STUDIA MATHEMATICA, T. XXX. (1968)

Spectres des mesures et mesures absolument continues

par

YVES MEYER (Orsay)

Introduction. Soit E un ensemble d'entiers. Une mesure complexe μ sur le cercle sera appelée *E-mesure* si, pour tout entier n n'appartenant pas à E, le coefficient de Fourier-Stieltjès de μ évalué en n est nul. Nous dirons que E est un *ensemble de Riesz* si toute E-mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur le cercle.

Le but de ce travail est de donner quelques résultats nouveaux sur les ensembles de Riesz. En utilisant la topologie $\mathscr{T}$ induite sur l'ensemble des entiers par celle du compactifié de Bohr de $\mathbf{Z}$, on aboutit à la conclusion suivante: la réunion d'un ensemble de Riesz quelconque et d'un ensemble de Riesz fermé est encore un ensemble de Riesz (théorème 2). Quelques autres résultats généraux de ce type forment la partie I et dans la partie II, divisée en §1 et § 2, sont présentés de nombreux exemples d'application des théorèmes de la partie I.

I. CAS DES GROUPES ABÉLIENS COMPACTS

§ 1. Rappels et notations. Les notations et résultats utilisés sont présentés dans les chapitres 1 et 2 du livre de Rudin ([1]): on appelle G un *groupe abélien compact*, dx la *mesure de Haar* sur G, $L^1(G)$ *l'algèbre de Banach* des classes de fonctions, à valeurs complexes, définies sur G et dx-intégrables. Le produit de deux éléments de $L^1(G)$ est le produit de convolution noté $f*g$ et défini, pour presque tout x de G, par

$$(f*g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)\,dy.$$

Le groupe dual de G est noté Γ. La transformée de Fourier f d'un élément f de $L^1(G)$ est définie sur Γ par

$$f(\gamma) = \int_G (-\gamma, x) f(x)\,dx$$

où (γ, x) est la valeur prise en x par le caractère γ de Γ.

Nous appellerons $A(\Gamma)$ *l'algèbre de Banach des fonctions* $\hat{f}$; par définition

$$\|f\|_{A(\Gamma)} = \|f\|_{L^1(G)}.$$

Si nous munissons G de la topologie discrète, nous obtenons le groupe G_d dont le dual est le compactifié de Bohr $\tilde{\Gamma}$ de Γ. Les fonctions continues sur le groupe compact $\tilde{\Gamma}$ ont pour restrictions à Γ les fonctions presque périodiques définies sur Γ et, réciproquement, toute fonction presque périodique au sens de Bohr sur Γ se prolonge par continuité sur $\tilde{\Gamma}$.

Topologie $\mathcal{T}$. Appelons T le groupe *multiplicatif* des nombres complexes de module 1 et précisons la topologie $\mathcal{T}$ sur Γ induite par celle de $\tilde{\Gamma}$. Nous allons décrire un systéme fondamental de voisinages de 0 pour $\mathcal{T}$. A toute suite finie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de points de G et à tout voisinage v de 0 dans T^n on associe l'ensemble V des points γ de Γ tels que

$$(\gamma, x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in v.$$

En prenant tous les entiers naturels n possibles, toutes les suites $x_1, x_2, \ldots, x_n$ possibles et tous les voisinages v de 0 dans T^n possibles, l'ensemble des V obtenus constitue le système fondamental de voisinages de 0 annoncé.

Mesures. Encore quelques notations sont nécessaires: $M(G)$ est l'algèbre de Banach des mesures complexes (nécessairement bornées) définies sur G et $M_s(G)$ est la partie de $M(G)$ formée des mesures singulières par rapport à la mesure de Haar dx sur G. On a, par le théorème de Lebesgue-Nikodim,

$$M(G) = M_s(G) \oplus L^1(G).$$

Nous appelerons μ_s la *partie singulière* de l'élément μ de $M(G)$: μ_s est la projection sur $M_s(G)$ de l'élément μ de $M(G)$.

