STUDIA MATHEMATICA, T. XXX. (1968)

Positiv definite Funktionen auf einem unendlich dimensionalen Vektorraum

von

WILHELM von WALDENFELS (Saarbrücken)

Sei X ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei F eine positiv definite, stetige Funktion auf X. Dann gibt es nach dem Satz von Bochner genau ein positives, beschränktes Radonmaß auf dem Dualraum X^* von X, dessen Fouriertransformierte F ist. Sei nun X unendlich dimensional und F positiv definit und auf jedem endlich dimensionalen Teilraum von X stetig. Dann gibt es (vgl. z. B. [3]) ein zylindrisches Maß auf dem algebraischen Dualraum X^* von X, dessen Fouriertransformierte F ist. Da ein zylindrisches Maß im allgemeinen nicht σ-additiv ist, erweitern wir X^* zu einem kompakten Raum $\tilde{X}$ und ordnen dann F ein positives Radonmaß auf $\tilde{X}$ zu. Mit Hilfe dieser Konstruktion läßt sich leicht ein Kriterium dafür angeben, daß F Fouriertransformierte eines Radonmaßes auf einem in X^* enthaltenen Kompaktum ist. Sei E lokal kompakt und abzählbar im Unendlichen und sei X der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in E. Dann lassen sich einfache Bedingungen formulieren, daß F die Fouriertransformierte eines straffen Maßes auf dem Raum der positiven Radonmaße auf E ist. Endlich beweisen wir noch den Satz von Sazonov [6] für nicht notwendig separable Hilberträume. Die Konstruktion von $\tilde{X}$ ist sehr ähnlich der von Nelson [5] vorgeschlagenen Konstruktion eines kompakten Stichprobenraums zu einem beliebigen stochastischen Prozeß.

Eine Funktion $F: X \to C$ heißt *positiv definit*, wenn

$$\sum F(x_i - x_k) z_i z_k^* \geqslant 0$$

ist für alle endlichen Teilmengen $x_1, \ldots, x_n \in X$; $z_1, \ldots, z_n \in \boldsymbol{C}$. Der Stern bezeichnet die konjugiert komplexe Zahl. Wertet man diese Relation für $n = 1, 2, 3$ aus, so erhält man die Ungleichungen

$$F(o) \geqslant 0, \quad |F(x)| \leqslant F(o), \quad F(-x)^* = F(x),$$
$$|F(o)F(x+y) - F(x)F(y)|^2 \leqslant \big(F(o)^2 - |F(x)|^2\big)\big(F(o)^2 - |F(y)|^2\big).$$

HILFSSATZ 1. *Es sei F eine positiv-definite Funktion. Sei für jedes feste $x \in X$ die Funktion*

$$\lambda \in \boldsymbol{R} \to F(\lambda x)$$

stetig im Nullpunkt. Dann ist die Restriktion von F auf jeden endlich dimensionalen Teilraum stetig.

Beweis. Durch Induktion nach der Dimension des Teilraums beweist man zunächst mit Hilfe der letzten Ungleichung, daß die Restriktion von F auf jeden endlich dimensionalen Teilraum stetig im Nullpunkt ist. Mit Hilfe der selben Ungleichung folgert man aus der Stetigkeit im Nullpunkt die Stetigkeit überall.

Durch Hinzunahme eines Punktes ∞ kompaktifizieren wir die Gerade $\boldsymbol{R}$ und erhalten ein Gebilde $\tilde{\boldsymbol{R}}$ das der Kreisperipherie homöomorph ist. Auf $\tilde{\boldsymbol{R}}$ ist für jedes $\lambda \in \boldsymbol{R}$ das Produkt $\alpha \in \tilde{\boldsymbol{R}} \to \lambda\alpha \in \tilde{\boldsymbol{R}}$ erklärt. Man setzt dabei $\lambda\alpha$ gleich dem üblichen Produkt, wenn $\alpha \in \boldsymbol{R}$ und

$$\lambda \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad \lambda \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Die Abbildung $\alpha \in \tilde{\boldsymbol{R}} \to \lambda\alpha$ ist stetig. Ebenso definieren wir die Addition als eine stetige Abbildung

$$\tilde{\boldsymbol{R}} \times \tilde{\boldsymbol{R}} - (\infty, \infty) \to \tilde{\boldsymbol{R}}.$$

