[12] Б. В. Хведелидзе, *Граничная задача Римана-Привалова с кусочно-непрерывными коэффициентами*, Труды грузинского политехн. инст. 1 (81) (1962), стр. 11-29.

[13] — *Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения*, Труды Тбилисского мат. инст. 23 (1956).

[14] Е. Шамир, *Решение систем Римана-Гильберта с кусочно-непрерывными коэффициентами*, ДАН СССР 167, № 5 (1960), стр. 1000-1003.

[15] И. Ц. Гохберг и Н. Я. Крупник, *О норме преобразования Гильберта в пространстве L_p*, Функциональный анализ и его приложения 2, вып. 2 (1968), стр. 91-92.

Reçu par la Rédaction le 19. 3. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Sur une définition de la dérivée

par

T. LEŻAŃSKI (Warszawa)

Introduction. On considère dans ce travail une famille H_t d'espaces de Hilbert et une famille $S_{t,s}$ d'opérations linéaires non bornées transformant H_t en H_s. Si $x(t)$ est une fonction abstraite, $x(t) \in H_t$, on définit une espèce de dérivée semblable à celle de Lie, en posant

$$\frac{D}{Dt}x(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[S_{t+\varepsilon,t}x(t+\varepsilon) - x(t)].$$

Alors, on trouve dans ce travail les conditions suffisantes pour que les équations

$$\frac{D}{Dt}x(t) = y(t), \quad x(0) = a,$$

ou bien l'équation perturbée

$$\frac{D}{Dt}x(t) = y(t) + B_t(x(t)), \quad x(0) = a,$$

aient des solutions généralisées. Enfin, on donne une application à la théorie des équations différentielles.

Définitions et hypothèses. Faisons correspondre à chaque nombre t $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$ un espace réel de Hilbert H_t, avec le produit scalaire $(x, y)_t$. Soit M_t un sous-ensemble linéaire dense dans H_t et $S_{t,s}$ une opération linéaire (en général non bornée) définie sur M_t et à valeurs dans H_s, admettant une opération adjointe $S^*_{t,s}$ définie au moins sur M_s et à valeurs dans H_t. Définissons une *fonction abstraite* comme une fonction qui fait correspondre à tout nombre t $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$ un élément $x(t) \in H_t$. Soient enfin $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux ensembles linéaires de fonctions abstraites. Admettons les hypothèses suivantes:

(A) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$; si $x(\cdot) \in \mathfrak{N}$, alors $x(t) \in M_t$ et la fonction réelle: $\|x(t)\|_t \in C_{0,1}$.

(B) $\mathfrak{M}$ est dense dans $\mathfrak{N}$ au sens de la norme (1):

$$\|x(\cdot)\|^2 = \int_0^\tau \|x(t)\|_t^2\, dt. \tag{1}$$

(C) Pour $x(\cdot), y(\cdot) \in \mathfrak{M}$ les limites suivantes existent:

$$\frac{D}{Dt}x(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[S_{t+\varepsilon,t}x(t+\varepsilon)-x(t)], \tag{2}$$

$$\frac{D^*}{Dt}y(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[y(t)-S^*_{t,t-\varepsilon}y(t-\varepsilon)] \tag{3}$$

au sens fort (c'est-à-dire en norme $\|\ \|_t$; les seconds membres de (2) et (3) sont des éléments de M_t) et appartiennent à l'ensemble $\mathfrak{N}$, comme fonctions abstraites.

(D_1) Si $x(\cdot)\in\mathfrak{M}$ et la fonction réelle $f\in C_{1,1}$ et si $z(t)=f(t)x(t)$, alors $z(\cdot)\in\mathfrak{M}$.

(D_2) Pour tout $a\in M_t$ il existe un $x(\cdot)\in\mathfrak{M}$ tel que $x(t)=a$, $0\leqslant t\leqslant\tau$.

