For $u \geqslant 0$, $M^{-1} = N$, yet M satisfies the B1* condition but N does not. N satisfies D, but M does not; and M satisfies I, but N does not.

Example 3. Let $M(u) = |u|^{1/2}$. M satisfies both conditions C and D, but not condition I.

References

[1] T. Itô, *A generalization of Mazur-Orlicz theorem on function spaces*, J. Fac. Sci. Hokkaidô Univ. (I) 15 (1961), Nos. 3-4, p. 221-232.

[2] J. Musielak and W. Orlicz, *On generalized variations* (*I*), Studia Math. 18 (1959), p. 11-41.

[3] — *On modular spaces*, ibidem 18 (1959), p. 49-65.

[4] H. Nakano, *Modulared semi-ordered linear spaces*, Tokyo 1950.

SALEM STATE COLLEGE AND WAYNE STATE UNIVERSITY

Reçu par la Rédaction le 24. 4. 1967

STUDIA MATHEMATICA, T. XXX. (1968)

Sur des théorèmes de S. Banach et de L. Schwartz concernant le graphe fermé

par

A. MARTINEAU (Nice)

Il s'agit ici d'une généralisation du théorème du graphe fermé dans la direction suggérée par A. Grothendieck dans sa thèse [6].

La première solution à ce problème a été fournie par W. Słowikowski [14] suivi de D. A. Raikov [11] une autre solution a été donnée par Laurent Schwartz [13] qui s'appuie sur sa théorie de l'intégration et un lemme de A. Douady, mais qui ne recouvre pas exactement la conjecture de Grothendieck. Le premier pas dans le sens de la conjecture de Grothendieck a été fait par M. Słowikowski, puis M. Raikov a donné une solution complète. L'énoncé de Schwartz est particulièrement suggestif et ma principale contribution [9] a été d'en fournir une nouvelle démonstration puisée dans l'ouvrage de Banach [1]. Je donne ici la plus grande extension possible à cette méthode.

1. Remarques sur la théorie de la catégorie. Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, tous les espaces que je considère sont séparés (terminologie Bourbaki). Je suis généralement la terminologie et les notations de cet auteur.

Une partie Y d'un espace topologique X est dite *rare* si elle est incluse dans un fermé sans point intérieur; elle est *maigre* si elle est réunion dénombrable de parties rares (1-ère catégorie chez Baire et chez les Polonais). L'espace X est dit *non maigre* s'il n'est pas un sous-ensemble maigre de lui-même. L'espace X est dit *espace de Baire* si tout ouvert non vide de X est non maigre.

Théorème 1. *Soit Y une partie de X. On désigne par $D(Y)$ l'ensemble des points x de X tels que pour tout voisinage V de x l'ensemble $V \cap Y$ soit non maigre. On a*:

(α) $D(Y) \subset \overline{Y}$.

(β) *Si* $Y_1 \subset Y_2$, $D(Y_1) \subset D(Y_2)$.

(γ) $D(Y)$ *est fermé.*

(δ) *Pour que* $O(Y) = \overset{\circ}{\widehat{D(Y)}} = \emptyset$ *il faut et il suffit que* Y *soit un ensemble maigre.*

(ε) $Y \cap CD(Y)$ *est un ensemble maigre.*

(ζ) $O(Y)$ *est le plus grand ouvert dont tout sous-ensemble ouvert rencontre* Y *suivant un ensemble non maigre.*

(η) *Si* Y *est réunion d'une suite de parties* Y_n, $D(Y)$ *contient* $\bigcup_n D(Y_n)$ *et en diffère au plus par un ensemble maigre.*

Démonstration. Toutes ces propriétés sont connues. (Cf. par exemple Kuratowski [7], et [9] pour la propriété (η).)

2. Les espaces K-sousliniens.

A. Espaces polonais. Rappelons que selon N. Bourbaki, on dit qu'un espace P est *polonais* s'il est homéomorphe à un espace métrique complet de type dénombrable (séparable). Cette catégorie a les propriétés de stabilité suivantes:

(a) tout sous-espace fermé d'un espace polonais est un espace polonais;

(b) le produit d'une famille dénombrable d'espaces polonais est un espace polonais;

(c) la somme d'une famille dénombrable d'espaces polonais est un espace polonais;

(d) tout sous-espace ouvert d'un espace polonais est un espace polonais.

