clearly also reduced. If $(V, W)$ is a reduced $\theta$-system, then it is the sum of its subsystems of the types $\mathrm{II}_\theta^m$. Therefore if $\eta \in \tilde{C}$ and $\eta \neq \theta$, then $b_\eta V = W$. Moreover,

$$(V, W)_\eta = (V, W) \cap (V, W)_\eta = (V, W)_\theta \cap (V, W)_\eta = (0, 0),$$

and $\eta$ is not an eigenvalue of $(V, W)$. Thus $(V, W)$ is a non-singular system, and (provided it does not vanish) it has the single eigenvalue $\theta$. All questions relating to the structure of $(V, W)$ are equivalent to questions about the $C[\lambda]$-module $V$ defined by

$$p(\lambda)v = p\big(T(b_\eta)^{-1}T(b_\theta)\big)v, \quad p(\lambda) \in C[\lambda], \ v \in V.$$

The latter is a reduced $\lambda$ primary module. Taking into account the former reduction we see that the study of the structure of an arbitrary eigenvalue system is reduced to the study of such modules. Note though that even a reduced eigenvalue system may be singular (this is the case if and only if every $\theta$ in $\tilde{C}$ is an eigenvalue) and not correspond to a module over $C[\lambda]$. The reader will observe that if $(V, W)$ is a reduced $\theta$-system, then a subsystem spanned by chains representing bases of $Q\mathrm{II}_\theta^m(a, b; V, W)$, $m = 1, 2, \ldots$, corresponds to a basic submodule of a $\lambda$-primary module attached to $(V, W)$. However, as the present work shows, the scope of the method of chains is much larger.

**References**


[1] N. Aronszajn, *Quadratic forms on vector spaces*, Proc. Intern. Symposium on Linear Spaces 1960, Jerusalem 1961.

[2] U. Fixman, *On algebraic equivalence between pairs of linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964), p. 424-453.

[3] L. Fuchs, *Abelian groups*, Budapest 1958.

[4] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Vol. II, New York 1959.

[5] L. Kronecker, *Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen*, S.-B. Akad., Berlin 1890, p. 1225-1237.

[6] W. Ledermann, *Reduction of singular pencils of matrices*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 4 (1935), p. 92-105.

[7] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 27 (1942).

[8] O. Ore, *On the foundation of abstract algebra II*, Ann. of Math 37 (1936), p. 265-292.

[9] H. W. Turnbull, *On the reduction of singular matrix pencils*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 4 (1935), p. 67-76.

[10] — and A. C. Aitken, *An introduction to the theory of canonical matrices*, London — Glasgow 1932.


*Reçu par la Rédaction le 5. 6. 1967*

STUDIA MATHEMATICA, T. XXX. (1968)

# Eigenschaften Greenscher Funktionen nicht-selbstadjungierter allgemeiner elliptischer Operatoren

von

HANS TRIEBEL (Jena)

In [10] wurden Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen spezieller elliptischer selbstadjungierter Operatoren angegeben, wobei sich die Betrachtungen auf das Dirichletsche Randwertproblem beschränkten. Weitere Aussagen über Greensche Funktionen allgemeiner elliptischer Differentialoperatoren mit glatten Koeffizienten, die zumeist lokaler Natur sind, und über Eigenwertverteilungen elliptischer Operatoren findet man bei Berezanskij [4], III, § 5, sowie bei Agmon [2].

Die in [11] entwickelten Methoden gestatten nun, Aussagen über Greensche Funktionen nicht-selbstadjungierter Differentialoperatoren mit allgemeinen Randbedingungen zu machen, die notwendigen und hinreichenden Charakter haben. Wie üblich wird die Bezeichnung „nicht-selbstadjungiert" im Sinne von „nicht notwendig selbstadjungiert" verwendet, die selbstadjungierten Operatoren sind also nicht ausgeschlossen.

Abschnitt 1 beginnt mit einer Zusammenstellung bekannter Aussagen über elliptische Differentialoperatoren

$$Au = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u$$

mit normalen (mit $A$ verträglichen) Randbedingungen

$$B_j u = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha u, \quad j = 1, \ldots, m; \ m_j < 2m,$$

$$D(A) = \{u \mid u \in W_2^{2m}(\Omega),\ B_j u|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

$\Omega$ ist hierbei ein beschränktes Gebiet im $R_n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$. Ferner wird gezeigt (Satz 1), daß $(AA^*+E)^{-1}$ und $(A^*A+E)^{-1}$ nicht zu $\mathfrak{S}_{n/4m,p}$, $0 < p < \infty$, aber zu $\mathfrak{S}_{n/4m,\infty}$ gehören. Die Operatoren werden hierbei als Abbildungen von $L_2$ in $L_2$ betrachtet. (Die Klassen $\mathfrak{S}_{q,p}$ wurden in [11] definiert.) (1)

Ist $A$ ein Operator mit nicht leerer Resolventenmenge, es sei z. B. 0 ein Element dieser Menge, so wird im Abschnitt 2 u. a. untersucht, unter welchen Bedingungen sich $A^{-1}$ in der Form

$$(A^{-1}f)(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y)\, dy$$

mit $G(x, y) \in W_2^{\varrho}(\Omega \times \Omega)$, $\varrho \geqslant 0$, $\varrho$ nicht notwendig ganzzahlig, darstellen läßt. Es zeigt sich, daß eine solche Darstellung dann und nur dann möglich ist, wenn

$$2m - \frac{n}{2} > \varrho$$

gilt. Ein entsprechender Satz läßt sich für $\varrho < 0$ herleiten. Die Forderung, daß die Resolventenmenge von $A$ nicht leer ist, ist entbehrlich, wenn man unter Ausschaltung der endlichdimensionalen Nullräume der Operatoren $A$ und $A^*$ einen verallgemeinerten Umkehroperator $A_0^{-1}$ konstruiert. Für diesen Operator $A_0^{-1}$ bleibt der obige Satz richtig (Abschnitt 2).