(E) Il existent des fonctions réelles $f(t,\varepsilon)$ et $g(t,\varepsilon)$ de classe $C_{1,1}$ sur $\langle 0,\tau\rangle$, telles que $f(t,0)=g(t,0)=0$ et que pour $x\in M_{t+\varepsilon}$, $y\in M_{t-\varepsilon}$ et $\varepsilon>0$ assez petit on a:

$$\|S_{t+\varepsilon,t}x\|_t \geqslant \big(1-f(t,\varepsilon)\big)\|x\|_{t+\varepsilon}, \tag{4}$$

$$\|S^*_{t,t-\varepsilon}y\|_t \geqslant \big(1-g(t,\varepsilon)\big)\|y\|_{t-\varepsilon}. \tag{5}$$

(F) Si $y(\cdot)\in\mathfrak{M}$, la fonction réelle

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}[y(s)-S^*_{s,s-\varepsilon}y(s-\varepsilon)]\right\|_s$$

est continue par rapport aux variables s et ε au point $(t,0)$.

LEMME 1. *Pour $x(\cdot), y(\cdot)\in M$ on a*

$$\frac{d}{dt}\big(x(t),y(t)\big)_t = \left(\frac{D}{Dt}x(t),y(t)\right)_t + \left(\frac{D^*}{Dt}y(t),x(t)\right)_t. \tag{6}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}&\big[\big(x(t+\varepsilon),y(t+\varepsilon)\big)_{t+\varepsilon}-\big(x(t),y(t)\big)_t\big]\\
&=\left(x(t+\varepsilon),\frac{1}{\varepsilon}[y(t+\varepsilon)-S^*_{t+\varepsilon,t}y(t)]\right)_{t+\varepsilon}+\\
&\qquad+\left(\frac{1}{\varepsilon}[S_{t+\varepsilon,t}x(t+\varepsilon)-x(t)],y(t)\right)_t\\
&=\left(x(t),\frac{1}{\varepsilon}[y(t)-S^*_{t,t-\varepsilon}y(t-\varepsilon)\right)_t+\\
&\qquad+\left(\frac{1}{\varepsilon}[S_{t+\varepsilon,t}x(t+\varepsilon)-x(t)),y(t)\right)_t+\\
&\qquad+\left[\left(x(t+\varepsilon),\frac{1}{\varepsilon}[y(t+\varepsilon)-S^*_{t+\varepsilon,t}y(t)]\right)_{t+\varepsilon}-\right.\\
&\qquad\left.-\left(x(t),\frac{1}{\varepsilon}[y(t)-S^*_{t,t-\varepsilon}y(t-\varepsilon)]\right)_t\right].
\end{aligned}$$

Or, en vertu des hypothèses (F), (A) et (C), le dernier terme converge vers zéro, si $\varepsilon\to 0$, tandis que les deux premiers tendent vers

$$\left(x(t),\frac{D^*}{Dt}y(t)\right)_t,\qquad \left(\frac{D}{Dt}x(t),y(t)\right)_t \text{ resp.},$$

en vertu de l'hypothèse (C), ce qui achève la démonstration.

Soient $f(t,\varepsilon)$ et $g(t,\varepsilon)$ les fonctions figurant dans l'énoncé de l'hypothèse (E); posons:

$$\lambda(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}f(t,\varepsilon),\qquad \mu(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}g(t,\varepsilon), \tag{7}$$

$$a(t)=\int_0^t\lambda(s)\,ds,\qquad \gamma(t)=\int_t^\tau\mu(s)\,ds. \tag{8}$$

LEMME 2. *Pour $x(\cdot), y(\cdot)\in M$ on a les inégalités suivantes:*

$$\|x(t)\|_t\leqslant e^{a(t)}\left\{\|x(0)\|_0+\int_0^t e^{-a(s)}\left\|\frac{D}{Ds}x(s)\right\|_s ds\right\}, \tag{9}$$

$$\|y(t)\|_t\leqslant e^{\gamma(t)}\left\{\|y(\tau)\|_\tau+\int_t^\tau e^{-\gamma(s)}\left\|\frac{D^*}{Ds}y(s)\right\|_s ds\right\}. \tag{10}$$

