STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Sur les réarrangements de fonctions de la classe A

par

JEAN-PIERRE KAHANE (Orsay)

*En hommage
à MM. S. Mazur et W. Orlicz*

1. Soit I un intervalle fermé borné sur la droite. On désigne par $A(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I et prolongeables sur la droite en transformées de Fourier de fonctions sommables. Si I a une longueur strictement inférieure à l, $A(I)$ est aussi bien l'ensemble des fonctions continues sur I et prolongeables en fonctions l-périodiques dont la série de Fourier est absolument convergente.

On appellera dans cet article *réarrangement* d'une fonction g continue sur I toute fonction $g\circ\varphi$, composée de g et d'un homéomorphisme φ de I. On peut demander s'il existe des fonctions f, continues sur I, dont aucun réarrangement n'appartienne à $A(I)$; c'est là un problème, toujours ouvert, posé par Lusin ([1], p. 168). On peut aussi demander si les réarrangements des fonctions de la classe $A(I)$ engendrent (par combinaisons linéaires) l'espace vectoriel $C(I)$ des fonctions continues sur I; les théorèmes ci-dessous répondent affirmativement à cette question.

Supposons donnée une fonction $h(t)\geqslant 0$ sur $[0,\infty]$, croissante (au sens large), sous-additive ($h(t+t')\leqslant h(t)+h(t')$) et telle que

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\frac{h(t)}{t}=\infty. \tag{1}$$

On désigne par H l'ensemble des fonctions φ croissantes (au sens large) et continues appliquant I sur I, pour lesquelles

$$\lim_{|t-t'|\to 0}\frac{|\varphi(t)-\varphi(t')|}{h(|t-t'|)}=0. \tag{2}$$

H est un convexe fermé de l'espace de Banach $\lambda_h(I)$ constitué par les fonctions φ de $C(I)$ qui vérifient (2), la norme étant

$$\|\varphi\|_{\lambda_h(I)}=\sup_{t,t'}\frac{|\varphi(t)-\varphi(t')|}{h(|t-t'|)}+\sup_t|\varphi(t)|.$$

THÉORÈME 1. *En dehors d'un ensemble de première catégorie sur $H\times H$, tout couple (φ_1,φ_2) d'éléments de H jouit de la propriété suivante: toute fonction f de $C(I)$ s'écrit*

$$f = g_1\circ\varphi_1+g_2\circ\varphi_2$$

pour un choix convenable de g_1 et de g_2 dans $A(I)$.

THÉORÈME 2. *En dehors d'un ensemble de première catégorie sur $H\times H\times H$, tout triplet $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ d'éléments de H jouit de la propriété suivante: toute fonction f de $C(I)$ s'écrit*

$$f = g\circ\varphi_1+g\circ\varphi_2+g\circ\varphi_3$$

pour un choix convenable de g dans $A(I)$.

Ces énoncés sont valables aussi bien pour des fonctions à valeurs complexes que pour des fonctions à valeurs réelles. Il suffit évidemment de les démontrer dans ce dernier cas.

On donnera à la fin de l'article quelques compléments et commentaires.

2. Les démonstrations s'appuient sur les deux lemmes suivants.

LEMME 1. *Soit φ une fonction de H, k un entier $\geqslant 1$, δ un nombre positif; S une partie de I formée d'intervalles dont la longueur est comprise entre δ et $k\delta$, séparés par des intervalles de longueur δ; et enfin ψ une fonction de H, localement constante sur S, linéaire dans les intervalles contigus à S, et telle que*

$$\sup_t|\psi(t)-\varphi(t)|\leqslant\omega_\varphi(k\delta)=\sup_{|t-t'|\leqslant k\delta}|\varphi(t)-\varphi(t')|. \tag{3}$$

Alors

$$\|\psi-\varphi\|_{\lambda_h(I)}\leqslant\varepsilon(\varphi,k,\delta),$$

$\varepsilon(\varphi,k,\delta)$ ne dépendant que de φ, k, et δ, et tendant vers zéro quand $\delta\to 0$.