Dabei stimmt $\alpha+\beta$ mit der üblichen Addition überein, falls α und β endlich sind, $\alpha+\infty = \infty+\alpha = \infty$ für $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Die Addition $\infty+\infty$ ist nicht erklärt. Obwohl $\tilde{\boldsymbol{R}}$ nicht angeordnet ist, existiert so etwas wie ein positiver Drehsinn, Ausdrücke der Form $\alpha < \beta < \gamma$ sind definiert.

Definition. Ein *quasilineares Funktional* auf X ist eine Abbildung $\varphi: X \to \tilde{\boldsymbol{R}}$ mit den Eigenschaften

$$\langle \varphi, \lambda x \rangle = \lambda \langle \varphi, x \rangle$$

für $\lambda \in \boldsymbol{R}$ und

$$\langle \varphi, x \rangle + \langle \varphi, y \rangle = \langle \varphi, x+y \rangle$$

falls $\langle \varphi, x \rangle$ und $\langle \varphi, y \rangle$ nicht beide unendlich sind. Die Menge aller quasilinearen Funktionale auf X versehen mit der schwachen Topologie über X bezeichnen wir mit $\tilde{X}$.

SATZ 1. *Eine Abbildung $\varphi: X \to \tilde{\boldsymbol{R}}$ ist genau dann ein quasilineares Funktional, wenn es einen linearen Teilraum Y von X gibt mit der Eigenschaft: φ ist auf Y endlich und linear und $\langle \varphi, x \rangle = \infty$ für $x \in Y - X$.*

Beweis. Sei φ ein quasilineares Funktional. Dann ist

$$Y = \{x \in X : \langle \varphi, x \rangle \neq \infty\}$$

ein linearer Teilraum, auf dem φ linear ist. Sei umgekehrt eine Abbildung φ mit der im Satz angegebenen Eigenschaft gegeben und seien $x, y \in X$. Falls $\langle \varphi, x \rangle$ und $\langle \varphi, y \rangle$ beide endlich sind, liegen x und y in Y und $\langle \varphi, x \rangle + \langle \varphi, y \rangle = \langle \varphi, x+y \rangle$. Sei eins von beiden, z. B. $\langle \varphi, x \rangle$, endlich und das andere unendlich, so ist $x \in Y, y \notin Y$, also $x+y \notin Y$ und $\infty = \langle \varphi, x+y \rangle = \langle \varphi, x \rangle + \langle \varphi, y \rangle$. Sind $\langle \varphi, x \rangle$ und $\langle \varphi, y \rangle$ unendlich, so ist nichts zu beweisen. Ebenso zeigt man, daß $\langle \varphi, \lambda x \rangle = \lambda \langle \varphi, x \rangle$ für $\lambda \in \boldsymbol{R}$ ist.

FOLGERUNG. *Sei $X_1 \subset X$ ein linearer Teilraum und ψ ein quasilineares Funktional auf X_1. Dann gibt es ein quasilineares Funktional φ auf X, das ψ fortsetzt.*

Beweis. Man setze

$$\langle \varphi, x \rangle = \begin{cases} \langle \psi, x \rangle & \text{für} \quad x \in X_1, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $Y = x \in X_1 : \langle \psi, x \rangle \neq \infty \rangle$. Dann ist Y ein linearer Teilraum von X, auf dem φ endlich und linear ist. Außerhalb Y ist ψ unendlich. Also ist ψ quasilinear.