Démonstration. En vertu de l'hypothèse (A) la fonction $\|x(t)\|_t$ satisfait à la condition de Lipschitz; alors la fonction $u(t)=e^{a(t)}\|x(t)\|_t$ admet une dérivée presque partout dans $\langle 0,\tau\rangle$, c'est-à-dire les quatre nombres dérivés de Dini sont égaux deux à deux presque partout dans $\langle 0,\tau\rangle$. Considérons $D^+u(t)$; on a, en vertu de l'hypothèse (E), (4),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}[u(t+\varepsilon)-u(t)]&\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\big[e^{-a(t+\varepsilon)}\big(1-f(t,\varepsilon)\big)^{-1}-e^{-a(t)}\big]\|x(t)\|_t+\\
&\qquad+e^{-a(t+\varepsilon)}\big(1-f(t,\varepsilon)\big)^{-1}\left\|\frac{1}{\varepsilon}[S_{t+\varepsilon,t}x(t+\varepsilon)-x(t)]\right\|_t.
\end{aligned}$$

En passant à la limite avec $\varepsilon\to 0$, on en obtient

$$D^+\big(e^{-a(t)}\|x(t)\|_t\big)=D^+u(t)\leqslant e^{-a(t)}\left\|\frac{D}{Dt}x(t)\right\|_t,$$

presque partout dans $\langle 0,\tau\rangle$, d'où l'on tire l'inégalité demandée (9), en se servant d'un théorème connu sur la dérivée (v. [3], p. 73, Théorème 3).

Pour établir (10), posons:

$$\eta(t) = \|y(\tau-t)\|_{\tau-t}, \qquad b(t) = \left\| \frac{D^*}{Dt} y(t) \right\|_t, \qquad c(t) = b(\tau-t),$$

$$\varkappa(t) = \mu(\tau-t), \qquad \beta(t) = \int_0^\tau \varkappa(s)\,ds, \qquad \gamma(t) = \int_t^\tau \mu(s)\,ds.$$

En partant de l'hypothèse (E), de l'inégalité (5) et en procédant comme dans la démonstration de (9), on arrive à l'inégalité

$$\eta(t) \leqslant e^{\beta(t)} \Big[\eta(0) + \int_0^t e^{-\beta(s)} c(s)\,ds\Big],$$

d'où, par un calcul facil. on obtient (10), c. q. f. d.

Les fonctions $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$ étant continues et bornées dans $\langle 0, \tau\rangle$, il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles qu'on a, d'après (9) et (10),

$$\|x(t)\|_t \leqslant C_1 \Big\{ \|x(0)\|_0^2 + \int_0^\tau \left\| \frac{D}{Ds} x(s) \right\|_s^2 ds \Big\}^{1/2}, \tag{11}$$

$$\|y(t)\|_t \leqslant C_2 \Big\{ \|y(\tau)\|_\tau^2 + \int_0^\tau \left\| \frac{D^*}{Ds} y(s) \right\|_s^2 ds \Big\}^{1/2}. \tag{12}$$

Définissons l'espace $\mathscr{H}$ comme le complément de l'ensemble $\mathfrak{M}$ en norme $\|x(\cdot)\|$, définie par (2). Soit $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H} \times H_0$ avec le produit scalaire

$$\big(\langle x(\cdot); a\rangle, \langle y(\cdot); b\rangle\big)_1 = \int_0^\tau \big(x(t), y(t)\big)_t dt + (a, b)_0. \tag{13}$$

Définissons deux sous-ensembles $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{K}$ de $\mathscr{H}_1$: $\mathfrak{Z}$ — l'ensemble des couples $\langle x(\cdot); x(0)\rangle$, où $x(\cdot) \in \mathfrak{M}$; $\mathfrak{K}$ — l'ensemble des couples $\langle y(\cdot); -y(0)\rangle$, où $y(\cdot) \in \mathfrak{M}$ et $y(\tau) = 0$.