La preuve est immédiate à partir de (3) et des inégalités qui en découlent, c'est-à-dire

$$|\psi(t)-\psi(t')-\varphi(t)+\varphi(t')|\leqslant 2\omega_\varphi(k\delta),$$

que l'on utilise quand $|t-t'|>\delta$, et

$$|\psi(t)-\psi(t')-\varphi(t)+\varphi(t')|\leqslant\frac{2|t'-t|}{\delta}\,\omega_\varphi(k\delta)+\omega_\varphi(|t-t'|),$$

valable pour $|t-t'|\leqslant\delta$.

LEMME 2. *Soit $t_1,t_2,\ldots,t_N$ une suite croissante de points de I, linéairement indépendants sur les rationnels, et soit $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N$ une suite à valeurs -1, 0 ou $+1$. Il existe une fonction g de la classe $A(\mathbf{R})$ (c'est-à-dire transformée de Fourier de fonction sommable) ayant les propriétés suivantes:*

(a) $\|g\|_{A(\mathbf{R})}=\|\hat g\|_{L^1(\mathbf{R})}\leqslant 2$;
(b) $g(t_n)=\frac14\varepsilon_n$ $(n=1,2,\ldots,N)$;

(c) $\|g\|_{C(I)}\leqslant\frac14$;
(d) $g(t)\geqslant-\frac18$ *(resp. $g(t)\leqslant\frac18$) sur tout intervalle $[t_n,t_{n+1}]$ pour lequel $\varepsilon_n\geqslant 0$, $\varepsilon_{n+1}\geqslant 0$ (resp. $\varepsilon_n\leqslant 0$, $\varepsilon_{n+1}\leqslant 0$).*

Preuve. Quitte à faire une translation de l'origine, on peut supposer qu'aucun des t_n n'est nul. Alors, pour $\eta>0$ assez petit, la fonction g dont la transformée de Fourier est

$$\hat g(u)=\frac{\sin^2\eta u}{2\eta u^2}\Big(\prod_{n=1}^{N}(1+\varepsilon_n\cos t_n u)-1\Big)$$

satisfait aux conditions (a), (b), (c) et (d), comme on s'en convainc assez facilement. On a même, au lieu de (c), $\|g\|_{L^\infty(R)}\leqslant\frac14$.

En vue du théorème 1, on commence par la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Soit $f\in C(I)$. Désignons par F l'ensemble des couples (φ_1,φ_2) de $H\times H$ tels que, pour tout couple de fonctions g_1 et g_2 de $A(I)$, de normes $\leqslant 2\|f\|_{C(I)}$ dans $A(I)$, on ait*

$$\|f-g_1\circ\varphi_1-g_2\circ\varphi_2\|_{C(I)}\geqslant\frac89\|f\|_{C(I)}.$$

Sauf si f est identiquement nul, F est un fermé non dense dans $H\times H$.

Démonstration. On peut sans restriction supposer $\|f\|_{C(I)}=1$. F est visiblement un fermé. Montrons qu'il est non dense. Pour cela, nous allons montrer que dans tout voisinage d'un (φ_1,φ_2) donné de F, il existe un (ψ_1,ψ_2) de $H\times H$ tel que, pour un choix convenable de g_1 et de g_2 dans la boule $\|g\|\leqslant 2$ de $A(I)$, on ait

$$\|f-g_1\circ\psi_1-g_2\circ\psi_2\|_{C(I)}\leqslant\frac78. \tag{4}$$

Soit S_1 et S_2 deux parties de I disjointes, constituées d'intervalles (ouverts, semi-ouverts ou fermés) de même longueur δ, telles que $S_1\cup S_2=I$; S_1 et S_2 sont des ensembles du type S décrit au lemme 1, aves $k=1$. Le couple (φ_1,φ_2) étant donné, soit ψ_1 et ψ_2 deux fonctions de H, définies respectivement à partir de φ_1, S_1 et φ_2, S_2 comme la fonction ψ du lemme 1 à partir de φ, S, avec la condition additionnelle que ψ_1 (resp. ψ_2) prend des valeurs indépendantes sur les différents intervalles constituant S_1 (resp. S_2).