SATZ 2. *Der Raum $\tilde{X}$ est kompakt.*

Beweis. Wir betten $\tilde{X}$ in den kompakten Raum $\tilde{\boldsymbol{R}}^X$ aller Funktionen $X \to \tilde{\boldsymbol{R}}$ ein und zeigen, daß $\tilde{X}$ in $\tilde{\boldsymbol{R}}^X$ abgeschlossen ist. Sei ψ im Abschluß von $\tilde{X}$ in $\tilde{\boldsymbol{R}}^X$ so müssen wir also beweisen, daß $\langle \psi, x \rangle + \langle \psi, y \rangle = \langle \psi, x+y \rangle$ ist, falls $\langle \psi, x \rangle$ und $\langle \psi, y \rangle$ nicht beide unendlich sind und daß $\langle \psi, \lambda x \rangle = \lambda \langle \psi, x \rangle$ für $\lambda \in \boldsymbol{R}$ ist. Wir begnügen uns damit, die Additivität von ψ zu zeigen.

Wir wählen eine Metrik d auf $\tilde{\boldsymbol{R}}$. Weil $\tilde{\boldsymbol{R}} \times \tilde{\boldsymbol{R}} - (\infty, \infty)$ offen und die Addition auf dieser Menge definiert und stetig ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß Elemente a, b mit

$$d(a, \langle \psi, x \rangle) \leqslant \delta, \qquad d(b, \langle \psi, y \rangle) \leqslant \delta$$

nicht beide unendlich sind und daß $d(a+b, \langle \psi, x \rangle + \langle \psi, y \rangle) \leqslant \varepsilon/2$ ist. Weil ψ im Abschluß von $\tilde{X}$ liegt, gibt es ein $\varphi \in \tilde{X}$ mit

$$d(\langle \varphi, x+y \rangle, \langle \psi, x+y \rangle) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d(\langle \varphi, x \rangle, \langle \psi, x \rangle) \leqslant \delta,$$

$$d(\langle \varphi, y \rangle, \langle \psi, y \rangle) \leqslant \delta.$$

Weil $\langle \varphi, x \rangle$ und $\langle \varphi, y \rangle$ nicht beide unendlich sind, ist $\langle \varphi, x \rangle + \langle \varphi, y \rangle = \langle \varphi, x+y \rangle$ und

$$d(\langle \psi, x+y \rangle, \langle \psi, x \rangle + \langle \psi, y \rangle) \leqslant \varepsilon.$$

Satz 3. *Sei F eine positiv definite Funktion auf X mit der Eigenschafu daß $\lambda \in \boldsymbol{R} \to F(\lambda x)$ für jedes $x \in X$ stetig im Nullpunkt ist. Dann gibt es genat, ein positives Radonmaß P auf $\tilde{X}$ mit*

$$P\{\varphi \in \tilde{X} : \langle \varphi, x\rangle = \infty\} = o,$$

$$\hat{P}(x) = \int P(d\varphi) \exp i\langle \varphi, x\rangle = F(x)$$

für $x \in X$.

Die erste Beziehung garantiert, daß $\varphi \to \exp i\langle \varphi, x\rangle$ bezüglich P fast überall stetig und somit, weil beschränkt, integrierbar ist. Damit hat das Integral in der zweiten Gleichung einen Sinn.

Beweis. Sei $U \subset X$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Nach Hilfssatz 1 ist die Restriktion $F \mid U$ positiv definit und stetig. Nach dem Satz von Bochner gibt es ein positives beschränktes Radonmaß Q_U auf U, dessen Fouriertransformierte $F \mid U$ ist. Sei $f : \tilde{U} \to \boldsymbol{R}$ stetig, so ist die Restriktion von f auf U^* stetig und beschränkt und somit Q_U-integrierbar. Wir definieren ein positives Radonmaß P_U auf U durch

$$\int_{\tilde{U}} P_U f = \int_{U^*} Q_U f.$$

Sei $V \subset U$ ein linearer Teilraum, sei $\pi : U^* \to V^*$ die Restriktionsabbildung $a \in U^* \to a \mid V \in V^*$. Dann ergibt sich aus dem Vergleich der Fouriertransformierten, daß das Bild von Q_U bezüglich π gleich Q_V ist, kurz: $\pi(Q_U) = Q_V$. Bezeichnen wir die Restriktionsabbildung $\tilde{U} \to \tilde{V}$ ebenfalls mit π, so folgt daraus $\pi(P_U) = P_V$.