La transformée de Fourier d'un élément μ de $M(G)$ est une fonction définie sur Γ par

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-\gamma, x)\, d\mu(x).$$

Le spectre de μ, noté $S(\mu)$, est le support de $\hat{\mu}$ dans Γ discret.

Dans $M_s(G)$ une partie remarquable est formée des mesures discrètes dont l'ensemble est noté $D(G)$. Une mesure discrète σ est une somme normalement convergente de masses ponctuelles et les transformées de Fourier σ forment l'ensemble des restrictions à Γ des éléments de $A(\tilde{\Gamma})$ car on a

$$D(G) = L^1(G_d).$$

§ 2. Ensembles de Riesz et ensembles de Riesz au sens fort. Elargissons le problème posé dans l'introduction grâce à la définition suivante:

Définition 1. Une partie E de Γ est un ensemble de Riesz si toute mesure définie sur G dont le spectre est contenu dans E est absolument continue par rapport à la mesure de Haar dx.

Faisons deux remarques: l'ensemble vide est un ensemble de Riesz car $S(\mu) = \emptyset$ entraîne $\mu = 0$. Toute partie d'un ensemble de Riesz est aussi un ensemble de Riesz. Le théorème 1 ci-dessous nous montre que la topologie $\mathcal{T}$ sur Γ est un outil adéquat à l'étude des ensembles de Riesz.

THÉORÈME 1. *La condition pour une partie E de Γ d'être un ensemble de Riesz est une condition locale lorsque Γ est muni de la topologie $\mathcal{T}$: si E est une partie de Γ et si pour tout a de Γ on peut trouver un voisinage V de a pour $\mathcal{T}$ tel que $V \cap E$ soit un ensemble de Riesz, alors E est un ensemble de Riesz.*

Le théorème 1 est une conséquence simple de la régularité de l'algèbre des fonction définies sur Γ, muni de la topologie $\mathcal{T}$, qui sont les restriction à Γ des éléments de $A(\tilde{\Gamma})$.

PROPOSITION 1. *Si F est un fermé de Γ pour la topologie $\mathcal{T}$ et γ_0 un point de Γ n'appartenant pas à F, on peut trouver une mesure discrète σ sur G telle que*

$$\hat{\sigma}(\gamma_0) = 1, \quad \hat{\sigma}(\gamma) = 0 \quad \textit{pour tout } \gamma \textit{ de } F. \tag{1}$$

La proposition 1 est un corollaire de la régularité de l'algèbre $A(\tilde{\Gamma})$ (Rudin [1], th. 2.6.2, p. 49).

La démonstration du théorème 1 utilise le lemme 1:

LEMME 1. *Pour tout élément μ de $M(G)$ et tout élément σ de $D(G)$, on a*

$$(\mu * \sigma)_s = \mu_s * \sigma.$$

La preuve du lemme 1 est une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue-Nikodim. Puisque $L^1(G)$ et $M_s(G)$ sont fermés et invariants par translation, ils sont aussi invariants par les convolutions avec les éléments σ de $D(G)$.

Ecrivons alors $\mu = \mu_s + f\,dx$ et $\mu * \sigma = \mu_s * \sigma + (f*\sigma)\,dx$.

L'unicité de la décomposition en partie singulière et absolument continue de la mesure $\mu * \sigma$ montre que

$$\mu_s * \sigma = (\mu * \sigma)_s.$$

Démontrons enfin le théorème 1. Soit μ une mesure sur G dont le spectre est contenu dans E et soit μ_s la partie singulière de μ. Nous allons prouver que la transformée de Fourier $\hat{\mu}_s$ est nulle en tout élément a de Γ.

