STUDIA MATHEMATICA, T. XXX. (1968)

Sous-algèbres de codimension 1 et dérivations dans les algèbres de Banach commutatives

par

JACQUELINE DETRAZ (Paris)

Etant donnée une algèbre de Banach unitaire et commutative A, nous donnons une nouvelle démonstration du théorème suivant démontré par Sawoń et Warzecha([1]), concernant une caractérisation des sous-algèbres de codimension 1 de A, ainsi qu'un contre exemple à un problème posé dans le travail cité:

Théorème. *Le noyau d'une forme linéaire l sur A (continue ou non) est une sous-algèbre si et seulement si l a une des 3 formes suivantes:*

1. *il existe un homomorphisme m sur A et une constante c tels que pour tout a de A, $l(a) = cm(a)$;*

2. *il existe deux homomorphismes distincts m_1 et m_2 sur A et une constante complexe c tels que pour tout a de A*

$$l(a) = c[m_1(a) - m_2(a)];$$

3. *il existe un homomorphisme m sur A tel que pour tout a et b de A*

$$l(ab) = l(a)m(b) + l(b)m(a).$$

Remarque. La forme 1 caractérise les sous-algèbres de A de codimension 1 ne contenant pas l'unité comme étant les idéaux maximaux de A (ce qui résulte de la théorie de Gelfand). Il reste donc à étudier les sous-algèbres unitaires (i.e. qui contiennent l'unité e de A).

Proposition. *Toute sous-algèbre unitaire A_0 de codimension 1 dans A est de la forme $A_0 = I_0 + Ce$ où I_0 est un idéal de codimension 2 dans A et e l'unité de l'algèbre.*

Soit $I_0 = \{a, aA \subset A_0\}$; on vérifie facilement que I_0 est un idéal de A inclus dans A_0.

D'autre part, A_0 étant de codimension 1 dans A, il existe a_0 dans A tel que $A = A_0 + Ca_0$. Nous pouvons définir la forme linéaire φ sur A_0

([1]) Z. Sawoń et A. Warzecha, *On the general form of subalgebras of codimension 1 of B-algebras with unit*, Studia Math. 29 (1968), p. 249-260.

qui à tout a dans A_0 associe $\lambda_a = \varphi(a)$, λ_a étant déterminé par la relation $aa_0 = a_1 + \lambda_a a_0$, où a_1 appartient à A_0. On vérifie facilement que φ est un homomorphisme sur A_0 et est non nulle car e est dans A_0 et $\varphi(e) = 1$. I_0 est alors le noyau de φ et est donc un idéal maximal de codimension 1 dans A_0 et $A_0 = I_0 + Ce$; et I_0 est de codimension 2 dans A.

Nous pouvons en déduire le théorème; deux cas peuvent se présenter:

1er cas. I_0 est contenu dans deux idéaux maximaux distincts I_1 et I_2 auxquels correspondent deux homomorphismes m_1 et m_2. I_0 étant de codimension 2 dans A est égal à $I_1 \cap I_2$ et A_0 est l'algèbre de A formée des éléments qui donnent la meme valeur à m_1 et m_2.

La forme linéaire l de noyau A_0 est donc égale à

$$l(a) = c[m_1(a) - m_2(a)] \quad \text{pour tout } a \text{ de } A.$$

2me cas. I_0 est contenu dans un seul idéal maximal I auquel correspond l'homomorphisme m.

Lemme. *Soit I_0 un idéal contenu dans un seul idéal maximal I, si I_0 est de codimension 1 dans I, alors $I^2 \subset I_0$.*

Soit $I' = \{a; a \in A, aI \subset I_0\}$; I' est un idéal contenant I_0 donc contenu dans I.

Soit a_0 dans I tel que $I = I_0 + Ca_0$.

On a les deux équivalences suivantes:

$$I' = I \Leftrightarrow a_0 \in I' \qquad a \in I' \Leftrightarrow aa_0 \in I_0.$$

Or $a_0^2 = \lambda a_0 + a_1$ où a_1 est dans I_0.

Soit $a_0[a_0 - \lambda e] \in I_0$; donc $a_0 - \lambda e \in I' \subset I$. Comme a_0 est dans I, on doit avoir $\lambda = 0$; alors a_0 est dans I', $I' = I$ et le lemme est démontré.

La forme linéaire l définissant A_0 est donc nulle sur I^2. Elle a la forme 3 du théorème car

$$l(ab) - m(a)l(b) - m(b)l(a) = l[(a - m(a)e)(b - m(b)e)] = 0.$$

Le théorème est démontré.

Les formes linéaires de la forme 3 du théorème sont des dérivations en m. Elles s'identifient aux formes linéaires sur I, nulles sur I^2 donc aux formes linéaires sur l'espace quotient I/I^2.