Soit $\boldsymbol{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels muni de sa topologie discrète. C'est un espace polonais, donc $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ est aussi un espace polonais. On a la propriété:

(e) tout espace polonais est image continue de $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$. Les résultats (a) à (d) sont dans le texte de l'ouvrage de Bourbaki [3], le résultat (e) s'y trouve en exercice (cf. aussi Kuratowski [7], p. 348).

B. Espaces sousliniens. On appelle *espace souslinien* [8], [13] un espace topologique X image continue d'un espace polonais. On peut encore dire que X *est image continue de* $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$. Un sous-espace Y de X est dit *souslinien* s'il est un espace souslinien.

Des propriétés (a), (b), (c) et (d) résultent alors les propriétés de stabilité suivantes:

(0^1) l'image continue d'un espace souslinien est un espace souslinien;

(a^1) un sous-espace fermé d'un espace souslinien est souslinien;

(b^1) le produit d'une famille dénombrable d'espaces sousliniens est souslinien;

(c^1) la somme d'une famille dénombrable d'espaces sousliniens est souslinien;

(d^1) tout sous-espace ouvert d'un espace souslinien est souslinien.

Il résulte de la conjonction de tout ceci que si on désigne par *ensemble borélien* d'un espace X un élément de la plus petite tribu d'ensembles stable par réunion dénombrable et par *passage au complémentaire*, contenant les fermés, que tout borélien d'un espace souslinien est souslinien.

Remarque. Le résultat de l'opération $\mathscr{A}$ sur une famille d'espaces sousliniens donne un espace souslinien (cf. [7]).

C. Espaces K-sousliniens. Notre définition est adaptée de celle de Frolik [5] et de Rogers [12]. Soient U et V deux espaces topologiques et φ une application de U à valeurs dans $K(V)$ l'ensemble des compacts de V. Nous dirons que φ est *semi-continue* si pour tout $u \in U$ et tout $\mathscr{V}$ ouvert contenant $\varphi(u)$ il existe un voisinage $\mathscr{W}$ de u tel que $w \in \mathscr{W}$ entraîne $\varphi(w) \subset \mathscr{V}$.

Un espace X est dit *K-souslinien* s'il existe un espace polonais P, une application φ de P dans $K(X)$ semi-continue, tels que

$$X = \bigcup_{p \in P} \varphi(p).$$

On vérifie aisément que les espaces K-analytiques de Choquet [4] sont K-sousliniens, et Rogers [12] montre que si X est complètement régulier, c'est justement le cas qui nous intéresse dans la suite, cette notion équivaut à celle de Choquet.

La catégorie des espaces K-sousliniens jouit des propriétés suivantes:

(0^2) l'image continue d'un espace K-souslinien est un espace K-souslinien;

(a^2) un sous-espace fermé d'un espace K-souslinien est K-souslinien;

(b^2) le produit d'une famille dénombrable d'espaces K-sousliniens est K-souslinien.

(c^2) la somme d'une famille dénombrable d'espaces K-sousliniens est un espace K-souslinien.

Mais le (d^2) analogue de (d^1) n'est pas vrai en général car si X est K-souslinien et si Y est ouvert dans X pour $F \in K(X)$, $F \cap Y \notin K(Y)$ en général. Pour avoir un exemple on prendra pour Y un espace discret non dénombrable et pour X le compactifié de Y. L'espace X est K-souslinien mais son ouvert Y ne l'est pas.

Désignons par ensemble *F-borélien* de X tout élément de la plus petite tribu stable par réunion dénombrable, intersection dénombrable et contenant les fermés de X.

Alors il résulte des propriétés (0^2), (a^2), (b^2) et (c^2) que *si X est K-souslinien, tout sous-ensemble F-borélien de X est K-souslinien.*

Remarque. Plus généralement, on peut prouver que le résultat de l'opération $\mathscr{A}$ appliquée aux fermés de X donne un ensemble K-souslinien.