Soit, en effet, V un voisinage de a tel que $V \cap E$ soit un ensemble de Riesz et, grâce à la proposition 1, σ une mesure discrète telle que

$$\hat{\sigma}(a) = 1, \quad \hat{\sigma} = 0 \quad \text{sur } \complement V. \tag{2}$$

Le spectre de $\mu * \sigma$ est contenu dans $E \cap V$, donc dans un ensemble de Riesz et il en découle que

$$0 = (\mu * \sigma)_s = \mu_s * \sigma.$$

En passant aux transformées de Fourier et utilisant (2) on en déduit que $\hat{\mu}_s(a) = 0$ et le théorème 1 est prouvé.

En général, la réunion de deux ensembles de Riesz n'en est pas un; par exemple si $G = T$ et $\Gamma = Z$, l'ensemble des entiers positifs est, d'après le théorème de F. et M. Riesz, un ensemble de Riesz. Il est de même pour l'ensemble des entiers négatifs. Leur réunion n'en est pas un.

Le théorème 2 ci-dessous donne une condition suffisante pour que la réunion de deux ensemble de Riesz E et F soit un ensemble de Riesz.

THÉORÈME 2. *Si F est une partie de Γ fermée pour la topologie $\mathcal{T}$, si en outre F est un ensemble de Riesz, alors, pour tout ensemble de Riesz E, la réunion $E \cup F$ est encore un ensemble de Riesz.*

On peut paraphraser l'énoncé du théorème 2 en introduisant la définition suivante:

Définition 2. Une partie F de Γ est un ensemble de Riesz au sens fort si la fermeture de F dans Γ muni de la topologie $\mathcal{T}$ est encore un ensemble de Riesz.

Le théorème 2 s'énonce: la réunion d'un ensemble de Riesz et d'un ensemble de Riesz au sens fort est encore un ensemble de Riesz.

Passons à la preuve du théorème 1: soit μ une mesure dont le spectre $S(\mu)$ est contenu dans $E \cup F$. En nous servant de que E est un ensemble de Riesz et de ce que F est fermé, montrons que le spectre de la partie singulière μ_s de μ est contenu dans F.

Soit γ_0 un élément de Γ hors de F. On peut trouver un élément σ de $D(G)$ tel que:

$$\hat{\sigma}(\gamma_0) = 1, \quad \hat{\sigma} = 0 \text{ sur } F. \tag{3}$$

C'est la proposition 1. Grâce au lemme 1, on a

$$(\mu * \sigma)_s = \mu_s * \sigma.$$

Mais le spectre de $\mu * \sigma$ est contenu dans E car celui de μ est contenu dans $E \cup F$ et σ vérifie (3). Ainsi $(\mu * \sigma)_s$ est nulle car E est un ensemble de Riesz. Donc $(\mu_s) * \sigma$ est nulle et en passant aux transformées de Fourier et utilisant à nouveau (3), on a $\hat{\mu}_s(\gamma_0) = 0$.

Cette dernière égalité est vérifiée pour tout γ_0 hors de F. Le spectre de μ_s est contenu dans F.

On se sert alors de ce que F est un ensemble de Riesz pour conclure à la nullité de μ_s et la démonstration du théorème 2 est terminée.

Remarque. On peut affaiblir la condition portant sur F en demandant seulement que F ne contienne le spectre d'aucune mesure singulière non nulle. Cependant nous ne connaissons pas d'exemple où cette remarque soit utile.

Nous allons énoncer un résultat reliant les spectres des mesures singulières au problème de la répartition modulo 1 considéré sous l'espect suivant: si Λ est une partie de Γ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une suite d'éléments de G, nous nous intéressons à la répartition sur T^m de l'ensemble, noté $\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des points $(\lambda, x_1), (\lambda, x_2), \ldots, (\lambda, x_n)$ de T^m où λ décrit Λ.

THÉORÈME 3. *Le spectre $\Lambda = S(\mu)$ d'une mesure singulière non nulle μ jouit de la propriété suivante: pour toute suite finie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'éléments de G, l'ensemble $\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de T^n est sans point isolé.*

On peut énoncer le théorème 2 sous une forme plus abstraite: $S(\mu)$ est une partie de Γ sans point isolé quand Γ est muni de la topologie $\mathcal{T}$.