Sei $\mathfrak{A}$ die Algebra der Funktionen auf $\tilde{X}$, die von der Form sind

$$f(\varphi) = g(\langle \varphi, x_1\rangle, \ldots, \langle \varphi, x_m\rangle),$$

wo g eine stetige Funktion $\tilde{\boldsymbol{R}}^m \to \boldsymbol{R}$ ist. Besitze f noch die andere Darstellung

$$f(\varphi) = h(\langle \varphi, y_1\rangle, \ldots, \langle \varphi, y_n\rangle)$$

und seien $x_1, \ldots, x_m$ im endlich dimensionalen Teilraum V und $y_1, \ldots, y_n$ im endlich dimensionalen Teilraum W enthalten. Wir setzen

$$g_1 : \beta \in \tilde{V} \to g(\langle \beta, x_1\rangle, \ldots, \langle \beta, x_m\rangle),$$

$$h_1 : \gamma \in \tilde{W} \to h(\langle \gamma, y_1\rangle, \ldots, \langle \gamma, y_n\rangle).$$

Dann gilt

$$\int P_V g_1 = \int P_W h_1.$$

Um diese Gleichung zu beweisen, suchen wir einen endlich dimensionalen Teilraum U, der V und W umfaßt und betrachten die Funktionen

$$g_2 : a \in \tilde{U} \to g(\langle a, x_1\rangle, \ldots, \langle a, x_m\rangle),$$

$$h_2 : a \in \tilde{U} \to h(\langle a, y_1\rangle, \ldots, \langle a, y_n\rangle).$$

Zu $a \in \tilde{U}$ gibt es eine Fortsetzung $\varphi \in \tilde{X}$ und es ist

$$f(\varphi) = g(\langle \varphi, x_1\rangle, \ldots) = g_2(a)$$

und ebenso

$$f(\varphi) = h_2(a)$$

also

$$g_2 = h_2.$$

Seien π und π' die Restriktionsabbildungen $\tilde{U} \to \tilde{V}$, $\tilde{U} \to \tilde{W}$, so ist

$$g_1 \circ \pi = g_2, \quad h_1 \circ \pi' = h_2.$$

Somit sind

$$\int P_V g_1 = \int \pi(P_U) g_1 = \int P_U (g_1 \circ \pi) = \int P_U g_2 = \int P_U h_2 = \int P_V h_1.$$

Die Zahl

$$\langle P, f\rangle = \int P_V(d\beta) g(\langle \beta, x_1\rangle, \ldots, \langle \beta, x_m\rangle)$$

ist unabhängig von der Darstellung von f. Das somit auf $\mathfrak{A}$ definierte Funktional P ist linear und positiv. Da $\mathfrak{A}$ die Konstanten enthält und die Punkte trennt, ist $\mathfrak{A}$ nach dem Satz von Stone-Weierstraß dicht im Raum der stetigen Funktionen auf $\tilde{X}$ versehen mit der Supremumsnorm. Da P positiv und linear ist, ist es in der Supremumsnorm stetig auf $\mathfrak{A}$ und läßt sich somit eindeutig zu einem positiven, linearen Funktional auf dem Raum aller stetigen Funktionen auf $\tilde{X}$ d. h. zu einem positiven Radonmaß P auf $\tilde{X}$ ausdehnen. Das Maß P besitzt offensichtlich die angegebenen Eigenschaften.

Wir müssen noch zeigen, daß P durch die genannten Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Es genügt zu beweisen, daß p auf $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt ist, oder, daß für jeden endlich dimensionalen Teilraum V mit Restriktionsabbildung $\pi : \tilde{X} \to \tilde{V}$ das Bild $\pi(P) = P_V$ eindeutig festgelegt ist.