Notons que tout espace souslinien est K-souslinien.

On a le résultat suivant qui généralise un théorème classique de Nikodym [10]:

Théorème 2. *Soit Y K-souslinien dans X; alors Y diffère de $D(Y)$ (donc de $O(Y)$) par un ensemble maigre.*

Démonstration. Puisque Y est K-souslinien, il existe une application φ de N^N dans $K(X)$ semi-continue telle que $Y = \bigcup_{i\in N^N} \varphi(i)$.

Si $i \in N^N$, $i = (i_0, \ldots, i_n, \ldots)$, nous noterons par $i_{(N)}$ la suite $(i_0, \ldots, i_N)$. On pose:

$$B_{i_{(N)}} = \bigcup_j \varphi(j), \quad j_{(N)} = i_{(N)}.$$

Je dis qu'on a $\varphi(i) = \bigcap_N \bar{B}_{i_{(N)}}$.

En effet, pour tout ouvert $\mathscr{V}$ contenant $\varphi(i)$ il existe un N tel que $j_{(N)} = i_{(N)}$ entraîne $\varphi(j) \subset \mathscr{V}$, donc

$$\bigcup_j \varphi(j) \subset \mathscr{V}, \quad j_{(N)} = i_{(N)}.$$

Et comme notre espace est séparé, que $\varphi(i)$ est compact, on a

$$\bigcap_{\mathscr{V}\supset\varphi(i)} \overline{\mathscr{V}} = \varphi(i).$$

En conséquence, Y résulte de l'opération $\mathscr{A}$ effectuée sur les fermés de X. Or, il est connu (théorème de Nikodym [10]; cf. aussi [7]) que la propriété de Baire (c'est la propriété décrite par le théorème 2) est un invariant de l'opération $\mathscr{A}$, c.q.f.d.

3. La somme de deux ensembles satisfaisant à la condition de Baire. On a la propriété suivante bien connue (cf. par exemple Bourbaki [3], exerc. 27, p. 119):

Proposition. *Soit G un groupe topologique, A une partie de G non maigre qui satisfait à la propriété de Baire. Alors G est un espace de Baire et $A\cdot A^{-1}$ est un voisinage de l'élément neutre.*

Démonstration. L'ouvert $O(A)$ est non maigre et tel que tout ouvert inclus rencontre A suivant un ensemble non maigre donc est non maigre. Alors si V est un voisinage ouvert arbitraire de l'élément neutre de G et si $y \in O(A)$, $V\cdot y \cap O(A)$ est non maigre donc aussi V. En conséquence, tout ouvert de G est non maigre ce qui démontre la première partie de la proposition. Soit $y_0 \in O(A) \cap A$; $O(A\cdot y_0^{-1}) = O(A)\cdot y_0^{-1}$. Si $z \in O(A)\cdot y_0^{-1}$, $z\cdot O(A)\cdot y_0^{-1} \cap O(A)\cdot y_0^{-1}$ est non maigre. Mais $z\cdot O(A)\cdot y_0^{-1}$ diffère de $z\cdot A\cdot y_0^{-1}$ par un ensemble maigre, et de même pour $O(A)\cdot y_0^{-1}$, donc $z\cdot A\cdot y_0^{-1} \cap A\cdot y_0^{-1} \neq \emptyset$. C'est-à-dire qu'il existe $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ tels que $z\cdot x_1\cdot y_0^{-1} = x_2\cdot y_0^{-1}$ d'où $z = x_2\cdot x_1^{-1}$. Ceci montre que $O(A)\cdot y_0^{-1} \subset A\cdot A^{-1}$, c.q.f.d.

4. Application à des théorèmes du type du graphe fermé. Dans la suite, nous considérons les catégories suivantes:

La catégorie [GT] des groupes topologiques avec comme morphismes, les homomorphismes algébriques et continus.

La catégorie [EVTk] des espaces vectoriels topologiques sur un corps topologique k avec comme morphismes les applications linéaires continues.

