STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Grenzableitungen

von

F. PITTNAUER (Madison, Wisc.) und K. ZELLER (Tübingen)

Herrn Stanisław Mazur
und
Herrn Władysław Orlicz
gewidmet

1. Einleitung. Die Funktionalanalysis erreichte auf dem Gebiet der Banach-Räume schon früh eine abgerundete Theorie, deren klassische Darstellung man in dem berühmten Werk von Banach [2] findet. Verschiedene Probleme aus der Analysis erweckten den Wunsch, die Theorie möglichst auf eine allgemeinere Klasse von Räumen auszudehnen. Mazur und Orlicz ersetzten zu diesem Zweck die einzelne Norm eines Banach-Raumes durch abzählbar viele Halbnormen und gelangten so zu den B_0-Räumen (heute meist F-Räume genannt). In diesen Räumen hat man neben dem Kategorieprinzip auch das Fortsetzungsprinzip (Helly-Hahn-Banach) und damit die Grundlagen für eine weitreichende Theorie zur Verfügung. Die ersten Veröffentlichungen betrafen interessante Anwendungen bei Limitierungsverfahren (Mazur-Orlicz [10]) und bei unendlichen Systemen linearer Gleichungen (Eidelheit [7, 8]). Die weitere Entwicklung führte unter Einbeziehung der Köthe-Räume zur Theorie der lokalkonvexen Räume, also dem Kernstück der heutigen Funktionalanalysis.

Eidelheit [7, 8] gab genaue Bedingungen dafür, dass ein lineares Gleichungssystem mit unendlicher Matrix bei beliebiger rechter Seite auflösbar ist. Pólya [16] gelangte mit direkten Methoden zu hinreichenden Bedingungen. In neuerer Zeit haben diese Untersuchungen wieder besonderes Interesse gefunden: Cooke [6], Petersen und Baker-Thompson [1, 12, 13, 14, 15], Benson [3], Niethammer-Zeller [11].

Eidelheit [7] brachte auch eine funktionentheoretische Anwendung: Existenz holomorpher Funktionen mit vorgegebenen Werten (auf Punkten z_k, die sich nicht im Innern eines Konvergenzkreises häufen). Pólya [16] schreibt sogar in jedem Punkt z_k endlich viele Ableitungen vor.

Ferner konstruiert er Funktionen, die im Einheitskreis holomorph sind und in endlich vielen Punkten der Kreislinie vorgegebene Grenzableitungen (aller Ordnungen) besitzen. Wir gehen noch einen Schritt weiter und untersuchen den Fall abzählbar vieler Grenzpunkte (Randpunkte), der mit klassischen Methoden schon von Franklin [9] behandelt worden ist (siehe Abschnitt 2). Die von uns verwendeten funktionalanalytischen Methoden geben einen tieferen Einblick in den Problemkreis und gestatten es, ohne grössere Mühe, Varianten, Verallgemeinerungen und Verschärfungen der angeführten Sätze zu erhalten (siehe Abschnitt 5). Bei den Bezeichnungen schliessen wir uns an [11] an.

2. Problemstellung. Die Ableitungen einer komplexen Funktion f in einem Holomorphiepunkt z_0 sind gewissen Einschränkungen unterworfen, die sich aus dem Satz von Cauchy-Hadamard ergeben. Anders liegt die Sache bei einem (endlichen) Randpunkt z_0 des Holomorphiegebietes G; hier kann man in vielen Fällen die "Ableitungen" beliebig vorschreiben. Dabei definieren wir die Ableitungen durch Grenzübergang (stetige Fortsetzung, vgl. (3)) und sprechen von Grenzableitungen. Ist G ein Sektor oder Winkelraum W mit Spitze z_0, in der die Grenzableitungen von f existieren, so wird f für $z\to z_0$ in W durch die entsprechende Taylorreihe asymptotisch dargestellt (siehe Wasow [18], S. 40].