Supposons en effet que γ_0 soit un point isolé de $S(\mu)$ et soit σ un élément de $M(G)$ vérifiant

$$\hat{\sigma}(\gamma_0) = 1, \quad \hat{\sigma}(\gamma) = 0 \quad \text{si } \gamma \in S(\mu), \gamma \neq \gamma_0. \tag{4}$$

Alors $\mu * \sigma$ est singulière; son spectre est réduit à γ_0. Donc $\mu * \sigma$ est nulle et $\hat{\mu}(\gamma_0)$ est aussi nul grâce à (4). Cala contredit le fait que γ_0 appartienne au spectre de μ.

On peut améliorer le théorème 3 grâce à la notion de germe d'ensembles en un point à d'un espace topologique Γ; sur l'ensemble des parties E de Γ nous définissons une relation d'équivalence: E est équivalent à E' s'il existe un voisinage V de a tel que E et E' aient même restriction à V. L'ensemble quotient de l'ensemble des parties de Γ par cette relation d'équivalence est l'ensemble des germes d'ensembles en a.

On peut alors énoncer le théorème 4 où Γ est muni de la topologie $\mathcal{T}$:

THÉORÈME 4. *Si Λ est le spectre d'une mesure singulière non nulle, en aucun point a de l'adhérence de Λ dans Γ muni de la topologie $\mathcal{T}$, le germe de Λ en a n'est le germe en a d'un ensemble de Riesz*

Supposons au contraire qu'il existe un tel point. Soit V un voisinage de a tel que, pour un ensemble de Riesz E, on ait

$$\Lambda \cap V \subset E \cap V \tag{5}$$

et soit W un voisinage de a dont la fermeture soit contenue dans l'intérieur de V. On peut alors trouver un élément σ de $D(G)$ tel que

$$\hat{\sigma} = 1 \text{ sur } W, \quad \hat{\sigma} = 0 \text{ hors de } V \tag{6}$$

(voir, par exemple, Rudin [1], th. 2.6.2, p. 49).

La mesure $\mu * \sigma$ est singulière. Son spectre est contenu dans E grâce à (5) et (6). Puisque E est un ensemble de Riesz, $\mu * \sigma$ est nulle et en passant aux transformées de Fourier on en déduit que $\hat{\mu}$ est nulle sur W; ainsi a n'est pas adhérent au spectre Λ de μ.

Un dernier problème sera abordé dans ce cadre général: donner une condition portant sur une partie E de Γ et assurant la propriété suivante: pour toute mesure μ de $M(G)$ dont le spectre est contenu dans E, le spectre de μ_s, partie singulière de μ est aussi contenu dans E.

THÉORÈME 5. *Le spectre de la partie singulière μ_s d'une mesure μ est contenu dans l'adhérence de $S(\mu)$ dans Γ muni de la topologie $\mathscr{T}$.*

La démonstration du théorème 5 est analogue à celles présentées ci-dessus; soit γ_0 un point de Γ non adhérent à $S(\mu)$ et σ un élément de $D(G)$ tel que

$$\hat{\sigma}(\gamma_0) = 1 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} = 0 \text{ sur } S(\mu).$$

Alors $\sigma * \mu$ est nulle grâce à (7). Il en est de même pour $(\sigma * \mu)_s = \sigma * \mu_s$ et l'on a $\hat{\mu}_s(\gamma_0) = 0$.

II. APPLICATIONS AUX ENSEMBLES D'ENTIERS

§ 1. Ensembles de Riesz au sens fort. Nous allons donner un corollaire du théorème 2 en tenant compte de ce que, si $G = T$ et $\Gamma = Z$, l'ensemble, noté $]-\infty\ -1]$, des entiers négatifs est un ensemble de Riesz.

Rappelons que $\mathscr{T}$ désigne la topologie induite sur Z par celle du compactifié de Bohr $\tilde{Z}$ de Z. Si a est un élément de Z, la classe modulo m composée des entiers $a + km$, $k \in Z$, est un voisinage ouvert et fermé de a pour la topologie $\mathscr{T}$.