LEMME 3. *$\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{K}$ sont denses dans $\mathscr{H}_1$ en norme* (13).

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{K}$ sont denses dans $\mathfrak{M} \times M_0$, ce dernier étant dense dans $\mathscr{H}_1$. Soient alors $z(\cdot) \in \mathfrak{M}$, $a \in M_0$, $\varepsilon > 0$. En vertu de l'hypothèse (D_2) il existe un $y(\cdot) \in \mathfrak{M}$ tel que $y(0) = a$. Les fonctions $\|z(t)\|_t$ et $\|y(t)\|_t$ sont continues (d'après (A)) et, par suite, bornées, soit, par $m > 0$. Il existe une fonction réelle $f(t)$ de classe $C_{1,1}$ telle que

$$f(0) = 1, \qquad \int_0^\tau \big(f(t)\big)^2 dt < \Big(\frac{\varepsilon}{2m}\Big)^2.$$

En vertu de (D_1) la fonction abstraite $x(t) = f(t)y(t) + 1\big(-f(t)\big)z(t)$ est un élément de $\mathfrak{M}$ et on a $x(0) = y(0) = a$ et $\|x(\cdot) - z(\cdot)\| < \varepsilon$ par un calcul facil. Finalement,

$$\|\langle x(\cdot); x(0)\rangle - \langle z(\cdot); a\rangle\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

La démonstration pour $\mathfrak{K}$ est analogue, c. q. f. d.

Définissons sur $\mathfrak{Z}$ l'opération $\mathscr{U}$ comme suit:

$$\mathscr{U}\big(\langle x(\cdot); a\rangle\big) = \mathscr{U}\big(\langle x(\cdot); x(0)\rangle\big) = \Big\langle \frac{D}{Dt} x(\cdot); x(0)\Big\rangle. \tag{14}$$

Ainsi définie, l'opération $\mathscr{U}$ admet une adjointe $\mathscr{U}^*$, définie au moins sur $\mathfrak{K}$ et égale sur $\mathfrak{K}$ à

$$\mathscr{U}^*\big(\langle y(\cdot); b\rangle\big) = \mathscr{U}^*\big(\langle y(\cdot); -y(0)\rangle\big) = \Big\langle -\frac{D^*}{Dt} y(\cdot); 2y(0)\Big\rangle. \tag{15}$$

En effet, soient $\langle x(\cdot); a\rangle \in \mathfrak{Z}$, $\langle y(\cdot); b\rangle \in \mathfrak{K}$, c'est-à-dire $a = x(0)$, $b = -y(0)$, $y(\tau) = 0$. D'après (6), lemme 1, on a

$$\Big(\mathscr{U}\big(\langle x(\cdot); a\rangle\big), \langle y(\cdot); b\rangle\Big)_1 = \int_0^\tau \Big(\frac{D}{Dt} x(t), y(t)\Big)_t + b(a, b)_0$$

$$= -\int_0^\tau \Big(x(t), \frac{D^*}{Dt} y(t)\Big)_t dt - 2\big(x(0), y(0)\big)_0,$$

ce qui prouve (15). Soit pour l'instant $\mathfrak{M}_0$ l'ensemble des fonctions abstraites $y(\cdot) \in \mathfrak{M}$ telles que $y(0) = 0$, $y(\tau) = 0$. On voit aussitôt que $\mathfrak{M}_0$ est dense dans $\mathfrak{M}$ et, par conséquent, aussi dans $\mathscr{H}$. En s'appuyant sur (6), lemme 1, on montre facilement que l'opération D/Dt, définie sur $\mathfrak{M}$, admet une adjointe, définie au moins sur $\mathfrak{M}_0$ et égale sur $\mathfrak{M}_0$ à $-D^*/Dt$. Il en résulte l'existence de la fermeture de D/Dt, que nous désignons par $\mathscr{A} = (D/Dt)^\sim$.