La catégorie [EVTNk] des espaces vectoriels topologiques sur un corps topologique k dont la topologie peut être définie par une famille de semi-normes (ce qui impose des conditions à k). Un élément de cette dernière catégorie sera dit abusivement *espace localement convexe.*

Nous dirons qu'un groupe G est de *type* $K\cdot\beta$ s'il est limite inductive dans [GT] de groupes K-sousliniens et de Baire. C'est-à-dire que si G_α est la famille de définition, u_α le morphisme de G_α dans G, une application u de G dans F autre groupe topologique est un morphisme si et seulement si $u \circ u_\alpha$ est un morphisme pour tout α.

Nous dirons que G est de *type* β si les G_α sont *sousliniens* et de Baire.

Nous dirons qu'un espace vectoriel topologique E est *K-ultrabornologique* s'il existe une topologie de type $K\cdot\beta$ sur E, et si la topologie de E est la plus fine des topologies du type [EVTNk] moins fine que cette topologie. Une limite inductive dans [EVTNk] d'espaces E_α *K-sousliniens* et de Baire est, en particulier, K-ultrabornologique.

L'espace E est ultrabornologique si chacun des E_α est souslinien.

Pour travailler sur un corps quelconque ou dans le cas de [GT], j'ai besoin d'une information supplémentaire sur les espaces K-sousliniens, information inutile dans le cas de [EVTk] si k est valué non discret.

On dit qu'un espace X est un *espace de Lindelöf* si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable. Un espace polonais est un espace de Lindelöf.

Proposition 2. *Tout espace K-souslinien X est un espace de Lindelöf* [12].

Démonstration. L'espace X est défini par $\varphi: P \to K(X)$, P étant un espace polonais convenable. Soit ω_α, $\alpha \in A$, un recouvrement quelconque de X. Pour chaque $p \in P$, $\varphi(p)$ est compact. Donc, il existe une partie finie $F(p)$ de A telle que $\varphi(p) \subset \Omega_p$, où $\Omega_p = \bigcup_{\alpha\in F(p)} \omega_\alpha$.

Il existe un voisinage $\mathscr{V}(p)$ de p dans P tel que $q \in \mathscr{V}(p)$ entraîne $\varphi(q) \subset \Omega_p$. Du recouvrement de P par les $\mathscr{V}(p)$ on extraira un recouvrement dénombrable $\mathscr{V}(p_1), \ldots, \mathscr{V}(p_n), \ldots$ et $\bigcup_{n\in N} F(p_n)$ est une partie dénombrable de A qui répond à la question, c.q.f.d.

On peut alors étendre un théorème de Banach [1], p. 230.

THÉORÈME 3. *Soient G_1 et G_2 deux groupes topologiques G_1 de type $K\cdot\beta$, G_2 K-souslinien.*

(a) *Si u est un homomorphisme algébrique de G_1 dans G_2, de graphe F-borélien, alors u est continu.*

(b) *Soit v un homomorphisme algébrique continu de G_2 sur G_1; alors v est un homomorphisme topologique.*

Démonstration. (a) Soit V un voisinage de l'élément neutre de G_2. On peut supposer V fermé et $V = V^{-1}$.

Nos hypothèses entraînent, si G_a, $a\in A$, est une famille de définition de G_1, que pour tout a, $(u\circ u_a)^{-1}(V)$ est K-souslinien dans G_a. En effet, l'application u_a étant continue, l'image par $(u_a,\ \text{Identité})^{-1}$ d'un fermé de $G_1\times G_2$ dans $G_a\times G_2$ est fermée, donc l'image d'un F-borélien est un F-borélien dans $G_a\times G_2$, comme en outre les images réciproques commutent aux intersections et réunions.

En conséquence, le graphe Γ_a de $u\circ u_a$ dans $G_a\times G_2$ est F-borélien. Soit $Y = (u\circ u_a)^{-1}(V)$. Cet ensemble est la projection sur G_a de $X = (E_a\times V)\cap\Gamma_a$. Par hypothèse, G_a est K-souslinien donc $G_a\times G_2$ aussi, donc aussi le sous-ensemble F-borélien X de $G_a\times G_2$, donc aussi enfin la projection Y de X sur G_a.