Abschnitt 3 enthält Bemerkungen zum selbstadjungierten Fall. Die erzielten Ergebnisse verallgemeinern Resultate der Arbeit [10]. Ferner wird die Richtigkeit eines in [11] formulierten Satzes ([11], Satz 6) nachgewiesen.

**1. Allgemeine elliptische Differentialoperatoren und Eigenwertverteilungen.** In diesem Abschnitt sei $\Omega$ ein beschränktes Gebiet im $n$-dimensionalen reellen euklidischen Raum $R_n$ mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$, $\partial\Omega \in C^\infty$. Es werden die in der Theorie der Differentialoperatoren üblichen Bezeichnungen verwendet.

Es wird der Differentialausdruck

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u, \qquad a_\alpha(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

betrachtet, $a_\alpha(x)$ komplexwertig. $L$ soll regulär-elliptisch sein, also folgenden Bedingungen genügen:

(1) Ein kompakter Operator $K$, der einen separablen Hilbertraum in sich abbildet, gehört genau dann zur Klasse $\mathfrak{S}_{q,p}$ $0 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, wenn die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^p i^{p/q-1}$ konvergiert. Dabei sind $s_i$ die Approximationszahlen des Operators $K$ ([5], S. 48). Entsprechend gehört ein Operator $K$ zur Klasse $\mathfrak{S}_{q,\infty}$ $0 < q < \infty$, wenn die Zahlen $s_i i^{1/q}$ gleichmäßig beschränkt sind. Es gilt $\mathfrak{S}_{q,p} \subseteq \mathfrak{S}_{q,p'}$ für $0 < q < \infty$ und $0 < p \leqslant p' \leqslant \infty$, ferner ist $\mathfrak{S}_{q,p} \subseteq \mathfrak{S}_{q',p'}$ für $0 < q < q' < \infty$, $0 < p \leqslant \infty$ und $0 < p' \leqslant \infty$ ([11], Lemma 2).



*(a) Für jeden Punkt $x, x \in \overline{\Omega}$, und jeden reellen Vektor $\xi = (\xi_1, \ldots \ldots, \xi_n) \neq 0$ sei*

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0.$$

*(b) Für jeden Punkt $x$, $x \in \partial\Omega$, und jeden Tangentialvektor $\vec{\tau}$ im Punkte $x$ an die Fläche $\partial\Omega$ besitze*

$$a(x, \vec{n}_x + \zeta\vec{\tau}) = a^+(\zeta) a^-(\zeta)$$

*als Polynom in $\zeta$ betrachtet genau $m$ Nullstellen mit positivem Imaginärteil, $a^+(\zeta)$, und genau $m$ Nullstellen mit negativem Imaginärteil, $a^-(\zeta)$. Dabei ist $\vec{n}_x$ die äußere Normale im Punkte $x$ bezüglich $\partial\Omega$.*

Neben $Lu$ werden die Ausdrücke

$$B_j u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} b_{j\alpha}(x) D^\alpha u, \qquad b_{j\alpha}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \qquad j = 1, \ldots, m,$$

betrachtet, $b_{j\alpha}(x)$ komplexwertig. Es sei

$$b_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m_j} b_{j\alpha}(x) \xi^\alpha, \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Die Ausdrücke $B_j u$ sollen folgenden Bedingungen genügen:

*(c) $0 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_m < 2m$. Für jedes $x \in \partial\Omega$ gelte*

$$b_j(x, \vec{n}_x) \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

*(d) Die Polynome $Q_j(\zeta) = b_j(x, \vec{n}_x + \zeta\vec{\tau})$ seien modulo $a^+(\zeta)$ für jeden Punkt $x, x \in \partial\Omega$, und jeden Tangentialvektor $\vec{\tau}$ im Punkte $x$ an $\partial\Omega$ linear unabhängig* (d. h., daß aus

$$\sum_{j=1}^{m} C_j Q_j(\zeta) = C(\zeta) a^+(\zeta),$$

$C(\zeta)$ Polynom in $\zeta$, stets $C_j = 0, j = 1, \ldots, m$, folgt). Der Operator

$$Au = Lu, \qquad D(A) = \{u \mid u \in W_2^{2m}(\Omega), \quad B_j u|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 1, \ldots, m\}$$

wird als allgemeiner elliptischer Differentialoperator bezeichnet. Solche Operatoren wurden u. a. von Agmon [2], [3] und Berezanskij [4], III, § 6, betrachtet.

*Eigenschaften allgemeiner elliptischer Differentialoperatoren.*

(I) Für $s = [s] \geqslant 0$ und $u \in W_2^{2m+s} \cap D(A)$ gilt

$$c_1 \|u\|_{W_2^{2m+s}} \leqslant \|Au\|_{W_2^s} + \|u\|_{L_2} \leqslant c_2 \|u\|_{W_2^{2m+s}}, \tag{1}$$

wobei $c_1$ und $c_2$ positive von $u$ unabhängige Konstanten sind ([4], S. 224).