Définissons maintenant $\mathfrak{M}_c$ comme l'ensemble des limites uniformes de $x_n(\cdot) \in \mathfrak{M}$; en d'autres termes, $\mathfrak{M}_c$ est un complément de $\mathfrak{M}$ en norme (16):

$$\|x(\cdot)\|_c = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \tau} \|x(t)\|_t. \tag{16}$$

LEMME 4. *La condition $\langle x(\cdot); a\rangle \in \mathscr{D}(\mathscr{U}^\sim)$ entraîne $x(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}) \cap \mathfrak{M}_c$, $x(0) = a$ et*

$$\mathscr{U}^\sim\big(\langle x(\cdot); a\rangle\big) = \mathscr{U}^\sim\big(\langle x(\cdot); x(0)\rangle\big) = \langle \mathscr{A}x(\cdot); x(0)\rangle.$$

Démonstration. Soient $\langle x(\cdot); a\rangle \in \mathscr{D}(\mathscr{U}^\sim)$ et $\mathscr{U}^\sim\big(\langle x(\cdot); a\rangle\big) = \langle y(\cdot); b\rangle$. On en tire, en tenant compte de la définition de $\mathscr{U}$ et du domaine $\mathscr{D}(\mathscr{U}) = \mathfrak{Z}$ qu'il existe une suite de couples $x_n(\cdot)\in\mathfrak{M}$, $a_n = x_n(0)$ telle que

(a) $$\|x_n(\cdot)-x(\cdot)\| \to 0,$$

(b) $$\|x_n(0)-a\|_0 \to 0,$$

(c) $$\left\|\frac{D}{Dt}x_n(\cdot)-y(\cdot)\right\| \to 0,$$

(d) $$\|x_n(0)-b\|_0 \to 0.$$

En vertu de (c) et (d) les suites $x_n(\cdot)$ et $x_n(0)$ satisfont à la condition de Cauchy:

$$\|x_n(0)-x_p(0)\|_0 \to 0,$$

$$\int_0^\tau \left\|\frac{D}{Dt}x_n(\cdot)-\frac{D}{Dt}x_p(\cdot)\right\|_t^2 = \left\|\frac{D}{Dt}x_n(\cdot)-\frac{D}{Dt}x_p(\cdot)\right\|^2 \to 0 \quad (n, p\to\infty).$$

On en tire, en substituant $x_n(t)-x_p(t)$ au lieu de $x(t)$ dans (11) que $x_n(t)$ remplit la condition de Cauchy uniformément par rapport à t; par conséquent, $x_n(t)$ converge uniformément vers un élément $\bar{x}(\cdot)\in\mathfrak{M}_c$. Comme à plus forte raison $\|x_n(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|\to 0$, on a, en vertu de (a), $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)\in\mathfrak{M}_c$. On tire de (a) et (c) que $x(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$ et $\mathscr{A}x(\cdot) = y(\cdot)$. Enfin, (b) et (a) nous donnent

$$b = a = \lim_{n\to\infty} x_n(0) = \bar{x}(0) = x(0),$$

c. q. f. d.

Définissons l'opération $\mathscr{V}$ comme $\mathscr{U}^*$ restreinte à $\mathfrak{K}$,

$$\mathscr{V}(\langle y(\cdot);\, -y(0)\rangle) = \left\langle -\frac{D}{Dt}y(\cdot);\, 2y(0)\right\rangle,$$

et posons $\mathscr{U}_+ = \mathscr{V}^*$. Comme $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}^*$, on a

$$\mathscr{U}_+ = \mathscr{V}^* \supset \mathscr{U}^{**} = \mathscr{U}^{\sim}, \qquad \mathscr{U}_+^* = \mathscr{V}^{**} = \mathscr{V}^{\sim}.$$

LEMME 5. *Il existe deux constantes positives α et β telles qu'on a, pour $\langle x(\cdot);\, a\rangle\in\mathscr{D}(\mathscr{U}^{\sim})$, $\langle y(\cdot);\, b\rangle\in\mathscr{D}(\mathscr{U}_+^*)$,*