Sei also V ein endlich dimensionaler Teilraum, sei p ein positives Maß auf $\tilde{V}$ mit den Eigenschaften

$$p\{a \in \tilde{V} : \langle a, x\rangle = \infty\} = 0,$$

$$\int p(da) \exp i\langle a, x\rangle = F(x)$$

für $x \in V$. Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$, so daß

$$p\left\{a \in \tilde{V} : |\langle a, x_i\rangle| \geqslant \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$$

für $i = 1, \ldots, n$ ist. Also ist

$$p\left\{a \in \tilde{V} : \sum_{i=1}^{n} \langle a, x_i\rangle^2 \leqslant \varrho^2\right\} \geqslant p(\tilde{V}) - \varepsilon.$$

Die Menge aller $a \in \tilde{V}$ mit $\Sigma\langle a, x_i\rangle^2 \leqslant \varrho^2$ ist in V^* enthalten und bildet dort ein Kompaktum. Läßt man ϱ über eine monoton aufsteigende Folge gegen unendlich gehen, so sieht man, daß $\tilde{V} - V^*$ eine p-Nullmenge ist. Aut V^* ist aber p durch F eindeutig bestimmt also ist $p = P_V$.

Satz 4. *Eine positiv definite Funktion F ist genau dann die Fouriertransformierte eines positiven Radonmaßes auf einem in X^* enthaltenen Kompaktum, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt:*

Für festes $x \in X$ ist $\lambda \in \boldsymbol{R} \to F(\lambda x)$ die Fouriertransformierte eines Maßes auf einem endlichen Intervall der reellen Gerade.

Beweis. Die Funktion F genügt der in Satz 3 geforderten Stetigkeitsbedingung und ist darum Fouriertransformierte eines positiven Radonmaßes Q auf $\tilde{X}$. Sei $\lambda \to F(\lambda x)$ die Fouriertransformierte eines Maßes auf $[Q_x, b_x]$, a_x, b_x endlich, so gilt

$$Q\{\varphi \in \tilde{X} : \langle\varphi, x\rangle \notin [a_x, b_x]\} = 0.$$

Daraus folgt, daß

$$\bigcup_{x \in X} \{\varphi \in \tilde{X} : \langle\varphi, x\rangle \notin [a_x, b_x]\}$$

als Vereinigung offener Q-Nullmengen eine Q-Nullmenge ist. Also wird Q getragen von der Menge

$$K = \{\varphi \in \tilde{X} : \langle\varphi, x\rangle \in [a_x, b_x] \quad \text{für alle } x \in X\}.$$

Diese Menge ist in X^* enthalten, ist kompakt und konvex. Wir schränken Q auf K ein und erhalten des gesuchte Maß P mit

$$\hat{P}(x) = \int_K P(d\varphi) \exp i\langle\varphi, x\rangle = F(x).$$

Für die folgenden beiden Sätze benötigen wir den Begriff des straffen Maßes.

Definition. Sei A ein vollständig regulärer topologischer Raum und sei $\mathfrak{C}(A)$ der Vektorraum aller reellen, stetigen, beschränkten Funktionen auf A versehen mit der Supremumsnorm. Ein lineares, positives, stetiges Funktional P auf $\mathfrak{C}(A)$ heißt ein *straffes Maß auf A*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset A$ gibt, so daß $|\langle P, f\rangle| \leqslant \varepsilon$ ist für alle $f \in \mathfrak{C}(A)$, $|f| \leqslant 1$, $f = 0$ auf K.

Die straffen Maße besitzen nahezu alle Eigenschaften der Radonschen Maße auf kompakten Räumen (vgl. z. B. [7]). Ein topologischer Raum ist genau dann vollständig regulär, wenn er Teilraum eines kompakten Raumes ist.

Bemerkung. Sei K ein kompakter Raum, sei $A \subset K$ und sei Q ein positives Radonmaß auf K mit der Eigenschaft:

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein Kompaktum $H \subset A$ mit $Q\{K - H\} \leqslant \varepsilon$. Dann wird Q von A getragen, die Funktionen $f \in \mathfrak{C}(A)$ sind bezüglich Q fast überall definiert, meßbar und integrierbar. Das Funktional

$$\langle P, f\rangle = \int Qf$$

ist ein straffes Maß auf A.