Soit $s_{j,1},s_{j,2},\ldots,s_{j,N}$ les intervalles de S_j $(j=1,2)$, ordonnés de gauche à droite. Posons $\psi_j(s_{j,n})=t_{j,n}=t_n$ et

$$\varepsilon_{j,n}=\varepsilon_n=\begin{cases}1 & \text{si } f\geqslant 0 \text{ sur } s_{j,n},\\ -1 & \text{si } f\leqslant 0 \text{ sur } s_{j,n},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

En appliquant le lemme 2, on a une fonction g_j de norme $\leqslant 2$ dans $A(R)$, donc (restreinte à I) de norme $\leqslant 2$ dans $A(I)$, vérifiant (b), (c), (d).

Si δ est assez petit, (ψ_1, ψ_2) est arbitrairement proche de (φ_1, φ_2) dans $H\times H$ (lemme 1). On peut supposer d'autre part $\omega_f(\delta) \leqslant \frac{1}{8}$. Montrons alors que (4) a lieu.

Soit x un point de I. Supposons, pour fixer les idées, $x\in S_1$. Soit $s_1 = s_{1,n+1}$ l'intervalle de S_1 qui contient x, $s_{2,n}$ et $s_{2,n+1}$ les intervalles de S_2 adjacents à s_1.

Si $|f(x)| \leqslant \frac{3}{8}$, on a, d'après la condition (c),

$$\left|f(x)-g_1\big(\varphi_1(x)\big)-g_2\big(\varphi_2(x)\big)\right| \leqslant \frac{3}{8}+\frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

Si $f(x) \geqslant \frac{3}{8}$, la condition sur $\omega_f(\delta)$ entraîne $f\geqslant 0$ sur s_1, sur $s_{2,n}$ et sur $s_{2,n+1}$, donc $\varepsilon_{1,n+1} = \varepsilon_{2,n} = \varepsilon_{2,n+1} = 1$. La condition (b), appliquée à g_1, donne

$$g_1\big(\varphi_1(x)\big) = g_1(t_{1,n+1}) = \frac{1}{4}.$$

La condition (d) est appliquable à g_2 et, puisque φ_2 est croissante, $\varphi_2(x)$ est contenu dans l'intervalle $[t_{2,n}, t_{2,n+1}]$; donc

$$g_2\big(\varphi_2(x)\big) \geqslant -\frac{1}{8}.$$

Il en résulte que

$$f(x)-g_1\big(\varphi_1(x)\big)-g_2\big(\varphi_2(x)\big) \leqslant 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

D'autre part, la condition (c) entraîne

$$f(x)-g_1\big(\varphi_1(x)\big)-g_2\big(\varphi_2(x)\big) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

En changeant les signes, on traite de même le cas $-f(x)\geqslant \frac{3}{8}$. Donc (4) a lieu, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

Démonstration du théorème 1. Soit $f_{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ une suite dense dans $C(I)$, et $F_{(k)}$ la suite correspondante de fermés non denses de $H\times H$. La réunion des $F_{(k)}$ est l'ensemble exceptionnel Φ, qui est de première catégorie. Si $(\varphi_1, \varphi_2)\notin\Phi$ et $f\in C(I)$, il est aisé de voir qu'il existe deux fonctions g_1 et g_2, de normes $\leqslant 2\|f\|_{C(I)}$ dans $A(I)$, et telles que

$$\|f-g_1\circ\varphi_1-g_2\circ\varphi_2\|_{C(I)} \leqslant \frac{9}{10}\|f\|_{C(I)}.$$

Fixons $(\varphi_1, \varphi_2)\notin\Phi$. Désignons par $\gamma_1(f)$ et $\gamma_2(f)$ les fonctions g_1 et g_2 qui viennent d'être définies. Définissons par récurrence $f_0 = f$, élément donné de $C(I)$,

$$f_{m+1} = f_m-\gamma_1(f_m)\circ\varphi_1-\gamma_2(f_m)\circ\varphi_2.$$

On a, en supposant $\|f\|_{C(I)} = 1$,

$$\|f_m\|_{C(I)} \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^m, \qquad \|\gamma_j(f_m)\|_{A(I)} \leqslant 2\left(\frac{9}{10}\right)^m.$$

Les séries $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\gamma_j(f_m)$, $j = 1, 2$, sont donc convergentes dans $A(I)$, et leurs sommes g_1^* et g_2^* vérifient

$$f-g_1^*\circ\varphi_1-g_2^*\circ\varphi_2 = 0.$$

Cela achève la démonstration du théorème 1.