(17) $$\|\mathscr{U}^{\sim}(\langle x(\cdot);\, a\rangle)\|_1 \geqslant \alpha\|\langle x(\cdot);\, a\rangle\|_1,$$

(18) $$\|\mathscr{U}_+^{\sim}(\langle y(\cdot);\, b\rangle)\|_1 \geqslant \beta\|\langle y(\cdot);\, b\rangle\|_1.$$

Démonstration. Intégrons (11) de 0 à τ et ajoutons $\|x(0)\|_0$; nous obtenons ainsi, vu que $a = x(0)$ pour $\langle x(\cdot);\, a\rangle\in\mathfrak{Z} = \mathscr{D}(\mathscr{U})$,

$$\begin{aligned}\|\langle x(\cdot);\, a\rangle\|_1^2 &= \|x(\cdot)\|^2+\|x(0)\|_0^2 \\ &\leqslant (1+\tau C_1^2)\left[\|x(0)\|_0^2+\left\|\frac{D}{Dt}x(\cdot)\right\|^2\right] \\ &= \frac{1}{a}\|\mathscr{U}(\langle x(\cdot);\, a\rangle)\|_1^2,\end{aligned}$$

d'où (17) (si l'on pose $\alpha = (1+\tau C_1^2)^{-1/2}$) d'abord pour $\langle x(\cdot);\, a\rangle\in\mathfrak{K} = \mathscr{D}(\mathscr{U})$. On en obtient (17) pour $\langle x(\cdot);\, a\rangle\in\mathscr{D}(\mathscr{U}^{\sim})$ par un passage à la limite évident.

La démonstration de (18) est analogue et s'appuie sur (12), vu que $\mathscr{U}_+^* = \mathscr{V}^{\sim}$ et (12) équivaut à (18) pour $\langle y(\cdot);\, b\rangle\in\mathscr{D}(\mathscr{V})$, c. q. f. d.

Une conséquence immédiate du lemma 5 est le

THÉORÈME 1. *L'équation $\mathscr{U}^{\sim}(\langle x(\cdot);\, a\rangle) = \langle y(\cdot);\, b\rangle$ resp. $\mathscr{U}_+(\langle x(\cdot);\, a\rangle) = \langle y(\cdot);\, b\rangle$ a au plus (resp. au moins) une solution pour tout $\langle y(\cdot);\, b\rangle\in\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}\times H_0$.*

Démonstration. La première partie de notre conclusion étant évidente en vertu de (17), passons à la seconde; or, l'opération $\mathscr{U}_+\mathscr{U}_+^*$ étant autoadjointe en vertu d'un théorème de v. Neumann ([2], p. 311) et, en vertu de (18), positivement définie, il existe un inverse droit $(\mathscr{U}_+\mathscr{U}_+^*)^{-1}$ satisfaisant à

$$(\mathscr{U}_+\mathscr{U}_+^*)(\mathscr{U}_+\mathscr{U}_+^*)^{-1}(\langle y(\cdot);\, b\rangle) = \langle y(\cdot);\, b\rangle$$

pour tout $\langle y(\cdot);\, b\rangle\in\mathscr{H}_1$. Or, l'opération $\mathscr{U}_+^*(\mathscr{U}_+\mathscr{U}_+^*)^{-1}$ est l'inverse droit de $\mathscr{U}_+$ définie sur $\mathscr{H}_1$ tout entier (et, en outre borné; voir [1], lemme 2.1), c. q. f. d.

L'opération $\mathscr{U}^{\sim}$ (resp. $\mathscr{U}_+$) peut être appelée *prolongement fort* (resp. *faible*) de $\mathscr{U}$. Dans ce qui suit l'énoncé "l'équation $\mathscr{U}(\langle x(\cdot);\, a\rangle) = \langle y(\cdot);\, b\rangle$ a une solution généralisée au sens fort (resp. faible)" veut dire que la conclusion du théorème 1 est vérifiée.