Satz 5. *Sei E ein lokal kompakter, im Unendlichen abzählbarer Raum und sei $X = \mathfrak{C}_0(E)$ die Menge der stetigen, reellwertigen Funktionen auf E mit kompaktem Träger. Sei $\mathfrak{M}(E)$ der Raum der positiven Radonmaße auf E versehen mit der schwachen Topologie über $\mathfrak{C}_0(E)$. Eine positiv definite Funktion F auf $\mathfrak{C}_0(E)$ ist genau dann die Fouriertransformierte eines straffen Maßes auf $\mathfrak{M}(E)$, wenn für $x \in \mathfrak{C}_0(E)$, $x \geqslant 0$, die Funktion*

$$\lambda \in \boldsymbol{R} \to F(\lambda x)$$

Fouriertransformierte eines beschränkten Radonmaßes auf $\boldsymbol{R}_+ = \{a \in \boldsymbol{R} : a \geqslant 0\}$ ist.

Beweis. Man schließt zunächst wie in Hilfssatz 1, daß $\lambda \to F(\lambda x)$ für alle $x \in X$ stetig ist. Sei Q das zu F gehörige Maß auf $\tilde{X}$. Dann gilt

$$Q\{\varphi \in \tilde{X} : \infty < \langle\varphi, x\rangle < 0\} = 0$$

für $x \geqslant 0$. Als Vereinigung offener Q-Nullmengen ist

$$\bigcup_{x \geqslant 0} \{\varphi \in \tilde{X} : \infty < \langle\varphi, x\rangle < 0\}$$

eine Q-Nullmenge (zur Bedeutung des Zeichens $<$ in $\tilde{\boldsymbol{R}}$ vgl. den Anfang der Arbeit). Somit wird Q getragen von der Menge aller $\varphi \in \tilde{X}$, $0 \leqslant \langle\varphi, x\rangle \leqslant \infty$ für $x \geqslant 0$.

Sei $E_1 \subset \mathring{E}_2 \subset E_2 \subset \ldots$ eine Folge von kompakten Teilmengen von E mit der Vereinigung E. Wir wählen eine Folge $y_k \in \mathfrak{C}_0(E)$, $0 \leqslant y_k \leqslant 1$,

$y_k = 1$ auf E_k, $y_k = 0$ außerhalb E_{k+1}. Wir wählen m_k so, daß

$$Q\{\varphi \in \tilde{X} : m_k < \langle \varphi, y_k \rangle \leqslant \infty\} \leqslant \varepsilon \cdot 2^{-k}$$

ist. Sei

$$K = \left\{ \begin{array}{lll} \varphi \in \tilde{X} : 0 \leqslant \langle \varphi, y_k \rangle \leqslant m_k & \text{für} & k = 1, 2, \ldots, \\ 0 \leqslant \langle \varphi, x \rangle \leqslant \infty & \text{für alle} & x \geqslant 0 \end{array} \right\}$$

so gilt

$$Q\{\tilde{X} - K\} \leqslant \varepsilon.$$

K ist aber einekompakte Teilmenge von $\mathfrak{M}(E)$. Somit definiert Q ein straffes Maß P auf $\mathfrak{M}(E)$. Daß umgekehrt die Fouriertransformierte eines straffen Maßes auf $\mathfrak{M}(E)$ die angegebenen Eigenschaften besitzt, ist leicht einzusehen.