Das Problem der vorgeschriebenen Ableitungen bzw. vorgeschriebenen Asymptotik wurde schon seit langer Zeit behandelt, zuerst für ein einzelnes z_0: Borel [4], Ritt [17] (siehe auch Wasow [18], S. 40). Carleman [5] nahm dann endlich viele Grenzpunkte z_k, Franklin [9] sogar eine beliebige isolierte Menge von Grenzpunkten z_k. Die Konstruktion der gesuchten Funktion f wird erleichtert, wenn man sich (wie die meisten Autoren) mit kleinen Definitionsbereichen begnügt. Aber schon Franklin gelang es, maximale Holomorphiegebiete zu erzielen. Wir gehen noch ein Stück weiter, indem wir f gewissen Zusatzforderungen (wie Beschränktheit) unterwerfen. Dabei betrachten wir zunächst einen einzelnen Grenzpunkt (Satz 1) und anschliessend eine Folge von Grenzpunkten $z_k\to\infty$ (Satz 2), während wir den Fall einer beliebigen isolierten Menge z_k nur kurz erwähnen (Satz 3).

Die zitierten Arbeiten benützen grossenteils funktionentheoretische Methoden. Borel [4] erleichtert sich die Konstruktion, indem er zunächst ein unendliches Gleichungssystem approximativ löst. Eidelheit [7] und Pólya [16] benützen unmittelbar die exakten Lösungen der vorkommenden Gleichungssysteme. Auf diesem Wege gehen auch wir vor.

3. Der Fall eines einzigen Grenzpunktes. Sei W die von 0 nach $-\infty$ geschlitzte komplexe Zahlenebene C. Ausführlicher: Es sei W das Gebiet, das aus C entsteht, indem man die (reellen) Zahlen z mit $-\infty<z\leqslant 0$

entfernt. Wir betrachten Funktionen f mit nachstehenden Eigenschaften:

(1) f ist definiert und holomorph in W.

f ist beschränkt in W, ebenso jede Ableitung

$$p_j(f):=\sup|f^{(j)}(z)|<\infty\qquad (z\in W;\ j=0,1,\ldots). \tag{2}$$

f besitzt einen Grenzwert bei Annäherung an 0, ebenso jede Ableitung von f:

$$F_j(f):=\lim f^{(j)}(z)\ \text{existiert}\ (z\to 0\ \text{in}\ W;\ j=0,1,\ldots). \tag{3}$$

Es gibt nichttriviale Funktionen mit diesen Eigenschaften. Wichtig ist für uns insbesondere die "Grundfunktion" g,

$$g(z):=e^{-z^{-1/3}}-1, \tag{4}$$

wobei der Hauptwert der Wurzel genommen wird. Für $z\in W$ liegt dann der Exponent aus (4) in einem Winkelraum der linken Halbebene; die Grenzwerte (3) sind $-1,0,0,\ldots$ Die entsprechenden Grenzwerte für $z\to\infty$ existieren ebenfalls und verschwinden alle.

Die Funktionen f des beschriebenen Typs bilden in natürlicher Weise einen linearen Raum und darüber hinaus einen F-Raum $\mathfrak{f}=[f;p_j]$ mit den Halbnormen (2) (vgl. Wilansky [19] sowie [20, 21]).

Mit den eingeführten Begriffen geben wir nun eine etwas verschärfte Formulierung des Ergebnisses von Borel, Ritt und Franklin (vgl. Abschnitte 2 und 5):

Satz 1. *Es seien beliebige komplexe Zahlen $c_0, c_1, \ldots$ vorgelegt. Dann gibt es im eben erwähnten Raum $\mathfrak{f}$ ein f mit*

$$F_j(f):=\lim f^{(j)}(z)=c_j\qquad (\textit{für}\ z\to 0\ \textit{in}\ W;\ j=0,1,\ldots). \tag{5}$$