EXEMPLE. Soient H un espace réel de Hilbert avec le produit scalaire (x, y), M — un sous-espace de H, dense dans H. Soit F_t une opération linéairé (en général, non bornée) définie sur M à valeurs dans H, remplissant les conditions suivantes:

$(F_t x, x)\geqslant\gamma(x, x)$ avec un nombre γ fixe;

l'opération F_t^* est définie au moins sur M;

(19) pour $a\in M$ les fonctions abstraites $F_t(a)$ et $F_t^*(a)$ satisfont à la condition de Lipschitz.

Posons maintenant que $H_t = H$ et soient $\mathfrak{M}$ l'ensemble des fonctions abstraites $x(t)$ de la forme

$$(20) \qquad x(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, a_i, \quad \text{où } f_i \epsilon C_{1,1} \text{ sur } \langle 0, \tau\rangle, \quad a_i \epsilon M,$$

$\mathfrak{N}$ — l'ensemble des fonctions abstraites lipschitziennes. Si l'on définit la transformation $S_{t,s}$ par la formule

$$(21) \qquad S_{t,s}(x) = x + (t-s) F_t x,$$

on vérifie facilement que les hypothèses (A)-(F) sont satisfaites.

Or, (A) est évident; (B): toute fonction abstraite de Lipschitz peut être approchée, au sens de la norme

$$\|x(\cdot)\| = \Big[\int_0^\tau \|x(t)\|^2\, dt\Big]^{1/2}$$

par une fonction "en escalier", $\sum \chi_i(t)\, a_i$, où $a_i \epsilon M$, et χ_i est la fonction caractéristique de l'intervalle $\Delta_i(\langle 0, \tau\rangle)$. Or, chacune des fonctions χ_i peut être approchée en moyenne par une fonction de classe $C_{1,1}$ dans $\langle 0, \tau\rangle$, ce qui prouve (B).

Montrons (C). Or, il est évident que

$$\frac{D}{Dt} x(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}[x(t+\varepsilon) + F_{t+\varepsilon} x(t+\varepsilon) - x(t)] = \frac{d}{dt} x(t) + F_t\big(x(t)\big)$$

existe au sens fort et constitue une fonction de Lipschitz, grâce à (20) et (21). La démonstration de (C) pour $D^* y(t)/Dt$ est analogue et on a

$$\frac{D^*}{Dt} y(t) = \frac{d}{dt} y(t) - F_t^* y(t).$$

(D_1) et (D_2) étant évident, passons à (E). On a pour $\varepsilon > 0$

$$\|S_{t+\varepsilon,t} x\|^2 = \|x + \varepsilon F_{t+\varepsilon} x\|^2 = \|x\|^2 + 2\varepsilon (F_{t+\varepsilon} x, x) + \varepsilon^2 \|F_{t+\varepsilon} x\|^2$$
$$\geqslant (1 + 2\varepsilon\gamma)\|x\|^2$$

et tout pareillement

$$\|S_{t,t-\varepsilon} y\|^2 \geqslant (1 + 2\varepsilon\gamma)\|y\|^2.$$

Il suffit alors d'admettre

$$f(t, \varepsilon) = g(t, \varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon\gamma}$$

pour que (E) soit satisfait. Grâce à la définition de $\mathfrak{M}$, l'hypothèse (F) se réduit à un théorème très simple concernant la dérivation des fonctions de classe $C_{1,1}$. Ainsi, les hypothèses (A)-(F) étant vérifiées, le théorème 1 nous donne, comme corollaire, le

THÉORÈME 2. *L'équation* $dx(t)/dt + F_t x(t) = a(t)$, $x(0) = b$ *a au plus* (*resp. au moins*) *une solution généralisée au sens fort* (*resp. au sens faible*) *pour* $a(\cdot) \epsilon \mathscr{H}$, $b \epsilon H$.

Travaux cités

[1] L. Hörmander, *On the theory of general partial differential equations*, Acta Math. 94 (1955), p. 161-248.

[2] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle.*

[3] S. Saks, *Zarys teorii całki.*

Reçu par la Rédaction le 19. 3. 1968