(II) Der zu $A$ adjungierte Operator ist ebenfalls ein allgemeiner elliptischer Differentialoperator im obigen Sinne. Es existieren also Differentialausdrücke $B_j^+$, die den Forderungen (c) und (d) bezüglich des adjungierten Differentialausdruckes

$$L^+u = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\big(\overline{a_\alpha(x)}\,u\big)$$

genügen, so daß

$$A^*u = L^+u, \quad D(A^*) = \{u\,|\,u\in W_2^{2m},\ B_j^+u|_{\partial\Omega} = 0,\quad j = 1, \ldots, m\}$$

ist. Der Beweis dieser Behauptung läßt sich durch Kombination einiger Sätze aus dem Buch von Berezanskij [4] erbringen (Theorem 6.5, S. 234, Theorem 6.6, S. 236, und Lemma 6.6, S. 239).

(III) Der Nullraum des Operators $A$

$$N(A) = \{u\,|\,u\in D(A),\ Au = 0\}$$

ist endlichdimensional. Das folgt aus der Abschätzung (1) und der Kompaktheit der Abbildung von $W_2^{2m}$ in $L_2$.

(IV) Der Wertevorrat $R(A)$ des Operators $A$ ist abgeschlossen. Also ist

$$L_2(\Omega) = R(A)\oplus N(A^*) = R(A^*)\oplus N(A).$$

(V) Als Folgerung aus der letzten Eigenschaft erhält man, daß der Operator

$$A_0u = Au, \quad D(A_0) = R(A^*)\cap D(A) \tag{2}$$

als Operator von $R(A^*)$ in $R(A)$ betrachtet einen stetigen Umkehroperator $A_0^{-1}\in L\big(R(A), R(A^*)\big)$(²) besitzt, der als verallgemeinerte Resolvente des Operators $A$ im Punkte 0 bezeichnet werden soll ($R(A)$ und $R(A^*)$ werden hierbei als Unterräume von $L_2(\Omega)$ angesehen und dementsprechend normiert).

Es gilt nun

Satz 1. *Ist $A$ ein allgemeiner elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2m$, so gilt*

$$(AA^*+E)^{-1}\notin\mathfrak{S}_{n/4m,p} \text{ für } 0<p<\infty, \quad (AA^*+E)^{-1}\in\mathfrak{S}_{n/4m,\infty}, \tag{3}$$

$$(A^*A+E)^{-1}\notin\mathfrak{S}_{n/4m,p} \text{ für } 0<p<\infty, \quad (A^*A+E)^{-1}\in\mathfrak{S}_{n/4m,\infty}. \tag{4}$$

*Dabei werden $(AA^*+E)^{-1}$ und $(A^*A+E)^{-1}$ als Elemente von $L(L_2, L_2)$ betrachtet.*

(²) $L(B_1, B_2)$ ist die in der üblichen Weise normierte Menge der linearen und stetigen Operatoren, die einen Banachraum $B_1$ in einen Banachraum $B_2$ abbilden.



Beweis. $AA^*+E$ ist nach v. Neumann ein selbstadjungierter Operator ([1], S. 102). Aus der Eigenschaft (II) und der Formel (1) folgt für $u\in D(AA^*)$

$$\|AA^*u\|_{L_2}+\|u\|_{L_2} \geqslant c_3(\|AA^*u\|_{L_2}+\|A^*u\|_{L_2}+\|u\|_{L_2}) \geqslant c_4(\|A^*u\|_{W_2^{2m}}+\|u\|_{L_2}) \geqslant c_5\|u\|_{W_2^{4m}}, \tag{5}$$

wobei sämtliche Konstanten positiv und von der Wahl der Funktion $u$ unabhängig sind. Somit ist für $H = D(AA^*)$

$$\mathring{W}_2^{4m}(\Omega)\subset H\subset W_2^{4m}(\Omega), \tag{6}$$

wobei die Einbettungen stetig sind, wenn man $H$ in der üblichen Weise normiert. Schreibt man $U = (AA^*+E)^{-1}$, wenn man $(AA^*+E)^{-1}$ als unitären Operator, der $L_2(\Omega)$ auf $H$ abbildet, betrachtet, so ist

$$(AA^*+E)^{-1} = F_{H\to L_2}U.$$

Dabei ist $F_{H\to L_2}$ der Operator der Einbettung von $H$ in $L_2$.

Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus Satz 1 der Arbeit [11]. Für $(A^*A+E)^{-1}$ verläuft der Beweis analog.

**2. Greensche Funktionen elliptischer Differentialoperatoren.** Das Ziel des Abschnittes ist es, den Operator $A_0^{-1}$ aus dem ersten Abschnitt, Formel (2), als Integraloperator darzustellen. Dabei werden wieder die Bezeichnungen aus [11], insbesondere die dortige Definition 4, benutzt.

Satz 2. *$\Omega\subset R_n$ sei ein beschränktes Gebiet, $\partial\Omega\in C^\infty$. Ist $A$ ein allgemeiner elliptischer Differentialoperator und $A_0^{-1}\in L\big(R(A), R(A^*)\big)$ die früher konstruierte verallgemeinerte Resolvente im Punkte* 0, *so gilt*

*(a) Im Falle $m>n/4$*

$$(A_0^{-1}e)(x) = \int_\Omega G(x,y)e(y)\,dy, \quad e(y)\in R(A), \tag{7}$$

*mit $G(x,y)\in W_2^\varrho(\Omega\times\Omega)$ für $\varrho<2m-n/2$.*

*(b) Im Falle $m\leqslant n/4$ ist die Darstellung* (7) *richtig für $G(x,y)\in\mathring{W}_2^\varrho(\Omega\times\times\Omega)$ mit $\varrho<2m-n/2$.*