Beweis. Die F_j sind stetige Linearformen in $\mathfrak{f}$. Offenbar ist

$$|F_j(f)|\leqslant p_j(f)\qquad (f\in\mathfrak{f};\ j=0,1,\ldots). \tag{6}$$

Andererseits gilt für kein j eine Abschätzung der Gestalt

$$|F_j(f)|\leqslant M[p_0(f)+\ldots+p_{j-1}(f)]\qquad (f\in\mathfrak{f}). \tag{7}$$

Dies erkennt man durch Betrachtung der Funktionen g_j,

$$g_j(z):=g(rz+a_j), \tag{8}$$

und zwar für grosse $r>0$ und geeignete $a_j>0$. Durch die Wahl von a_j vermeiden wir Nullstellen der j-ten Ableitung; der Faktor r sorgt für rasches Anwachsen der Ableitungen und überspielt das M in der Ungleichung.

Wir sehen jetzt, dass (in der Terminologie von [7] und [11])

(9) $$\operatorname{ord} F_j = j \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

gilt und daher das Gleichungssystem (5) eine Lösung $f \in \mathfrak{f}$ besitzt ([7] Bemerkung 3; [11] Formel (11)).

4. Kondensation. Nun betrachten wir in der komplexen Ebene C eine Folge von paarweise verschiedenen Punkten z_k ohne endlichen Häufungspunkt. Wir wählen einen "Sternpunkt", der auf keiner Verbindungsgeraden zweier z_j liegt, und ziehen von ihm aus die Strahlen durch die z_k. Von jedem Strahl behalten wir nur den Teil S_k bei, der von z_k (einschliesslich) bis ∞ (ausschliesslich) reicht. Die Strahlen S_k des Sterns sind paarweise punktfremd; ihre Vereinigung ist abgeschlossen (wegen $z_k \to \infty$). Entfernen wir die S_k aus C, so erhalten wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet V.

Jedem z_k ordnen wir ferner eine Kreisscheibe K_k mit Mittelpunkt z_k zu, und zwar derart, dass die K_k paarweise punktfremd sind (die Menge z_k ist ja isoliert). Für jedes k bilden wir die

(10) Menge T_k der $z \in V$ mit $z \notin K_j$ für $j \neq k$.

T_k hat somit z_k, aber kein anderes z_j als Häufungspunkt. Wir interessieren uns für Funktionen f mit nachstehenden Eigenschaften:

(11) f ist definiert und holomorph in V;

(12) $$p_{jk}(f) := \sup |f^{(j)}(z)| < \infty \qquad (z \in T_k;\ j, k = 0, 1, \ldots);$$

(13) $$F_{jk}(f) := \lim f^{(j)}(z) \text{ existiert} \qquad (z \to z_k \text{ in } V;\ j, k = 0, 1, \ldots).$$

Diese Funktionen bilden in natürlicher Weise einen linearen Raum und darüber hinaus einen F-Raum $\mathfrak{f}$ mit den obigen Halbnormen p_{jk}, die wir gemäss

(14) $$q_0 := p_{00},\ q_1 := p_{01},\ q_2 := p_{10},\ q_3 := p_{02},\ q_4 := p_{11}, \ldots$$

zu einer Einfachfolge $\{q_l\}$ anordnen.

Nach diesen Vorbereitungen geben wir eine etwas verschärfte Fassung des Ergebnisses von Franklin bzw. Carleman (vgl. Abschnitte 2 und 5):

Satz 2. *Es seien beliebige komplexe Zahlen c_{jk} $(j, k = 0, 1, \ldots)$ vorgelegt. Dann gibt es im eben erwähnten Raum $\mathfrak{f}$ ein f mit*

(15) $$F_{jk}(f) := \lim f^{(j)}(z) = c_{jk} \qquad (z \to z_k \text{ in } V;\ j, k = 0, 1, \ldots).$$

Wir weisen nochmals auf die Bedingung "kein endlicher Häufungspunkt" hin. Das Gebiet V kann man auf verschiedene Weise variieren. Eine selbstverständliche Modifikation des Satzes und des Beweises erfasst den Fall endlich vieler z_k (Carleman [5]). Weitere Ergänzungen erwähnen wir im Abschnitt 5.

