неравенств (5.3), (2.4) вытекает, что

$$\|F_{\Delta t}\|_{W^{-1'}_{2,\text{гр}}(G_t)} \leqslant \|F_{\Delta t}\|_{\tilde{W}_2^{-1}(\delta G^+)} \leqslant C\|L(u_{t+\Delta t})-f\|_{L_2(\delta G^+)}$$

и в силу неравенства коэрцитивности (4.4) при $l=0$

(5.4) $$\|F_{\Delta t}\|_{W^{-1'}_{2,\text{гр}}(G_t)} \leqslant C\|f\|_{L_2(G)}.$$

Далее, по лемме 2

(5.5) $$\left\|B_j\left(\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right)\right\|_{W_2^{2m-m_j-1/2-1'}(S_t)} \leqslant C\|B_j(u_{t+\Delta t})\|_{W_2^{2m-m_j}(G)} \leqslant$$
$$\leqslant C\|u_{t+\Delta t}\|_{W_2^{2m}(G)} \leqslant C\|f\|_{L_2(G)}.$$

Применим теперь к функции $\Delta u_t/\Delta t$ неравенство (5.1) при $k=1'$. Из (5.4) и (5.5) тогда получим

(5.6) $$\left\|\frac{\Delta u_t}{\Delta t}\right\|_{W_2^{2m-1'}(G_t)} \leqslant C\|f\|_{L_2(G)}.$$

В силу упоминавшейся уже теоремы о гомеоморфизмах, при $u \in W_2^{2m}(G)$ существует единственное обобщенное решение v задачи (4.6), (4.7), принадлежащее $W_2^{2m-1}(G_t)$, причем

(5.7) $$\|v\|_{W_2^{2m-1}(G_t)} \leqslant C\sum\|\zeta D_n B_j u\|_{W_2^{2m-m_j-3/2}(S_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C\|u\|_{W_2^{2m}(G_t)} \leqslant C\|f\|_{L_2(G)}.$$

Аппроксимируем теперь функцию f в $L_2(G)$ последовательностью функций $f^{(n)} \in C_l(G)$, $l>1$. Соответствующие решения задач (4.1), (4.5) и (4.6), (4.7) обозначим через $u^{(n)}$ и $v^{(n)}$. Тогда, в силу неравенств (5.6) и (5.7), примененных к функциям $u-u^{(n)}$ и $v-v^{(n)}$

$$\left\|v-\frac{\Delta u}{\Delta t}\right\|_{W_2^{2m-1'}(G_t)} \leqslant$$
$$\leqslant \|v-v^{(n)}\|_{W_2^{2m-1}(G_t)} + \left\|v^{(n)}-\frac{\Delta u^{(n)}}{\Delta t}\right\|_{W_2^{2m-1}(G_t)} + \left\|\frac{\Delta(u-u^{(n)})}{\Delta t}\right\|_{W_2^{2m-1'}(G_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|f-f^{(n)}\|_{L_2(G)} + \left\|v^{(n)}-\frac{\Delta u^{(n)}}{\Delta t}\right\|_{C^{2m}(G_t)}\right).$$

По лемме 7 и построению последовательности $f^{(n)}$

$$\left\|v-\frac{\Delta u}{\Delta t}\right\|_{W_2^{2m-1'}(G_t)} \to 0 \quad \text{при } \Delta t \to 0.$$

Теорема доказана.

При фиксированных t и Δt выражение Δu_t можно рассматривать как результат действия линейного оператора на функцию f:

$$\Delta u_t = P_t(R_{t+\Delta t}L^{-1}_{t+\Delta t} - R_t L_t^{-1})f,$$

где R_t — оператор продолжения функции из области G_t в область G, P_t — оператор сужения из G в G_t, L_t^{-1} — оператор, строящий по функции $f(x)$ решение $u(t,x)$ задачи (4.1), (4.5) в G_t. Из неравенства (5.6) вытекает, что Δu_t как оператор из $L_2(G)$ в $W_2^{2m-1'}(G_t)$ имеет норму порядка не ниже Δt