Beweis. Für $\varrho<0$ sind $W_2^\varrho$ und $\mathring{W}_2^\varrho$ die im Sinne von Lax adjungierten Räume zu $W_2^{-\varrho}$ und $\mathring{W}_2^{-\varrho}$, man vergleiche mit [11]. Nach Satz 1 und dem Lemma von Rellich [8], S. 335, sind $A^*A$ und $AA^*$ Operatoren mit reinem Punktspektrum, die Eigenwerte sind nicht negativ. Mit $\lambda_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$, werden die positiven Eigenwerte des Operators $A^*A$ bezeichnet, $f_i$ seien die zugehörigen Eigenfunktionen, $(f_i, f_j)_{L_2} = \delta_{ij}$,

$$A^*Af_i = \lambda_i^2 f_i, \quad \lambda_i>0.$$

Es sei $e_i = \lambda_i^{-1} A f_i \in D(A^*)$. Dann ist

$$AA^* e_i = \lambda_i^2 e_i \quad \text{und} \quad (e_i, e_j)_{L_2} = \delta_{ij}.$$

Aus $L_2 = R(A^*) \oplus N(A)$ und $N(A) = N(A^*A)$ folgt, daß die Elemente $f_i$ den Raum $R(A^*)$ aufspannen. Um zu zeigen, daß die Elemente $e_i$ den Raum $R(A)$ aufspannen, braucht man nur nachzuweisen, daß es kein Eigenelement $e$, $\|e\| = 1$, des Operators $AA^*$ zu einem positiven Eigenwert $\varrho^2$ gibt, so daß $(e, e_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, gilt. Wäre $AA^* e = \varrho^2 e$, so wäre für $f = \varrho^{-1} A^* e$

$$(f, f_i)_{L_2} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad \text{und} \quad A^*Af = \varrho^2 f, \ \|f\| = 1,$$

was nicht sein kann. Aus diesen Vollständigkeitseigenschaften der Elemente $f_i$ und $e_i$, sowie aus $A_0^{-1} \in L\big(R(A), R(A^*)\big)$ und

$$A_0^{-1} e_i = \frac{1}{\lambda_i} f_i$$

folgt sofort

$$(8) \qquad (A_0^{-1} e)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} (e, e_i)_{L_2} f_i(x), \qquad e(x) \in R(A).$$

Es wird der Ansatz

$$(9) \qquad G(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} e_i(y) f_i(x)$$

gemacht, wobei mit $G_N(x, y)$ die $N$-te Partialsumme der entsprechenden Reihe bezeichnet wird. Es ist

$$(A^*A + E)^{\varkappa} f_i = (\lambda_i^2 + 1)^{\varkappa} f_i$$

und somit

$$[(A^*A + E)^{\varkappa} \otimes E] G_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\lambda_i^2 + 1)^{\varkappa}}{\lambda_i} e_i(y) f_i(x).$$

Daraus folgt

$$\|[(A^*A + E)^{\varkappa} \otimes E] G_N\|^2_{L_2(\Omega \times \Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\lambda_i^2 + 1)^{2\varkappa}}{\lambda_i^2}.$$

Satz 1 zeigt, daß die Summe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i^2 + 1)^{2\varkappa}}{\lambda_i^2}$$

konvergiert, sofern $1 - 2\varkappa > n/4m$ ist. Somit ist

$$G(x, y) \in D\big((A^*A + E)^{\varkappa}\big) \hat{\otimes} L_2$$



für $\varkappa < \frac{1}{2} - n/8m$. Ist $m > n/4$, so daß $\varkappa > 0$ gewählt werden kann, so zeigen Formel (6) und die Interpolationseigenschaften der Räume $H$ und $W_2^{4m}(\Omega)$ (Lemma 6 aus [11] und Formel (5) aus [11]), daß

$$G(x, y) \in W_2^{4m\varkappa}(\Omega) \hat{\otimes} L_2(\Omega)$$

ist. Da $x$ und $y$ gleichberechtigt in die Überlegungen eingehen, (man hat lediglich $A^*A$ und $AA^*$ zu vertauschen), so erhält man schließlich

$$G(x, y) \in W_2^{4m\varkappa} \hat{\otimes} L_2 \cap L_2 \hat{\otimes} W_2^{4m\varkappa} = W_2^{4m\varkappa}(\Omega \times \Omega)$$

mit $4m\varkappa < 2m - n/2$. Entsprechend hat man für $m \leqslant n/4$ in den Überlegungen $W$ durch $\mathring{W}$ zu ersetzen, da nach Formel (6) und den Interpolationsverfahren für negative Werte von $\varkappa$

$$D\big((A^*A + E)^{\varkappa}\big) \subseteq \mathring{W}_2^{4m\varkappa}$$

gilt. Bildet man jetzt nach Definition 4 aus [11] mit $G(x, y)$ den Integraloperator

$$(Ge)(x) = \int_{\Omega} G(x, y) e(y) dy,$$

so ist

$$Ge_i = \frac{1}{\lambda_i} f_i.$$

Dabei kann für $m > n/4$ der Operator $G$ als Element von $L\big(R(A), L_2\big)$ betrachtet werden, während, für $m \leqslant n/4$, $G$ als Element von $L\big(R(A), \mathring{W}_2^{4m\varkappa}\big)$ anzusehen ist (Definition 4 aus [11]), wobei $\varkappa$ die obige Bedeutung hat. Da $A_0^{-1}$ in jedem Fall auch als Element der entsprechenden Räume betrachtet werden kann, so zeigt Formel (8) die Richtigkeit des Satzes, sofern man noch $4m\varkappa$ durch $\varrho$ ersetzt.

Es soll nun gezeigt werden, daß Satz 2 nicht verbesserungsfähig ist.