Démonstration du théorème 2. En vue du théorème 2, on remplace la proposition 1 par la suivante:

PROPOSITION 2. *Soit $f\in C(I)$. Soit F l'ensemble des triplets $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de $H\times H\times H$ tels que, pour toute fonction g de $A(I)$, de norme $\leqslant 2\|f\|_{C(I)}$ dans $A(I)$, on ait*

$$\|f-g\circ\varphi_1-g\circ\varphi_2-g\circ\varphi_3\|_{C(I)} \geqslant \frac{8}{9}\|f\|_{C(I)}.$$

Sauf si f est identiquement nul, F est un fermé non dense dans $H\times H\times H$.

La démonstration est très voisine de celle de la proposition 1. En identifiant l'origine et l'extrémité de I, on définit S_1, S_2, S_3 comme trois insembles fermés, se déduisant l'un de l'autre par les translations $\pm\delta$, et formés d'intervalles fermés de longueur commune 2δ séparés par des entervalles ouverts de longueur δ. Chaque point de I appartient à deux au moins de ces trois ensembles. Le triplet $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ étant donné, on définit (ψ_1, ψ_2, ψ_3) comme dans le lemme 1, avec la condition additionnelle que les valeurs prises par ψ_1 sur les intervalles constituant S_1, par ψ_2 sur les intervalles constituant S_2 et par ψ_3 sur les intervalles constituant S_3 sont indépendantes sur les rationnels.

Le lemme 2 s'applique alors en prenant pour $t_1, t_2, \ldots, t_N$ la suite des valeurs prises par ψ_1 sur S_1, ψ_2 sur S_2, ψ_3 sur S_3. Si $t_n = \psi_j(s)$, s étant l'un des intervalles constituant S_j, on pose

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } f\geqslant 0 \text{ sur } s, \\ -1 & \text{si } f\leqslant 0 \text{ sur } s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous la condition $\omega_f(2\delta)\leqslant\frac{1}{8}$, la fonction g ainsi définie satisfait pour tout x à l'inégalité

$$\left|f(x)-g\big(\psi_1(x)\big)-g\big(\psi_2(x)\big)-g\big(\psi_3(x)\big)\right| \leqslant \frac{7}{8}\|f\|_{C(I)}.$$

On s'en assure aisément en distinguant les cas $|f(x)| \leqslant \frac{1}{8}$ (l'inégalité résultant immédiatement de (c)) et $|f(x)| \geqslant \frac{1}{8}$ (l'inégalité résultant alors de (b) et (c)). On n'utilise pas la condition (d) du lemme 2.

La proposition 2 est ainsi établie.

La démonstration du théorème 2 est calquée sur celle du théorème 1, en utilisant la proposition 2 au lieu de la proposition 1.

3. Les démonstrations qui précèdent sont inspirées pour une part de la méthode utilisée par R. Kaufman pour mettre en évidence des ensembles de Kronecker [3], d'autre part de la version donnée par G. Lorentz du théorème de superposition de Kolmogorov ([4], chapitre XI). Elles s'appliquent dans des cas un peu plus étendus: par exemple, on peut considérer différentes fonctions h_1, h_2, h_3 au lieu d'une seule fonction h, définir en conséquence H_1, H_2, H_3, et considérer les (φ_1, φ_2) dans $H_1 \times H_2$ et les $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ dans $H_1 \times H_2 \times H_3$.

On peut également, en combinant les deux démonstrations, avoir l'énoncé suivant: *sauf sur un ensemble de première catégorie dans $H_1 \times H_2 \times \times H_3$, tout triplet $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de $H_1 \times H_2 \times H_3$ a la propriété que toute fonction f de $C(I)$ s'écrive*

$$f = g_1 \circ \varphi_1 + g_2 \circ \varphi_2 = g \circ \varphi_1 + g \circ \varphi_2 + g \circ \varphi_3$$

pour un choix convenable des fonctions g_1, g_2 et g dans $A(I)$.