PROPOSITION 2. *Si E est un ensemble d'entiers, si E_+ est l'ensemble des éléments positifs de E et F l'ensemble des entiers négatifs adhérents aux éléments de E_+ pour la topologie $\mathscr{T}$, alors, quand F est un ensemble de Riesz au sens fort, E_+ est aussi un ensemble de Riesz au sens fort et E est un ensemble de Riesz.*

Le théorème 2 permet de montrer la proposition 2. La fermeture de E_+ pour la topologie $\mathscr{T}$ est contenue dans la réunion de F et de $[0, +\infty[$; à ce titre, par le théorème 2, cette fermeture est un ensemble de Riesz et E_+ est un ensemble de Riesz au sens fort. Une nouvelle application du théorème 2 prouve que E est un ensemble de Riesz.

Remarque. Pour montrer que F est un ensemble de Riesz au sens fort, on peut de nouveau appliquer la proposition 2 et considérer l'ensemble E'_+ des entiers positifs adhérents à F pour la topologie $\mathscr{T}$ etc. Si l'un des ensembles E'_+, E''_+ etc. est un ensemble de Riesz, E_+ est un ensemble de Riesz au sens fort.

PROPOSITION 3. *L'ensemble des nombres premiers est un ensemble de Riesz au sens fort.*

Nous appliquons la proposition 2 à l'ensemble des nombres premiers: soit n un entier negatif inferieur ou égal à -2; la classe $n + 3n\ Z$ est un voisinage de n pour la topologie $\mathscr{T}$ ne rencontrant aucun nombre premier. L'ensemble F est contenu dans $\{-1\}$; c'est un ensemble de Riesz au sens fort.

PROPOSITION 4. *L'ensemble des carrés parfaits est un ensemble de Riesz au sens fort.*

Nous suivons la même méthode: soit n un entier négatif; la classe $n + 3n^2\ Z$ est un voisinage de n pour la topologie $\mathscr{T}$. Montrons que ce voisinage ne contient aucun carré parfait. On aurait, sinon, $n + 3n^2 p = q^2$, mais n et $1 + 3np$ sont premiers entre eux et, leur produit étant un carré parfait, chacun, au signe près, en est un. Soit $1 + 3np = -r^2$ ce qui s'écrit aussi $r^2 = -1$ (3). On sait que cette équation n'a pas de solution.

PROPOSITION 5. *Soit E un ensemble d'entiers positifs vérifiant la condition suivante: pour une infinité de valeurs de l'entier n, E est à l'exception d'un ensemble fini E_n, contenu dans la réunion des intervalles $[jn, jn + l_n]$ où $j = 0, 1, 2, \ldots$ et où l_n est une suite d'entiers positifs telle que $n - l_n$ tende vers $+\infty$ avec n. Alors E est un ensemble de Riesz au sens fort.*

Si, en effet, a est un entier négatif, on pourra lui associer un n tel que $-n + l_n < a$ grâce à la condition que $n - l_n$ tend vers l'infini avec n. Alors la réunion des intervalles $[jn, jn + l_n]$ où, cette fois, j prend toute valeur entière de $-\infty$ à $+\infty$, est un fermé pour $\mathscr{T}$, contenant E, sauf peut-être E_n et évitant a. Le complémentaire de ce fermé est Ω, un ouvert contenant a et dont l'intersection avec E est au plus réduite à E_n. Il reste à séparer a de E_n; mais la topologie $\mathscr{T}$ est séparée et puisque a n'est pas dans E_n on peut trouver un voisinage V de a ne rencontrant pas E_n. Le voisinage $V \cap \Omega$ de a ne rencontre pas E et, à ce stade, on applique la proposition 2.

PROPOSITION 6. *Si t_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, est une suite d'entiers positifs telle que $t_{k-1}/t_k = m_k$ soit un entier supérieur ou égal à 3, alors l'ensemble E de toutes les sommes finies*

$$\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k t_k \quad \text{où} \quad \varepsilon_k \in \{0, 1\}$$

est un ensemble de Riesz au sens fort.