Satz 3. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt. Dann ist*

*(a) für* $m > n/4$

$$G(x, y) \notin W_2^{2m - n/2}(\Omega \times \Omega).$$

*(b) für* $m \leqslant n/4$

$$G(x, y) \notin \mathring{W}_2^{2m - n/2}(\Omega \times \Omega).$$

*Dabei ist* $G(x, y)$ *die verallgemeinerte Greensche Funktion aus Satz 2.*

Beweis. Es zeigt sich, daß man für die beiden Fälle getrennte Beweise führen muß. Es sei $m > n/4$. $A_0^{-1}$ wird als Element von $L(L_2, L_2)$ angesehen. Die Darstellungen (7) und (8) stimmen auch in diesem Fall überein. (8) zeigt, daß die Approximationszahlen von $A_0^{-1}$ gleich $1/\lambda_i$ sind ([5], S. 47). Andererseits folgt aus (7) und Satz 5 der Arbeit [11], daß

$$A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_{\frac{2n}{n+2(2m-n/2)},2} = \mathfrak{S}_{\frac{n}{2m},2}$$

($\varrho = r = s = 2m-n/2$, $\tau = \sigma = 0$ in der dortigen Bezeichnungsweise) ist. Berücksichtigt man, daß der Nullraum des Operators $A^*A$ endlichdimensional ist, und daß $\lambda_i^2$ die von Null verschiedenen Eigenwerte des Operators $A^*A$ sind, so folgt

$$(A^*A+E)^{-1} \in \mathfrak{S}_{n/4m,1}$$

im Widerspruch zu Satz 1.

Es sei $m \leqslant n/4$. In diesem Fall zeigt Satz 4 aus [11] (nachdem man $W$ durch $\mathring{W}$ ersetzt hat), daß $A_0^{-1}$ eine Hilbert-Schmidt-Abbildung von $L_2$ in $\mathring{W}_2^{2m-n/2}$ leistet. Da nach Formel (6) und den Interpolationseigenschaften der betreffenden Räume für $\varkappa = \frac{1}{2}-n/8m$

$$R(A_0^{-1}) \subseteq D\big((A^*A+E)^\varkappa\big) \subseteq \mathring{W}_2^{2m-n/2}(\Omega)$$

gilt, wobei die Normen der beiden letzten Räume übereinstimmen, so ist $A_0^{-1}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator von $L_2$ in $D\big((A^*A+E)^\varkappa\big)$. Somit ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|A_0^{-1}e_i\|^2_{D((A^*A+E)^\varkappa)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}\|f_i\|^2_{D((A^*A+E)^\varkappa)}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i^2+1)^{2\varkappa}}{\lambda_i^2} < \infty.$$

Berücksichtigt man wieder, daß der Nullraum von $A^*A$ endlichdimensional ist, so folgt aus $1-2\varkappa = n/4m$

$$(A^*A+E)^{-1} \in \mathfrak{S}_{n/4m,n/4m},$$

im Widerspruch zu Satz 1.

Durch Zusammenfassung der Sätze 2 und 3 erhält man

SATZ 4. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt.*

(a) *Für $m > n/4$ läßt sich der Operator $A_0^{-1}$ dann und nur dann in der Form (7) mit $G(x,y) \in W_2^\varrho(\Omega\times\Omega)$ darstellen, wenn $2m-n/2 > \varrho$ ist.*

(b) *Für $m \leqslant n/4$ läßt sich der Operator $A_0^{-1}$ dann und nur dann in der Form (7) mit $G(x,y) \in \mathring{W}_2^\varrho(\Omega\times\Omega)$ darstellen, wenn $2m-n/2 > \varrho$ ist.*

Ein Beispiel. Durch lokale Betrachtungen Greenscher Funktionen einfacher elliptischer Differentialoperatoren kann man den obigen Satz plausibel machen. Es sei etwa $Au = \Delta u$ mit den Dirichletschen Randbedingungen und $\Omega$ die Einheitskugel im $R_n$. Für $n=2$ zeigt $G(x,y)$ bekanntlich ein Lokalverhalten wie $\log|x-y|$, für $n>2$ wie $1/|x-y|^{n-2}$. Für eine heuristische Betrachtung ist es ausreichend, die Zugehörigkeit von $\log|x|$ bzw. $1/|x|^{n-2}$ zu $W_2^\varrho(K)$ zu prüfen, wobei $K$ die Einheitskugel ist. Differentiation von $\log|x|$ zeigt sofort, daß

$$\log|x| \notin W_2^1(K), \quad \log|x| \in W_p^1(K) \quad \text{für } p<2$$

ist. Aus

$$W_p^1(K) \subseteq W_2^\varrho(K) \quad \text{für} \quad \varrho-\frac{n}{2} = 1-\frac{n}{p} \tag{10}$$

[9], folgt $\log|x| \in W_2^\varrho(K)$ für $\varrho<1$, $n=2$. Das stimmt mit Satz 4 für $n=2$, $m=1$ überein. Entsprechend ist für $n=3$

$$\frac{1}{r} \in W_p^1(K) \quad \text{für } p<\frac{3}{2} \quad (r=|x|),$$

woraus nach Formel (10) für $n=3$

$$\frac{1}{r} \in W_2^\varrho(K) \quad \text{für} \quad \varrho<\frac{1}{2}$$

folgt. Wäre $1/r \in W_2^{1/2}(K)$, so würde aus $W_2^{1/2} \subset L_3$ folgen, daß $1/r$ zu $L_3$ gehört, was nicht sein kann. Damit hat man wieder mit Satz 4 für $m=1$ und $n=3$ Übereinstimmung erzielt. Es sei $n \geqslant 4$. Dann gehört $1/r^{n-2}$ zu $L_q$ für $q<n/(n-2)$. Aus dem Einbettungssatz [9], S. 301,

$$\mathring{W}_2^\sigma \subseteq L_p \quad \text{für} \quad \sigma-\frac{n}{2} = -\frac{n}{p}, \quad \sigma>0, \quad 1\leqslant p<\infty,$$

folgt durch Übergang zu den adjungierten Räumen

$$L_q \subseteq \mathring{W}_2^\varrho \quad \text{für} \quad -\frac{n}{q} = \varrho-\frac{n}{2}, \quad \varrho<0, \quad 1<q<\infty.$$