Nous allons construire un contre exemple au problème suivant posé dans le travail cité:

Pour toute dérivation ponctuelle l en un point m du spectre, existe-t-il une suite de nombres complexes c_n et deux suites m_n, m_n' de points du spectre tels que pour tout a de A

$$l(a) = \lim_{n\to\infty} c_n[m_n(a) - m_n'(a)] \text{ ?}$$

Lemme. *Si de telles suites existent, m_n et m_n' tendent vers m pour la topologie de Gelfand.*

Si a est un élément de I n'appartenant pas à I_0,

$$l(a) \neq 0 \quad l(a^2) = l(a^3) = 0.$$

Donc

$$c_n[m_n(a) - m_n'(a)] \to l(a) \neq 0,$$
$$c_n[m_n^2(a) - m_n'^2(a)] \to 0,$$
$$c_n[m_n^3(a) - m_n'^3(a)] \to 0.$$

Soit

$$\frac{m_n^2(a) - m_n'^2(a)}{m_n(a) - m_n(a)} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{m_n^3(a) - m_n'^3(a)}{m_n(a) - m_n(a)} \to 0$$

d'où

$$m_n(a) + m_n'(a) \to \infty \quad \text{et} \quad m_n'(a)[m_n(a) + m_n'(a)] + m_n^2(a) \to 0;$$

$m_n'(a)$ étant borné, $m_n^2(a)$ doit tendre vers zéro. Donc $m_n(a)$ et $m_n'(a)$ tendent vers zéro pour tout a de I, non dans I_0.

Si a appartient à I_0, a s'écrit $a = a_1 + a_2$ où a_1 et a_2 sont dans I et non dans I_0, donc $m_n(a)$ et $m_n'(a)$ tendent vers zéro pour tout a dans I et $m_n(a)$ et $m_n'(a)$ tendent respectivement vers $m(a)$ et $m'(a)$ pour tout a de A; par définition de la topologie de Gelfand, le lemme est démontré.

Considérons alors l'algèbre A des fonctions analytiques à l'intérieur du disque unité, continues sur le disque fermé D et telles qu'à l'origine les p premières dérivées ($p \geqslant 3$) soient nulles. Le spectre de cette algèbre est D. Soit I l'idéal des fonctions nulles en 0; l'idéal I^2 est de codimension p dans I, l'espace des dérivations au point 0, qui s'identifie à l'espace des formes linéaires sur I/I^2 est de dimension p. Une dérivation l est déterminée par la donnée de p nombres tels que $l(z^{p+q}) = a_q$, $0 \leqslant q \leqslant p-1$. Choisissons une dérivation l telle que a_0, a_1, a_2 soient non nuls ($p \geqslant 3$).

Si la conjecture était vraie, il existerait des suites c_n, a_n, b_n de nombres complexes tels que $c_n[a_n^{p+i} - b_n^{p+i}] \to a_i$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, et d'après le lemme a_n et b_n tendent vers zéro.

En utilisant l'identité

$$a_n^{p+1} - b_n^{p+1} = a_n[a_n^p - b_n^p] + b_n^q[a_n - b_n]$$

on en déduit que

$$b_n^{p+1}\frac{a_n - b_n}{a_n^{p+1} - b_n^{p+1}} \to \frac{a_2}{a_1} \quad \text{et} \quad b_n^p \frac{a_n - b_n}{a_n^p - b_n^p} \to \frac{a_1}{a_0}.$$

Soit

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n^{p+1}-b_n^{p+1}}{a_n^p-b_n^p}\to\frac{a_0}{a_2};$$

donc

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_1}{a_0}\to\frac{a_0}{a_2}$$

ce qui est impossible puisque b_n tend vers zéro.

UNIVERSITÉ DE PARIS
FACULTÉ DES SCIENCES, D'ORSAY

Reçu par la Rédaction le 17. 7. 1967

STUDIA MATHEMATICA, T. XXX. (1968)

A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras

by

W. ŻELAZKO (Warszawa)

It was shown[1] that if A is a commutative complex Banach algebra with unit element, then a functional $f\in A^*$ is a multiplicative linear functional on A if (and only if)

$$f(x)\in\sigma(x) \tag{1}$$

for every $x\in A$, where $\sigma(x)$ denotes the spectrum of an element x. In this paper we extent this result onto non-commutative Banach algebras. Our result is based upon the following, purely algebraic fact:

THEOREM 1. *Let A be a real or complex algebra with unit e. Let f be a linear functional on A such that its restriction to any subalgebra of A generated by single element and containing e is a multiplicative linear functional. Then f is a multiplicative and linear functional on the algebra A.*

Proof. By our assumptions we have

$$f(e)=1 \tag{2}$$

and

$$f(x^2)=f(x)^2 \tag{3}$$

for every $x\in A$. Consequently,

$$f[(x+y)^2]=[f(x)+f(y)]^2,$$

or

$$f(xy+yx)=2f(x)f(y) \tag{4}$$

for every $x,y\in A$. It follows that if we set

$$x\circ y=\tfrac{1}{2}(xy+yx)$$

we obtain a (non-associative) multiplication on A such that

$$f(x\circ y)=f(x)f(y).$$

---

(1) See J.-P. Kahane and W. Żelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math. 29 (1968), p. 339-340.