Nous montrons que l'ensemble E remplit les conditions suffisantes de la proposition 5 en écrivant, pour tout entier s,

$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon_k t_k = \sum_{0\leqslant k\leqslant s-1}\varepsilon_k t_k + \sum_{k\geqslant s}\varepsilon_k t_k = jt_s + \sum_{0\leqslant k\leqslant s-1}\varepsilon_k t_k.$$

On pose $l_n = t_0+t_1+\ldots+t_{s-1}$ si $n = t_s$. Grâce à la croissance rapide des t_n, $n-l_n$ dépasse $n/2$ ce qui termine la démonstration.

Remarque. En permettant aux ε_k de valoir indifféremment -1, 0 ou 1, l'ensemble E obtenu ne serait plus un ensemble de Riesz au sens fort car sa réunion avec l'ensemble de Riesz $]-\infty, 0]$ contiendrait le spectre de la mesure singulière définie par le produit de Riesz $\prod_{n\geqslant 0}(1+\cos t_n x)$.

Proposition 7. *Une suite, lacunaire à la Hadamard, d'entiers positifs est un ensemble de Riesz au sens fort.*

La preuve de la proposition 7 débute par une définition: un ensemble E d'entiers sera appelé un *ensemble* I_0 si toute fonction bornée et définie sur E, à valeurs complexes, est la restriction à E d'une fonction presque périodique au sens de Bohr et définie sur Z.

Alors la proposition 7 est un corollaire des résultats suivants:

une suite lacunaire à la Hadamard d'entiers positifs est un ensemble I_0 ([4], théorème 2, p. 96) et est aussi un ensemble de Sidon ([1], p. 127);

tout ensemble I_0 est fermé pour la topologie $\mathcal{T}$ ([3], preuve du théorème 1, p. 235).

Toute réunion finie de suites lacunaires à la Hadamard est aussi un ensemble de Riesz au sens fort. Cela incite à poser le problème suivant: tout ensemble de Sidon est-il un ensemble de Riesz au sens fort?

Indiquons une réponse partielle à cette question, donnée par Rudin [2]: la réunion de $]-\infty, 0]$ et d'un ensemble de Sidon est un ensemble de Riesz. Plus généralement, Rudin pose le problème de savoir quand la réunion de $]-\infty, 0]$ et d'un ensemble E d'entiers positifs est un ensemble de Riesz. Il a donné une condition suffisante ([2], théorème 5.7.1, p. 226): il en est ainsi si E est un ensemble $\Lambda(1)$, c'est-à-dire si les normes L^1 et $L^{1/2}$ des polynômes trigonométriques à spectre dans E sont équivalentes. Un ensemble de Sidon est bien un ensemble $\Lambda(1)$ ([2], théorème 3.1, p. 210). Ceci ne suffit pas à montrer qu'un ensemble de Sidon est un ensemble de Riesz au sens fort.

Pour terminer cette digression, comparons nos résultats à celui qui vient d'être cité: l'ensemble E de toutes les sommes finies

$$\sum_{n\geqslant 0}\varepsilon_n 3^n, \qquad \varepsilon_n\in\{0, 1\},$$

est un ensemble de Riesz au sens fort (proposition 6), mais ce n'est pas un ensemble $\Lambda(1)$ ([2], théorème 3.8, p. 215). De même, la réunion des ensembles finis $\{n!, 2n!, \ldots, nn!\}$ est, grâce à la proposition 5, un ensemble de Riesz au sens fort sans etre un ensemble $\Lambda(1)$ ([2], théorème 4.1, p. 216).

Mais, ne sachant pas si un ensemble de Sidon est un ensemble de Riesz au sens fort, nous ne savons pas davantage si un ensemble $\Lambda(1)$ est un ensemble de Riesz au sens fort. Inversement, on ne sait pas si l'ensemble des nombres premiers ou l'ensemble des carrés parfaits, qui sont des ensembles de Riesz au sens fort, sont des ensembles $\Lambda(1)$.