Maintenant, soit W symétrique ($W = W^{-1}$) fermé tel que $W\cdot W\subset V$.

L'image Z_a de G_a dans G_2 par $u\circ u_a$ est la projection sur G_2 de Γ_a donc est un ensemble K-souslinien. Donc Z_a est un espace de Lindelöf. Les ensembles $g\cdot(\mathring{W}\cap Z_a)$, g parcourant Z_a, forment un recouvrement ouvert de Z_a. Donc, on peut en extraire un sous-recouvrement dénombrable soit $\big(g_n\cdot(\mathring{W}\cap Z_a)\big)_{n=1,2,\ldots}$. Si

$$T_n = (u\circ u_a)^{-1}\big(g_n\cdot(W\cap Z_a)\big),\qquad \bigcup_n T_n = G_a,$$

donc l'un des T_n est non maigre. Mais ils sont tous égaux donc $T = (u\circ u_a)^{-1}(W)$ est non maigre souslinien; $T\cdot T^{-1}$ est donc un voisinage de l'élément neutre et Y aussi, c.q.f.d.

(b) Soit N le noyau de v. L'application v^{-1} de G_1 dans G_2/N a un graphe fermé. G_2/N est K-souslinien comme quotient d'un K-souslinien donc v est continue, c.q.f.d.

En exemple des hypothèses, le théorème s'applique à G_1 localement compact, G_2 localement compact et dénombrable à l'infini. Pour voir que G_1 est dans la classe $K\cdot\beta$ on remarquera que le sous-groupe N_W engendré par un voisinage compact W de l'élément neutre de G_1 est dénombrable à l'infini et ouvert et fermé. Alors G_1/N_W est un espace discret.

Si F est une partie finie de G_1/N_W, le sous-groupe engendré par N_W et des représentants de F dans G_1 est un sous-groupe G_F de G_1, localement compact et dénombrable à l'infini. On a alors $G_1 = \varinjlim_F G_F$. On remarquera en outre que, dans ce cas, les hypothèses sont les meilleures possibles en prenant pour G_1 un groupe compact non discret et pour G_2 le groupe G_1 muni de la topologie discrète.

THÉORÈME 4 (Variante). *G_1 est de type β, G_2 souslinien, alors, si $u\colon G_1\to G_2$ a un graphe borélien, u est continue.*

Démonstration. Comme précédemment, on voit que Γ_a est borélien dans $G_a\times G_2$, mais nos espaces sont sousliniens donc Γ_a est souslinien. On achève comme dans le théorème 3. Ce résultat s'applique par exemple au cas considéré par Banach.

Le théorème 3 s'applique en particulier de façon utile au cas des espaces vectoriels topologiques *sur tout corps valué complet séparable* en particulier au cas où le corps est *localement compact.*

THÉORÈME 5 (Du graphe borélien de Schwartz [13]). *E_1 et E_2 sont deux espaces localement convexes sur k, E_1 est ultrabornologique, E_2 est souslinien, alors:*

(a) *si u est linéaire de E_1 dans E_2 et de graphe borélien, elle est continue;*

(b) *si v est linéaire surjective de E_2 sur E_1, c'est un homomorphisme.*

Démonstration. Je tiens à souligner que cet énoncé de Schwartz est la source de tout ce travail.

Vu la définition de la topologie de E_1, il suffit de vérifier que u est continue de E_1 muni de sa topologie β dans E_2 et cela résulte du théorème 4. Le point (b) résulte de (a) comme dans le théorème 3 car le quotient de E_2 par le noyau N de v est un élément de la catégorie [EVTNk], c.q.f.d.

On remarquera que ce théorème, lorsqu'il n'est pas vide, impose des conditions à k.

Maintenant, nous supposons que $k = \boldsymbol{R}$ ou $k = \boldsymbol{C}$. Dans un *vrai* espace vectoriel topologique, localement convexe H nous disons qu'un ensemble X est *C-borélien* s'il appartient à la plus petite tribu d'ensembles stable par réunion dénombrable, intersection dénombrable, engendrée par les convexes fermés. Par exemple, si H est un espace de Banach séparable, on a:

$$\text{boréliens} = F\text{-boréliens} = C\text{-boréliens}.$$

Pour vérifier cela, il me suffit de confronter les deux extrêmes, or tout ouvert est réunion dénombrable de boules fermées.