(5.8) $$\|\Delta u_t\|_{W_2^{2m-1'}(G_t)} \leqslant C|\Delta t|\,\|f\|_{L_2(G)}.$$

С другой стороны, этот оператор ограничен как оператор из $L_2(G)$ в $W_2^{2m}(G)$:

(5.9) $$\|\Delta u_t\|_{W_2^{2m}(G_t)} \leqslant \|(R_{t+\Delta t}L^{-1}_{t+\Delta t} - R_t L_t^{-1})f\|_{W_2^{2m}(G)} \leqslant$$
$$\leqslant \sigma\|u_{t+\Delta t}\|_{W_2^{2m}(G_{t+\Delta t})} + \sigma\|u_t\|_{W_2^{2m}(G_t)} \leqslant C\|f\|_{L_2(G)}.$$

Применение интерполяционной теоремы к неравенствам (5.8) и (5.9) приводит к следующему утверждению:

Следствие 6. *При $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ справедливо неравенство*

(5.10) $$\|\Delta u_t\|_{W_2^{2m-\gamma'}(G_t)} \leqslant C|\Delta t|^\gamma\|f\|_{L_2(G)}.$$

Теорема 1 допускает дальнейшее развитие. Предварительно заметим, что каждая функция из $\tilde{W}_2^1(\delta G^+)$ может быть продолжена до функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G_t) = W^1_{2,\text{гр}*}(G_t)$. Предположим, что операторы продолжения $Q_t^{\Delta t}$ ограничены равномерно по t и Δt. Тогда справедливо неравенство

$$\|Q_t^{\Delta t}\varphi\|_{W^1_{2,\text{гр}*}(G_t)} \leqslant \|\varphi\|_{\tilde{W}_2^1(\delta G^+)}.$$

Получим из него двойственное неравенство. Пусть функция $\psi \in W^{-1}_{2,\text{гр}}(G_t)$ и равна нулю в $G_t \cap G_{t+\Delta t}$. Тогда при $\varphi \in \tilde{W}_2^1(\delta G^+)$

$$\Big|\int_{\delta G^+}\varphi\psi dx\Big| = \Big|\int_{G_t} Q_t^{\Delta t}\varphi\psi\, dx\Big| \leqslant \|\psi\|_{\tilde{W}^{-1}_{2,\text{гр}}(G_t)}\|Q_t^{\Delta t}\varphi\|_{W^1_{2,\text{гр}*}(G_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C\|\psi\|_{W^{-1}_{2,\text{гр}}(G_t)}\|\varphi\|_{\tilde{W}_2^1(\delta G^+)},$$

откуда следует неравенство

(5.11) $$\|\psi\|_{\tilde{W}_2^{-1}(\delta G^+)} \leqslant C\|\psi\|_{W^{-1}_{2,\text{гр}}(G_t)}$$

в известном смысле обратное к (5.3) при $l = 1$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1, $v_t(t, x)$ как абстрактная функция от t со значениями в пространстве $W_2^{2m-1-\gamma'}(G_t)$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2})$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем γ, т.е.*

(5.12) $$\|\Delta v_t\|_{W_2^{2m-1-\gamma'}(G_t)} \leqslant C|\Delta t|^\gamma\|f\|_{L_2(G)}.$$

Доказательство. К функции Δv_t применим неравенство (5.1) с $k = 1+\gamma'$

(5.13) $$\|\Delta v_t\|_{W_2^{2m-1-\gamma'}(G_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C\Big\{\|L(\Delta v_t)\|_{W^{-1-\gamma'}_{2,\text{гр}}(G_t)} + \sum_j \|B_j(\Delta v_t)\|_{W_2^{2m-m_j-3/2-\gamma'}(G_t)}\Big\}.$$

Из неравенств (5.3) (при $l = 1+\gamma'$), (2.7) и (5.11) следует:

(5.14) $$\|L(\Delta v_t)\|_{W^{-1-\gamma'}_{2,\text{гр}}(G_t)} \leqslant \|L(v_{t+\Delta t})\|_{\tilde{W}_2^{-1-\gamma'}(\delta G^+)} \leqslant$$
$$\leqslant C|\Delta t|^\gamma\|L(v_{t+\Delta t})\|_{\tilde{W}_2^{-1}(\delta G^+)} \leqslant C|\Delta t|^\gamma\|L(v_{t+\Delta t})\|_{W^{-1}_{2,\text{гр}}(G_t)}.$$

Пользуясь леммой 8, интегрированием по частям показываем, что

$$\|L(\Delta v_{t+\Delta t})\|_{W^{-1}_{2,\text{гр}}(G_t)} \leqslant C\|v_{t+\Delta t}\|_{W_2^{2m-1}(G_t)}.$$

Тогда из (5.14) и неравенства типа (5.7) для функции $v_{t+\Delta t}$ вытекает, что

(5.15) $$\|L(\Delta v_t)\|_{W^{-1-\gamma'}_{2,2p}(G_t)} \leqslant C|\Delta t|^\gamma\|f\|_{L_2(G)}.$$

Перейдем к оценке граничных норм в (5.13). Имеем

$$B_j(\Delta v_t)(s) = -A_{\Delta t}B_j(v_{t+\Delta t}) - A_{\Delta t}(\zeta_t D_n B_j u) - \zeta(t, \tilde{s})D_n B_j(\Delta u_t)(\tilde{s}) +$$
$$+\zeta(t+\Delta t, \tilde{s})D_{\tilde{n}}B_j u_{t+\Delta t}(\tilde{s}) - \zeta(t, \tilde{s})D_n B_j u_{t+\Delta t}(\tilde{s}),$$

где $D_{\tilde{n}}$ — производная по нормали к поверхности $S_{t+\Delta t}$ в точке $\tilde{s} = (s, \varkappa(s; t, \Delta t)) \in S_{t+\Delta t}$, а $\zeta(t, \tilde{s})$ — значение какого-либо гладкого продолжения функции $\zeta(t, s)$ с множества $S_t\times[0, T]$ на множество $G\times[0, T]$. Первые два слагаемых справа оцениваем по лемме 3, теоремам вложения, неравенству коэрцитивности и неравенству типа (5.7):

(5.16) $$\|A_{\Delta t}B_j(v_{t+\Delta t})\|_{W_2^{2m-m_j-3/2-\gamma'}(S_t)} \leqslant C|\Delta t|^\gamma\|B_j(v_{t+\Delta t})\|_{W_2^{2m-m_j-3/2}(S_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C|\Delta t|^\gamma\|v_{t+\Delta t}\|_{W_2^{2m-1}(G)} \leqslant C|\Delta t|^\gamma\|f\|_{L_2(G)},$$

(5.17) $$\|A_{\Delta t}(\zeta D_n B_j u)\|_{W_2^{2m-m_j-3/2-\gamma'}(S_t)} \leqslant C|\Delta t|^\gamma\|\zeta D_n B_j u\|_{W_2^{2m-m_j-3/2}(S_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C|\Delta t|^\gamma\|u\|_{W_2^{2m}(G)} \leqslant C|\Delta t|^\gamma\|f\|_{L_2(G)}.$$

Для оценки третьего слагаемого придется воспользоваться следствием 6 из теоремы 1. Имеем

(5.18) $$\|\zeta D_n B_j(\Delta u_t)\|_{W_2^{2m-m_j-3/2-\gamma'}(S_t)} \leqslant C|\Delta u_t|_{W_2^{2m-\gamma'}(G_t)} \leqslant C|\Delta t|^\gamma\|f\|_{L_2(G)}.$$

Наконец, последняя разность будет по норме в $W_2^{2m-m_j-3/2-\gamma'}(S_t)$ оцениваться величиной порядка $O(|\Delta t|)\|u_{t+\Delta t}\|_{W_2^{2m}(G)} \leqslant O(|\Delta t|)\|f\|_{L_2(G)}$. Объединяя этот факт с (5.15)-(5.18) и (5.13), получаем неравенство (5.12).

Теорема доказана.

6. Заключительные замечания. Возможно, что наличие ε в формулировках теорем 1 и 2 вызвано методом доказательства и они справедливы при $\varepsilon = 0$.