Beweis. Die F_{jk} sind stetige Linearformen im F-Raum $\mathfrak{f}$. Offenbar ist

(16) $$|F_{jk}(f)| \leqslant q_l(f) \qquad (f \in \mathfrak{f}),$$

wenn wir den Index l gemäss (14) aus (j, k) bestimmen. Andrerseits gilt für kein F_{jk} eine Abschätzung der Gestalt

(17) $$|F_{jk}(f)| \leqslant M \cdot [q_0(f) + \ldots + q_{l-1}(f)] \qquad (f \in \mathfrak{f}).$$

Das erkennt man so. Für jedes k nehmen wir diejenige ganze lineare Funktion h_k, welche den Strahl S_k auf die negative Halbachse abbildet, und untersuchen die Funktionen g_{jk}:

(18) $$g_{jk}(w) := g[r h_k(w) + a_{jk}].$$

Wie im Abschnitt 3 wird für geeignetes $a_{jk} > 0$ und grosses $r > 0$ die Ungleichung (17) widerlegt; der Faktor r bewirkt nun auch, dass g_{jk} ausserhalb K_k klein ist (einschliesslich der in (17) eingehenden Ableitungen).

5. Bemerkungen. Im Abschnitt 3 dürfen wir den F-Raum $\mathfrak{f}$ in verschiedener Weise modifizieren. Zum Beispiel kann man zusätzlich fordern, dass die Funktionen f genau wie g Uferwerte auf der negativen Halbachse besitzen und damit Satz 1 verschärfen. Andrerseits besteht die Möglichkeit, die Bedingungen für f stärker auf das lokale Verhalten im Punkte 0 abzustimmen; man hat dann noch grössere Freiheit bei der Konstruktion von f. Entsprechendes gilt für Abschnitt 4. Die Abschwächung der Forderungen spielt insbesondere eine Rolle, wenn man allgemeinere Mengen von Grenzpunkten z_k zulässt.

Franklin [9] betrachtet eine beliebige isolierte Menge $\{z_k\}$. In geeigneter Weise verbindet er jedes z_k mit einem Häufungspunkt der z_j oder mit ∞. Aus der komplexen Ebene C entfernt man die Verbindungsstücke (Schlitze) sowie etwa noch verbleibende Häufungspunkte und gelangt so zu einer offenen Menge U. Aus seiner Arbeit [9] (Theorem V) entnehmen wir

Satz 3 (Franklin). *Es gibt eine Funktion f, die in U holomorph ist und in den z_k vorgeschriebene Grenzableitungen annimmt* (analog zu Satz 2).

Die technischen Schwierigkeiten eines funktionentheoretischen oder funktionalanalytischen Beweises beruhen auf der komplizierten Struktur mancher isolierter Mengen.

Weitere Modifikationen entstehen, wenn man geeignete nichtisolierte Mengen von Grenzpunkten zulässt. In Betracht kommen abzählbare Mengen, bei denen jedes z_k Spitze eines Sektors ist, der keine anderen z_j enthält. Die Annäherung an z_k erfolgt dann jeweils aus dem betreffenden Sektor heraus, womit man Unstetigkeiten aus dem Weg geht. Es gibt jedoch noch viele andere Varianten, bei denen die Methode der unendlichen Gleichungen (auch kombiniert mit funktionentheoretischen Methoden) sich bewährt.

Literaturnachweis

[1] A. C. Baker, *Systems of linear equations over a topological module*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 15 (1964), S. 327-336.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[3] D. C. Benson, *Unimodular solutions of infinite systems of linear equations*, Pacific J. Math. 15 (1965), S. 1-11.