Somit ist

$$\frac{1}{r^{n-2}} \in \mathring{W}_2^\varrho \quad \text{für} \quad \varrho = \frac{n}{2}-\frac{n}{q} < 2-\frac{n}{2}.$$

Wäre $1/r^{n-2} \in \mathring{W}_2^{2-n/2}$, so würde aus der bekannten Eigenschaft

$$|G(x,y)| \leqslant \frac{c_6}{|x-y|^{n-2}}$$

der Greenschen Funktion des Operators $\Delta$

$$|(\Delta^{-1}w)(x)| = \Big|\int_K w(y)G(x,y)\,dy\Big| \leqslant c_6\|w\|_{\mathring{W}_2^{n/2-2}} \Big\|\frac{1}{r^{n-2}}\Big\|_{\mathring{W}_2^{2-n/2}}$$

folgen, $\Delta^{-1}$ würde also eine stetige Abbildung von $\mathring{W}_2^{n/2-2}(K)$ in $C(K)$ leisten. Da $\Delta$ eine stetige Abbildung von $W_2^{n/2}$ in $\mathring{W}^{n/2-2}$ vermittelt, so wäre die Einbettung $F_{\mathring{W}_2^{n/2}\to C} = \Delta^{-1}\Delta$ stetig, was ein Widerspruch ist.

Bemerkung. Aussagen über Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen allgemeiner elliptischer Differentialoperatoren kann man benutzen, um quasilineare Differentialgleichungen zu lösen. Dabei kann man nach dem in [12] entwickelten Verfahren Existenz- und Unitätssätze in den Räumen $C^{\gamma}(\Omega)$ und $W_2^{\varrho}(\Omega)$ herleiten. In diesem Zusammenhang ist es nützlich und notwendig, Aussagen über das Randverhalten der Funktion $G(x, y)$ zu machen. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 4(a), insbesondere also $m > n/4$, erfüllt. Mit $G_N(x, y)$ wird wie früher die $N$-te Partialsumme der expliziten Darstellung von $G(x, y)$ in der Formel (9) bezeichnet. Die das Randverhalten der Funktionen aus $D(A^*)$ kennzeichnenden Differentialausdrücke werden wie früher, Abschnitt 1, Eigenschaft II, mit

$$(B_j^+ u)(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m_j^+} b_{j\alpha}^+(x) D^\alpha u, \qquad m_j^+ < 2m, j = 1, \ldots, m,$$

bezeichnet. Da die Funktionen $f_i(x)$ zu $D(A)$ und die Funktionen $e_i(y)$ zu $D(A^*)$ gehören, gilt

$$B_{j,x} G_N(x, y)|_{\substack{x\in\partial\Omega\\ y\in\Omega}} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$B_{j,y}^+ G_N(x, y)|_{\substack{x\in\Omega\\ y\in\partial\Omega}} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

wobei $B_{j,x}$ statt $B_j$ geschrieben wurde, um anzudeuten, daß $B_j G_N$ bezüglich der Variablen $x$ bei fixiertem $y$ zu bilden ist. Entsprechend ist $B_{j,y}^+$ zu verstehen. Wegen des nachfolgenden Grenzüberganges ist es zweckmäßig, z. B. die erste Gleichung im Sinne der Sobolevschen Einbettungssätze für variables $x\in\partial\Omega$ und variables $y\in\Omega$ (diese Menge wird mit $\partial\Omega\times\Omega$ bezeichnet) zu interpretieren, obwohl dies nicht notwendig wäre, da nach den bekannten Differenzierbarkeitseigenschaften von Eigenfunktionen elliptischer Differentialoperatoren mit glatten Koeffizienten die Gleichung auch punktweise, also bei festem $x\in\partial\Omega$ und festem $y\in\Omega$, betrachtet werden könnte (entsprechend für die zweite Gleichung). Aus Satz 4 (a) und dem Einbettungssatz

$$\|v\|_{W_2^s(\partial\Omega\times\Omega)} \leqslant c_7 \|v\|_{W_2^{s+1/2}(\Omega\times\Omega)}, \qquad s \geqslant 0$$

([6], S. 178), erhält man durch den Grenzübergang $N\to\infty$ aus den beiden letzten Gleichungen



(a) Für $0 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_k < 2m-(n+1)/2, \quad k \leqslant m,$

$$B_{j,x} G(x, y)|_{(x,y)\in\partial\Omega\times\Omega} = 0, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

(b) Für $0 \leqslant m_1^+ < m_2^+ < \ldots < m_l^+ < 2m-(n+1)/2, \quad l \leqslant m,$

$$B_{j,y}^+ G(x, y)|_{(x,y)\in\Omega\times\partial\Omega} = 0, \qquad j = 1, \ldots, l.$$