§ 2. Ensembles cohérents d'entiers relatifs. Les ensembles introduits ci-dessous ont, pour les problèmes qui nous occupent, des propriétés semblables à celles des sous groupes. Des résultats sur les ensembles cohérents permettront de construire de nouveaux exemples d'ensembles de Riesz au sens fort (théorème 8).

Définition des ensembles cohérents. On appelle $(E_k)_{k\geqslant 0}$, une suite d'ensembles finis d'entiers relatifs; la plus grande valeur absolue d'un élément de E_k sera notée $|E_k|$. Une suite $(t_k)_{k\geqslant 0}$ d'entiers positifs vérifie les deux conditions:

(1) $$t_{k+1} > 2\sum_{1}^{k} t_j|E_j|,$$

(2) $$\sum_{k\geqslant 0} t_k|E_k|/t_{k+1} < +\infty.$$

Définition 3. Pour toute suite $(t_k)_{k\geqslant 0}$ et $(E_k)_{k\geqslant 0}$ avant les propriétés ci-dessus, on appelle *ensemble cohérent associé à ces suites*, l'ensemble E de tous les entiers relatifs s'écrivant comme des sommes finies

$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon_k t_k, \qquad \varepsilon_k\in E_k.$$

Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble produit $\prod_{k\geqslant 0} E_k$. Munissons chaque E_k de la topologie discrète et $\mathcal{E}$ de la topologie produit. Appelons π l'application de E dans $\mathcal{E}$, $n\to(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ définie, grâce à (1) par $n = \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon_k t_k$.

Propriétés topologiques des ensembles cohérents. Rappelons que $\mathcal{T}$ est la topologie induite sur Z par celle du compactifié de Bohr $\tilde{Z}$ de Z.

Théorème 6. *Un ensemble cohérent E est fermé dans Z pour la topologie $\mathcal{T}$ et l'application π de E muni de la topologie $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{E}$ est continue.*

La preuve du théorème 6 utilise un lemme classique de mauvaise répartition modulo 1. Pour tout réel x, appelons $[x]$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x et posons $(x) = x - [x]$. Ainsi (x) appartient à $[0, 1[$.

LEMME 2. *Soit $(t_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de réels positifs telle que $t_{k+1} \geqslant 2t_k$ pour tout k, $k \geqslant 0$, et s_k, $k \geqslant 0$, une suite réelle quelconque.*
Sur tout intervalle de longueur $2/t_0$ de la droite réelle, on peut trouver un réel x tel que, pour tout k positif ou nul, on ait

$$(s_k) \leqslant (t_k x) < 2t_k/t_{k+1} + (s_k). \tag{1}$$

Rappelons la démonstration du lemme; la condition (1) est équivalente à l'une des conditions

$$s_k/t_k + n/t_k \leqslant x < n/t_k + 2/t_{k+1} + s_k/t_k \qquad (n \in Z)$$

définissant des intervalles $J_{k,n}$ de longueur $2/t_{k+1}$ et dont les centres sont distants les uns des autres de $1/t_k$. Appelons en outre J_{-1} l'intervalle donné de longueur $2/t_0$. La condition $1/t_k + 2/t_{k+1} \leqslant 2/t_k$ assure que tout intervalle $J_{k,n}$ contient un intervalle $J_{k+1,m}$ ce qui démontre le lemme.