[4] E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Ec. Norm. 12 (1895), S. 9-55.

[5] T. G. T. Carleman, *Fonctions quasi analytiques*, Paris 1926.

[6] R. C. Cooke, *Infinite matrices and sequence spaces*, London 1950.

[7] M. Eidelheit, *Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen*, Studia Math. 6 (1936), S. 139-148.

[8] — *Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen (II)*, ibidem 7 (1938), S. 150-154.

[9] Ph. Franklin, *Functions of a complex variable with assigned derivatives at an infinite number of points, and an analogue of Mittag-Leffler's theorem*, Acta Math. 47 (1926), S. 371-385.

[10] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les méthodes linéaires de sommation*, C. R. 196 (1933), S. 32-34.

[11] W. Niethammer und K. Zeller, *Unendliche Gleichungssysteme mit beliebiger rechter Seite*, Math. Zeitschrift 96 (1967), S. 1-6.

[12] G. M. Petersen and A. C. Thompson, *Infinite linear systems*, J. London Math. Soc. 38 (1963), S. 335-340.

[13] — *On a theorem of Pólya*, ibidem 39 (1964), S. 31-34.

[14] G. M. Petersen and A. C. Baker, *On a theorem of Pólya (II)*, ibidem 39 (1964), S. 745-752.

[15] G. M. Petersen, *Convergence of infinite linear systems*, Indag. Math. 26 (1964), S. 615-619.

[16] G. Pólya, *Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen*, Comment. Math. Helv. 11 (1939), S. 234-252. Ergänzung in Trans. Amer. Math. Soc. 50 (1940), S. 129.

[17] J. F. Ritt, *On the derivatives of a function at a point*, Annals of Math. 18 (1916), S. 18-23.

[18] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, New York 1965.

[19] A. Wilansky, *Functional analysis*, New York 1964.

[20] K. Zeller, *FK-Räume in der Funktionentheorie, I, II*, Math. Zeitschrift 58 (1953), S. 288-305, 414-435.

[21] — *Theorie der Limitierungsverfahren*, Berlin — Göttingen — Heidelberg 1958.

DEPARTAMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF WISCONSIN
MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Reçu par la Rédaction le 21. 2. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Stability of order convergence and regularity in Riesz spaces

by

A. C. ZAANEN (Leiden)

Dedicated to Professors
Stanisław Mazur and Władysław Orlicz
on the occasion of the 40th anniversary
of their scientific research

1. Introduction. The years from 1928 until 1936, a period of rapid growth for Banach and Hilbert space theory, were also the time that the foundations were laid for the functional analytic theory of linear vector lattices. This was done, independently, by Riesz [10, 11], Kantorovitch [4, 5] and Freudenthal [1], and it is interesting to observe now, more than thirty years later, the different methods of approach. Riesz was interested primarily in what is now called the order dual space of a given partially ordered vector space, and he presented an extended version of his short 1928 Congress note in a 1940 Annals of Mathematics paper, a translation of a 1937 Hungarian paper. Freudenthal, in 1936, proved a "spectral theorem" for vector lattices, the significance of which is illustrated by the fact that the Radon-Nikodym theorem in integration theory as well as the spectral theorem for Hermitian operators in Hilbert space are corollaries, although it was not until early in the fifties that a direct method was indicated for deriving the spectral theorem for Hermitian operators from the abstract spectral theorem. Finally, around 1935, Kantorovitch began his extensive investigation of the algebraic and convergence properties of vector lattices, with applications to linear operator theory. A few years later, curiously enough between 1940 and 1944, important contributions to the subject were published by Nakano [6, 7, 8], Ogasawara [9], Yosida [13, 14] in Japan and Kakutani [2, 3] in the United States. Of the more recent progress we only mention the work by Kantorovitch, Nakano and their schools. In contrast with Banach and Hilbert space theory, however, where in recent books the main body of the theory has been welded into a unified and elegant whole, there is only a very small number of textbooks on partially or-