Für die Anwendung der Betrachtungen auf quasilineare Gleichungen ist der Fall

$$\max_{j=1,\ldots,m} m_j < 2m - \frac{n+1}{2}$$

von besonderem Interesse. Es folgt

$$B_{j,x} G(x, y)|_{(x,y)\in\partial\Omega\times\Omega} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Die Überlegungen dieses Abschnittes legen die Frage nahe, wann der Operator $A$ eine nicht-leere Resolventenmenge besitzt. Gehört $\tau$ zur Resolventenmenge, so ist $(A-\tau E)^{-1}$ als Operator von $L_2$ in $L_2$ kompakt. Die Riesz-Schauder-Theorie für kompakte Operatoren [7], Kap. VII, zeigt dann, daß das Spektrum des Operators $A$ aus isolierten Punkten besteht. Jeder Punkt des Spektrums ist ein Eigenwert endlicher Vielfachheit (das gilt auch, wenn man die assozierten Eigenelemente hinzunimmt und dementsprechend die algebraische Vielfachheit betrachtet). Agmon hat in [3] hinreichende Bedingungen angegeben, unter welchen Voraussetzungen die Resolventenmenge nicht leer ist: $A$ sei ein allgemeiner elliptischer Differentialoperator, der den Bedingungen (a)-(d) des Abschnittes 1 genügt. Die Forderungen (b) und (d) werden durch die schärferen Forderungen (b′) und (d′) ersetzt.

(b′) *Für eine geeignete reelle Zahl* $\Theta$, $|\Theta| \leqslant \pi$, *sei*

$$(-1)^m a(x, \xi) \neq e^{i\Theta}|a(x, \xi)|, \qquad x\in\overline{\Omega}, \ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

*reell. Verwendet man die Bezeichnungen aus der Bedingung* (b), *so besitze für jedes* $x\in\partial\Omega$ *und für jede Zahl* $\lambda$ *mit* $\arg\lambda = \Theta$ *das Polynom*

$$(-1)^m a(x, \vec{n}_x + \zeta\vec{\tau}) = \lambda$$

*genau* $m$ *Nullstellen mit positivem Imaginärteil, die zu dem Polynom* $a^+(\zeta, \lambda)$ *zusammengefaßt werden.*

(d′) *Die Polynome* $Q_j(\zeta)$ *(Bedingung* (d)) *seien für jedes* $\lambda$, $\arg\lambda = \Theta$, *modulo* $a^+(\zeta, \lambda)$ *linear unabhängig.*

Agmon hat in [3], Theorem 1, S. 123, gezeigt, daß ein Operator, der den Bedingungen (a), (b′), (c), (d′) genügt, ein diskretes Spektrum besitzt. Somit folgt aus Satz 4 der

Satz 5. *$A$ sei ein allgemeiner elliptischer Differentialoperator mit nicht-leerer Resolventenmenge, z. B. ein Operator, der den Bedingungen* (a), (b′), (c) *und* (d′) *genügt. Ist $\tau$ ein Element der Resolventenmenge, so gilt:*

(a) *Ist $m > n/4$, so läßt sich $(A-\tau E)^{-1}$ dann und nur dann in der Form*

$$(A-\tau E)^{-1}e = \int_\Omega G(x,y)e(y)\,dy \tag{11}$$

*mit $G(x,y)\in W_2^\varrho(\Omega\times\Omega)$ darstellen, wenn*

$$2m-\frac{n}{2} > \varrho$$

*ist.*

(b) *Ist $m \leqslant n/4$, so läßt sich $(A-\tau E)^{-1}$ dann und nur dann in der Form* (11) *mit $G(x,y)\in \mathring{W}_2^\varrho(\Omega\times\Omega)$ darstellen, wenn*

$$2m-\frac{n}{2} > \varrho$$

*ist.*

**3. Selbstadjungierte elliptische Differentialoperatoren.** $\Omega\subset R_n$ sei ein beschränktes Gebiet, $\partial\Omega\in C^\infty$. Bezeichnet man mit $D[A]$ das Definitionsgebiet der Bilinearform $A[u,v]$, $u, v\in D[A]$, so sei für $u\in D[A]$

$$A[u,u]\geqslant c_8\|u\|^2_{W_2^m(\Omega)}, \quad c_8>0, \quad D[A]\subset W_2^m(\Omega).$$

Ferner sei $D[A]$ bezüglich des Skalarproduktes $A[u,v]$ ein (vollständiger) Hilbertraum. Dann gibt es einen positiv-definiten selbstadjungierten Operator mit reinem Punktspektrum (die Eigenwerte werden mit $\lambda_i$, die zugehörigen Eigenfunktionen mit $e_i(x)$ bezeichnet), so daß für $u\in D(A)\subset D[A]$

$$(Au,v)_{L_2} = A[u,v]$$

für jedes Element $v\in D[A]$ gilt. Bekanntlich ist $D(A^{1/2}) = D[A]$, wobei $A^{-1/2}$ eine unitäre Abbildung von $L_2(\Omega)$ auf $D[A]$ vermittelt. Aus

$$A^{-1/2}_{L_2\to L_2} = I_{W_2^m\to L_2}\, I_{D[A]\to W_2^m}\, A^{-1/2}_{L_2\to D[A]}$$

und Satz 1 aus [11] folgt

$$A^{-1/2}\in\mathfrak{S}_{\frac{n}{m},\infty}. \tag{12}$$

Somit ist

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^\sigma}<\infty \quad \text{für} \quad \sigma>\frac{n}{2m}.$$



Durch die gleichen Überlegungen wie im Abschnitt 2 kann man nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 6. (a) *Ist $A$ der aus der Bilinearform $A[u,v]$ gewonnene positiv-definite selbstadjungierte Operator, so läßt sich für ein positives $\varkappa$ $A^{-\varkappa}\in L(L_2, L_2)$ in der Form*

$$(A^{-\varkappa}f)(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy$$

*mit $G(x,y)\in W_2^\varrho(\Omega\times\Omega)$, $\varrho<2m\varkappa-n/2$, darstellen, sofern $2m\varkappa>n/2$ und $\varrho\leqslant m$ ist.*