Soit $H_1\times H_2$ un produit de deux espaces localement convexes sur $k = \boldsymbol{R}$ ou $k = \boldsymbol{C}$. Notons par $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ les topologies de H_1 et de H_2. Les C-boréliens pour $\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$ sont aussi les C-boréliens pour $\mathcal{T}_1\times\sigma(H_2, H_2')$ car toute forme linéaire continue sur $H_1\times H_2$ pour $\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$ est continue sur $H_1\times H_2$ pour $\mathcal{T}_1\times\sigma(H_2, H_2')$.

Si u_3 est une application linéaire continue de H_3 dans H_1, où H_3 est un troisième espace localement convexe, l'image réciproque d'un ensemble C-borélien de $H_1 \times H_2$ par $(u_3, \text{identité})^{-1}$ dans $H_3 \times H_2$ est clairement C-borélienne dans $H_3 \times H_2$ donc C-borélienne pour $(\mathcal{T}_3, \sigma(H_2, H_2'))$.

THÉORÈME 6. *E_1 et E_2 sont définis sur $k = \boldsymbol{R}$ ou $k = \boldsymbol{C}$ localement convexes; E_1 est K-ultrabornologique et E_2 est K-souslinien pour sa topologie affaiblie; alors:*

(a) *si u est linéaire de E_1 dans E_2 et de graphe C-borélien, u est continue;*

(b) *toute application linéaire continue v surjective de E_2 sur E_1 est un homomorphisme.*

Démonstration. Elle est complètement analogue. On peut prendre V convexe fermé. Le graphe Γ_a est C-borélien dans chaque $E_a \times E_2$, donc $(E_a \times V) \cap \Gamma_a$ est C-borélien dans $E_a \times E_2$ donc C-borélien dans $E_a \times E_2$ pour la topologie $(\mathcal{T}_a, \sigma(E_2, E_2'))$ donc F-borélien pour cette topologie en conséquence K-souslinien, donc $(u \circ u_a)^{-1}(V)$ est K-souslinien convexe et on achève comme précédemment.

Remarque. On peut affaiblir encore l'hypothèse sur le graphe en remplaçant les opérations d'intersections dénombrables et réunions dénombrables par l'opération $\mathcal{A}$.

Remarquons que le résultat de stabilité obtenu est nettement plus fort que celui proposé par A. Grothendieck, du moins dans le cas séparable. Nous espérons revenir prochainement sur ces questions.

Travaux cités

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. 3. *Groupes topologiques*; Chap. 4, *Nombres réels*, Paris 1960.

[3] — *Topologie générale*, Chap. 9, *Utilisation des nombres réels en topologie générale*, Paris 1958.

[4] G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier 5 (1953), p. 131-295.

[5] Z. Frolík, *On the descriptive theory of sets*, Czech. Math. J. 13 (88) (1963), p. 335-359.

[6] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of A. M. S. 16 (1955).

[7] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952.

[8] N. Lusin, *Les ensembles analytiques*, Paris 1930.

[9] A. Martineau, *Sur le théorème du graphe fermé*, C. R. Acad. Sc. Paris 263, série A, p. 870-871.

[10] O. Nikodym, *Sur une propriété de l'opération A*, Fund. Math. 7 (1925), p. 149-154.

[11] Д. А. Гайков, *Двусторонная теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств*, Сибирский мат. ж. 7 (1966), p. 353-372.

[12] C. A. Rogers, *Analytic sets in Hausdorff spaces*, Mathematika 11, part june (1964), p. 1-8.

[13] L. Schwartz, *Sur le théorème du graphe fermé*, C. R. Acad. Sc. Paris 263, série A, p. 602-605.

[14] W. Słowikowski, *On continuity of inverse operators*, Bull. Amer. Math. Soc. 67. no. 5, p. 467-470.

UNIVERSITÉ DE NICE

Reçu par la Rédaction le 29. 4. 1967