On peut d'autre part, à la place de l'intervalle I, considérer le cercle $\boldsymbol{T}$ ou la droite $\boldsymbol{R}$, et définir en conséquence les classes H d'homéomorphismes de $\boldsymbol{T}$ ou $\boldsymbol{R}$. Le théorème 1 et le théorème 2 s'adaptent mot pour mot ainsi, que la dernière remarque. En particulier, *il existe des homéomorphismes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de $\boldsymbol{T}$ (resp. $\boldsymbol{R}$) tels que toute fonction f continue sur $\boldsymbol{T}$ (resp. continue et nulle à l'infini sur $\boldsymbol{R}$) s'écrive*

$$f = g_1 \circ \varphi_1 + g_2 \circ \varphi_2 = g \circ \varphi_1 + g \circ \varphi_2 + g \circ \varphi_3$$

pour un choix convenable de g_1, g_2, g dans $A(\boldsymbol{T})$ (resp. $A(\boldsymbol{R})$), $A(\boldsymbol{T})$ désignant l'ensemble des fonctions continues sur $\boldsymbol{T}$ à séries de Fourier absolument convergentes, et $A(\boldsymbol{R})$, comme on l'a vu, l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions sommables.

Si l'on considère un ensemble fermé totalement discontinu E contenu dans I, on a le résultat suivant: sauf si φ est pris dans un ensemble de première catégorie dans H, toute fonction f continue sur $\varphi(E)$ s'écrit $f = g \circ \varphi$, g étant la restriction à $\varphi(E)$ d'une fonction de la classe A. Lorsque cette condition est réalisée, on dit que $\varphi(E)$ est un *ensemble de Helson*. On a même un résultat plus fort: sauf si φ est pris dans un ensemble de première catégorie dans H, $\varphi(E)$ est un *ensemble de Kronecker* [3].

Comme corollaire du théorème 1, on voit que, sauf le cas exceptionnel, l'ensemble image par φ_1 ou φ_2 de l'ensemble des zéros de $\varphi_1 - \varphi_2$ est un ensemble de Helson. En d'autres termes, sauf si (φ_1, φ_2) est pris dans un ensemble de première catégorie dans $H \times H$, l'ensemble des points invariants de la fonction $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ (où φ_2^{-1} est la fonction réciproque de φ_2) est un ensemble de Helson.

On peut se demander si les théorèmes 1 et 2 ne sont pas des cas particuliers d'un théorème plus général, dans lequel la conclusion serait: toute fonction f de $C(I)$ s'écrit

$$f = g \circ \varphi_1 + g \circ \varphi_2$$

pour un choix convenable de g dans $A(I)$. Il n'en est rien. En effet, si l'on pouvait écrire toute fonction h de $C(I)$ sous la forme $g + g \circ \varphi$, où φ est un homéomorphisme croissant de I donné une fois pour toutes, et g une fonction de $A(I)$, l'application $g \to g + g \circ \varphi$ serait bijective de $A(I)$ dans $C(I)$ (on vérifie facilement que $g = -g \circ \varphi = g \circ \varphi \circ \varphi$ entraîne $g = 0$); et cela est impossible, d'après un théorème de Banach, puisque les normes $\| \ \|_{A(I)}$ et $\| \ \|_{C(I)}$ ne sont pas équivalentes.

Des énoncés voisins des théorèmes 1 et 2, concernant les réarrangements des suites de coefficients de Fourier, ont été publiés dans [2].

Travaux cités

[1] Н. Бари, *Тригонометрические ряды*, Москва 1961.

[2] J.-P. Kahane, *Sur les réarrangements des suites de coefficients de Fourier-Lebesgue*, C. R. Acad. Sci. Paris 265 (1967), p. 310-312.

[3] R. Kaufman, *A functional method for linear sets*, Israel J. Mathematics 5 (1967), p. 185-187.

[4] G. Lorentz, *Approximation of functions*, New York 1967.

Reçu par la Rédaction le 5. 3. 1968