(b) *Die Aussage des Satzes gilt insbesondere für den in* [10], *S.* 327, *konstruierten elliptischen Operator mit lokalintegrierbaren Koeffizienten. Hierbei braucht man vom Rand des Gebietes $\Omega$ keinerlei Differenzierbarkeitseigenschaften zu fordern.*

Dieser Satz erlaubt nun, den in [11], Satz 6, ohne Beweis formulierten Sachverhalt zu begründen. Es ist also zu zeigen, daß man bei vorgegebenen Konstanten $r>0$, $\varrho\geqslant 0$, $\sigma\geqslant 0$ und $\tau$,

$$-\infty<\tau\leqslant\varrho, \quad \varrho+\sigma=r,$$

zu jedem $\varepsilon$, $\varepsilon>0$, einen Integraloperator

$$(G^{(\varepsilon)}f)(x) = \int_\Omega G^{(\varepsilon)}(x,y)f(y)\,dy$$

mit $G^{(\varepsilon)}(x,y)\in W_2^\tau(\Omega\times\Omega)$ gibt, so daß

$$G^{(\varepsilon)}\in L(W_2^{-\sigma}, W_2^\tau)$$

für kein $p$, $0<p<\infty$, zu

$$\mathfrak{S}_{\frac{2n}{n+2(\varrho-\tau)+\varepsilon},p}$$

gehört. Dazu wählt man

$$A[u,v] = (u,v)_{W_2^m}, \quad D[A] = W_2^m,$$

$m$ wird später geeignet gewählt. In diesem speziellen Fall kann Formel (12) unter Berücksichtigung von Satz 1 aus [11] durch

$$A^{-1/2}\notin\mathfrak{S}_{n/m,p}, \quad 0<p<\infty,$$

ergänzt werden. Somit ist

$$\left\{\frac{1}{\lambda_i}\right\}\notin l_{n/2m,p}, \quad 0<p<\infty, \tag{13}$$

wobei mit $\lambda_i$ wie früher die Eigenwerte des Operators $A$ bezeichnet werden. $m$ und $\varkappa > 0$ werden nun so bestimmt, daß

$$r < 2m\varkappa - \frac{n}{2}, \qquad \varkappa < \frac{1}{2},$$
$$\tau = 2\Theta m, \qquad |\Theta| \leqslant \frac{1}{2},$$
$$\sigma = 2\Theta' m, \qquad 0 \leqslant \Theta' \leqslant \frac{1}{2},$$

ist. Dann ist

$$\|A^{-\varkappa}u\|_{W_2^\tau} = \|A^{-\varkappa+\Theta}u\|_{L_2} = \|A^{\Theta+\Theta'-\varkappa}A^{-\Theta'}u\|_{L_2} = \|A^{\Theta+\Theta'-\varkappa}u\|_{W_2^{-\sigma}},$$

$$\Theta+\Theta'-\varkappa = \frac{1}{2m}(\tau+\sigma-2m\varkappa) = \frac{1}{2m}(\tau+r-\varrho-2m\varkappa)$$
$$= \frac{1}{2m}\left(\left(r-2m\varkappa+\frac{n}{2}\right)-\frac{n}{2}-\varrho+\tau\right) = -\frac{1}{4m}\left(n+2(\varrho-\tau)+\varepsilon\right)$$

durch geeignete Wahl von $\varkappa$. Identifiziert man den Operator $A^{-\varkappa}$ mit dem Operator $G^{(\varepsilon)}$, was nach Satz 6 (a) möglich ist, so sieht man, daß die Approximationszahlen des Operators $G^{(\varepsilon)} \in L(W_2^{-\sigma}, W_2^\tau)$ gleich

$$s_i(G^{(\varepsilon)}) = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{(n+2(\varrho-\tau)+\varepsilon)/4m}$$

sind. Formel (13) zeigt nun, daß

$$\{s_i(G^{(\varepsilon)})\} \notin l_{\frac{n}{2m}\cdot\frac{4m}{n+2(\varrho-\tau)+\varepsilon},p} = l_{\frac{2n}{n+2(\varrho-\tau)+\varepsilon},p}$$

st. Damit ist Satz 6 aus [11] bewiesen.

### Literaturnachweis


[1] N. J. Achieser und J. Glasmann, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum*, Berlin 1965.

[2] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Toronto — New York — London 1965.

[3] — *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), S. 119-147.

[4] Ju. M. Berezanskij, *Zerlegung nach Eigenfunktionen selbstadjungierter Operatoren*, Kiev 1965 (Russisch).

[5] J. C. Gochberg und M. G. Krejn, *Einführung in die Theorie der nicht-selbstadjungierten Operatoren*, Moskau 1965 (Russisch).

[6] E. Magenes, *Interpolationsräume und partielle Differentialgleichungen* (Russisch), Usp. Mat. Nauk 21.2 (1966), S. 169-218.





[7] K. Maurin, *Methods of Hilbert space*, Warszawa 1967.

[8] M. A. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, Berlin 1963.

[9] J. Peetre, *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*, Ann. Inst. Fourier 16.1 (1966), S. 279-317.

[10] H. Triebel, *Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen elliptischer Differentialoperatoren*, Math. Zeitschr. 90 (1965), S. 325-338.

[11] — *Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatorn in Sobolev-Besov-Räumen*, Inventiones Math. 4 (1967), p. 275-293.

[12] — *Existenz — und Unitätssätze für quasilineare elliptische Differentialgleichungen*, Math. Annalen 169 (1967), S. 294-306.


*Reçu par la Rédaction le 10. 9. 1967*