Wir beweisen noch eine kleine Verallgemeinerung des Satzes von Sazonov [6]. Sei X ein reeller, nicht notwendig separabler Hilbertraum. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{S}$ aller symmetrischen, positiv definiten Bilinearformen S auf X mit endlicher Spur. Endliche Spur bedeutet, daß

$$\|S\| = \sup \sum_{i=1}^{n} S(x_i, x_i) < \infty$$

ist, wo das Supremum über alle endlichen Orthonormalsysteme $x_1, \ldots, x_n$ in X genommen wird. Das Funktional

$$x \to \|x\|_S = S(x, x)^{1/2}$$

definiert eine Halbnorm auf X. Durch das System der Halbnormen $(\|x\|_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ wird eine lokal konvexe, separierte Topologie $\mathfrak{I}$ auf X induziert, die schwächer als die Normtopologie ist. Die Mengen der Form

$$\{x : \|x\|_S < 1\}$$

bilden in $\mathfrak{I}$ eine Umgebungsbasis der Null (vgl. [6]).

Satz 6. *Sei X' der Raum der normstetigen linearen Funktionale auf X versehen mit der schwachen Topologie über X. Eine positiv definite Funktion F auf X ist genau dann Fouriertransformierte eines straffen Maßes auf X', wenn F in der $\mathfrak{I}$-Topologie stetig im Nullpunkt ist.*

Beweis. Daß die Bedingung notwendig ist, zeigt man wie in [6]. Wir beweisen, daß sie hinreicht. F ist Fouriertransformierte eines positiven Radonmaßes P auf $\tilde{X}$. Wir fixieren zwei strikt positive Zahlen ε und ϱ. Dan gibt es eine Form $S \in \mathfrak{S}$, so daß

$$\|x\|_S < 1 \Rightarrow F(0) - \operatorname{Re} F(x) \leqslant \varepsilon.$$

Sei $\varphi \in \tilde{X}$, so setzen wir

$$\|\varphi\| = \sup\{|\langle \varphi, x \rangle| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\}.$$

Wir erinnern uns an die Algebra $\mathfrak{A}$ des Beweises von Satz 3. Sei

$$\mathfrak{F} = \{f \in \mathfrak{A} : 0 \leqslant f \leqslant 1, f(\varphi) = 0 \text{ für } \|\varphi\| \leqslant \varrho\}.$$

Für $f \in \mathfrak{F}$ ist

$$\int Pf = \int_{\tilde{V}} P_V(da)\, g(\langle a, x_1 \rangle, \ldots, \langle a, x_m \rangle),$$

wo $x_1, \ldots, x_m$ in einem endlich dimensionalen Teilraum V enthalten sind. Sei $y_1, \ldots, y_n$ eine orthonormale Basis von V und sei $\|a\| \leqslant \varrho$, wo $\|a\|$ analog zu $\|\varphi\|$ definiert ist. Dann ist auch $\|\varphi\| \leqslant \varrho$ mit

$$\langle \varphi, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle a, y_i \rangle (y_i, x).$$

Die runde Klammer deutet das Skalarprodukt in X an. Somit ist $g(\langle a, x_1 \rangle, \ldots, \langle a, x_m \rangle) = 0$ für $\|a\| \leqslant \varrho$. Daraus folgt nach einem unten zu formulierenden Hilfssatz, daß

$$\int Pf = \int_{\tilde{V}} P_V(da)\, g(\langle a, x_1 \rangle, \ldots) \leqslant \frac{1}{\sqrt{e} - 1}\left(\varepsilon + \frac{2\langle P, 1 \rangle \|S\|}{\varrho^2}\right).$$

Die Menge $\mathfrak{F}$ ist bezüglich der Relation $\leqslant$ gefiltert, ihr Supremum ist die charakteristische Funktion der Menge $\{\varphi \in \tilde{X} : \|\varphi\| > \varrho\}$. Man schließt daraus, daß

$$P\{\varphi \in \tilde{X} : \|\varphi\| > \varrho\} \leqslant \frac{1}{\sqrt{e} - 1}\left(\varepsilon + \frac{2\langle P, 1 \rangle \|S\|}{\varrho^2}\right)$$

ist. Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Wir tragen noch den von Kolmogorov [4] stammenden Hilfssatz nach:

Hilfssatz 2. *Sei Q ein positives beschränktes Maß auf dem $\boldsymbol{R}^n$ und sei*

$$F(x) = \int Q(da) \exp i \langle a, x \rangle.$$

Sei T eine positiv definite Bilinearform auf $\boldsymbol{R}^n$ mit der Spur $\|T\|$ und folge aus $T(x, x) < 1$, daß $F(0) - \operatorname{Re} F(x) \leqslant \varepsilon$ ist. Dann ist

$$Q\{\|x\| \geqslant \varrho\} \leqslant \frac{1}{\sqrt{e} - 1}\left(\varepsilon + \frac{2F(0)\|T\|}{\varrho^2}\right).$$

Literaturnachweis

[1] N. Bourbaki, *Intégration*, chap. 1-4, Paris 1965.
[2] — *Intégration*, chap. 5, Paris 1956.
[3] I. M. Gelfand und N. J. Wilenkin, *Verallgemeinerte Funktionen IV*, Berlin 1964.
[4] A. N. Kolmogorov, *A note on the papers of R. A. Minlos and V. Sazonov*, Theory of Prob. 4 (1959), S. 221-223.
[5] E. Nelson, *Regular probability measures on function space*, Ann. Math. 69 (1959), S. 630-643.
[6] V. Sazonov, *A remark on characteristic functionals*, Theory of Prob. 3 (1958), S. 188-192.
[7] W. v. Waldenfels, *Zur mathematischen Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 6 (1966), S. 65-112.

Reçu par la Rédaction le 1. 8. 1967

STUDIA MATHEMATICA, T. XXX. (1968)

Symmetric bases of locally convex spaces

by

D. J. H. GARLING (Cambridge)

§ 1. Introduction. Let E be a Hausdorff locally convex space, with Schauder basis $\{x_n\}$, and let $\{f_n\}$ be the sequence of continuous linear functionals biorthogonal to $\{x_n\}$. In the case where E is a Banach space, Singer [9] introduced the following notion of *symmetric basis*: $\{x_n\}$ is a symmetric basis if

$$(\mathrm{SB}_1)\ \sup_{\sigma\in P(N)}\ \sup_{\substack{|\delta_i|\leqslant 1\\ 1\leqslant n<\infty}} \Big\|\sum_{i=1}^{n}\delta_i f_i(x)x_{\sigma(i)}\Big\| < \infty \quad \text{for all } x \text{ in } E.$$

$P(N)$ denotes the set of all permutations of $N=\{1,2,3,\ldots\}$. As far as locally convex spaces are concerned, the condition (SB_1) has the following natural analogue:

(SB_1') $\Big\{\sum_{i=1}^{n}\delta_i f_i(x)x_{\sigma(i)}: |\delta_i|\leqslant 1,\ n\in N,\ \sigma\in P(N)\Big\}$ is bounded in E for each x in E.

In [10], Singer investigated the relationship between (SB_1) and six other conditions ((SB_2)-(SB_7)). In this paper we consider the relationship between (SB_1') and six other conditions ((SB_3), (SB_4'), (SB_5'), (C_1), (C_2) and (C_3)). Of these (SB_3) is identical to Singer's (SB_3), (SB_4') and (SB_5') are analogous to Singer's (SB_4) and (SB_5), and (C_1)-(C_3) are new. In detail, these conditions are:

(SB_3) Every permutation $\{x_{\sigma(n)}\}$ of the basis $\{x_n\}$ is a basis of the space E, equivalent to the basis $\{x_n\}$.

(If $\{x_n\}$ is a basis of a space E, the *sequence space associated with* $\{x_n\}$ is defined to be the linear space of all sequences $\alpha=(\alpha_i)$ for which $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$ is convergent. A basis $\{x_n\}$ of a space E is *equivalent* to a basis $\{y_n\}$ of a space F if the sequence space associated with $\{x_n\}$ is the same as the sequence space associated with $\{y_n\}$.)

(SB_4') $\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_{\sigma(i)}: n\in N,\ \sigma\in P(N)\Big\}$ is bounded in E for each x in E.

(SB_5') $\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_{\sigma(i)}: n\in N\Big\}$ is bounded in E, for each x in E and each σ in $P(N)$.