При получении основных оценок мы пользовались интерполяционной теоремой для гильбертовых шкал пространств W_2^l, теоремами вложения, теоремами о следах и теоремами о гомеоморфизмах. Весь этот аппарат разработан и в рамках L_p — теории (см. [9] и [10]), поэтому теоремы 1 и 2 могут быть соответственно обобщены.

Изложенная в статье методика позволяет исследовать вопрос о существовании производной по параметру t для решений более общих граничных задач, в которых коэффициенты оператора L и граничных операторов B_j являются достаточно гладкими функциями от t и x.

Для нас существенным являлось условие $\max m_j \leqslant 2m-2$. Как показывают простейшие примеры, при нарушении этого ограничения производная $D_t u_t$ может существовать лишь как обобщенная функция. Нам кажется интересным исследование до конца возникающей здесь ситуации.

Важным было ы также рассмотрение поведения решений эллиптических задач в условиях их нормальной разрешимости, а не единственности.

Автор выражает искреннюю благодарность Г. И. Лаптеву, в беседах с которым возникли постановки изученных в статье задач и Я. А. Ройтбергу за помощь и критические замечания.

Цитированная литература

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I*, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), стр. 623-727.

[2] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Киев 1965.

[3] T. Kato and H. Tanabe, *On the abstract evolution equation*, Osaka Math. J. 14 (1962), стр. 107-133.

[4] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Москва 1967.

[5] — *Об одной интерполяционной теореме в теории операторов*, ДАН СССР 130 (1960), стр. 491-494.

[6] — и Г. И. Лаптев, *Абстрактная схема рассмотрения параболических задач в нецилиндрических областях* (в печати).

[7] — и Ю. И. Петунин, *Шкалы банаховых пространств*, Успехи мат. наук 21 (1966), стр. 89-168.

[8] J. L. Lions, *Espaces intermédiares entre espaces hilbertiens et applications*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. Roumanie 50 (1958), стр. 419-432.

[9] E. Magenes, *Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali*, Roma 1964. (Русский перевод: Успехи мат. наук 21 (1966), стр. 169-218).

[10] Я. А. Ройтберг, *Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами и локальное повышение гладкости обобщенных решений*, Укр. мат. ж. 5 (1965), стр. 122-129.

[11] — *Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений*, ДАН СССР 157 (1964), стр. 798-801.

[12] H. Tanabe, *Evolutional equations of parabolic type*, Proc. Japan Acad. 37, 10 (1961), стр. 610-613.

Reçu par la Rédaction le 11. 4. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

A uniform boundedness theorem and mappings into spaces of operators

by

VLASTIMIL PTÁK (Praha)

Dedicated to Professor
Władysław Orlicz
on the occasion of the 40th anniversary
of his scientific research

In a recent paper [1] B. E. Johnson proved the remarkable fact that every strictly irreducible representation of a Banach algebra is continuous. In the present note we use a similar argument to prove a certain modification of the classical uniform boundedness principle; this simple result (theorem (2.2) of the present note) is interesting in its own right and turns out to be the basis of theorems concerning the behaviour of algebraic homomorphisms of Banach spaces into spaces of linear operators. Indeed, if A is a Banach space, Y and X two normed spaces and T an algebraic homomorphism of A into $L(Y, X)$, then the modification of the uniform boundedness theorem mentioned above may be used to show that T is continuous provided it satisfies some surprisingly weak conditions (theorem (2.5) of the present note). These conditions being automatically satisfied if A is a Banach algebra and T a strictly irreducible representation thereof, this result constitutes a slight generalization of Johnson's theorem. At the same time it puts into evidence the way in which use is made of the assumption that A is a Banach algebra.

1. Preliminaries. In this section we intend to collect some simple propositions which will be needed in the sequel. We begin by listing several simple facts concerning rare and meagre sets in topological spaces.

(1.1) *Let T be a topological space and H a subset of T. Then*

1° *if $A \subset H$ and A is rare* (*meagre*) *in H, then A is rare* (*meagre*) *in T as well;*