Nous allons d'abord prouver que E est fermé et, pour cela, considérer un élément n de Z n'appartenant pas à E et construire un voisinage V de n ne recontrant pas E. Pour construire V, nous allons considérer E comme réunion finie de parties P_j, $j \in J$, et construire un voisinage V_j de n ne rencontrant pas P_j. Le voisinage V de n sera l'intersection des V_j. Il reste à préciser P_j et V_j. Appelons s un entier assez grand pour que l'on ait

$$\sum_s^{\infty} |E_k|\, t_k/t_{k+1} \leqslant \frac{1}{12}, \tag{3}$$

$$|n| \leqslant t_{s-1}, \tag{4}$$

$$24 \sum_0^{s-1} |E_k|\, t_k \leqslant t_s, \tag{5}$$

ce qui est possible grâce à (1) et (2). Appelons J l'ensemble de tous les éléments j de E s'écrivant

$$j = \sum_0^{s-1} \varepsilon_k t_k \quad \text{où} \quad \varepsilon_k \in E_k$$

et, pour tout j de J, appelons P_j l'ensemble des éléments m de E s'écrivant

$$m = j + \sum_s^{\infty} \varepsilon_k t_k, \qquad \varepsilon_k \in E_k.$$

Il faut d'abord remarquer que, si n n'appartient pas à E, n n'appartient pas à J, grâce à (1) et (4). Si I_j est l'intervalle de R de centre $1/2(n-j)$ et de longueur $2/t_s$, on a, grâce à (4) et (5),

$$|n-j| \leqslant t_s/12 \quad \text{et} \quad |1 + e^{2\pi i(n-j)x}| \leqslant 1$$

pour tout x dans I_j.

Mais, d'aprés le lemme de mauvaise répartition, I_j contient un nombre réel ξ tel que, si $k \geqslant s$, on ait

$$0 \leqslant (t_k \xi) \leqslant 2t_k/t_{k+1}$$

et tous les réels $\xi(\sum_{k\geqslant s} \varepsilon_k t_k)$ appartiennent à la réunion des intervalles de centres entiers et de longueur commune $4\sum_{k\geqslant s} |E_k|\, t_k/t_{k+1}$. Cela assure, grâce à (3), que pour tout élément m de P_j, on ait

$$|-1 + e^{2\pi i(m-j)\xi}| \leqslant 1.$$

Le voisinage V_j de n sera défini comme l'ensemble des éléments t de Z tels que l'on ait

$$|1 + e^{2\pi i(t-j)\xi}| < \sqrt{3}.$$

Passons à la continuité de π. Le résultat que nous venons de démontrer prouve, en particulier, que l'ensemble des sommes finies $\sum_{k\geqslant s} \varepsilon_k t_k$, $\varepsilon_k \in E_k$, est fermé dans Z pour la topologie $\mathscr{T}$ et il en est de même pour les ensembles que nous avons appelés P_j. Mais, si les P_j sont fermés, ils sont aussi ouverts dans E car ils forment une partition finie de E. Or les P_j sont les images réciproques par π des ouverts élémentaires de $\mathscr{E}$. Ainsi π est continue.

Remarque. L'application π n'est pas un homéomorphisme de E sur $\pi(E)$. Par exemple si $E_k = \{0, 1\}$ et si t_k est, pour tout k positif, un entier impair, un ouvert de E muni de $\mathscr{T}$ est l'ensemble des entiers pairs de E. Cela signifie que $\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k$ doit etre pair. Cette condition ne définit pas un ouvert de $\mathscr{E}$.

Mesures ayant leur spectre dans un ensemble cohérent. Par application du théorème 5, on obtient le résultat suivant: si μ est une mesure bornée sur le cercle, si le spectre de μ est contenu dans E, il en est de même du spectre de la partie singulière de μ et de la partie absolument continue de μ. *Si les ensembles E_k sont des ensembles d'entiers positifs, E est un ensemble de Riesz au sens fort.* Si $E_k = \{-1, 0, 1\}$, E est le spectre du produit de Riesz $\prod_{k\geqslant 0}(1 + \cos t_k x)$ qui définit une mesure singulière. Mais si, par exemple, $E_k = \{-2, 0, 1\}$, nous ne savons pas si E est un ensemble de Riesz.

On a le curieux résultat d'invariance suivant:

THÉORÈME 7. *Si μ est une mesure singulière sur le cercle, E un ensemble cohérent d'entiers, la propriété $S(\mu) \cap [0, +\infty[\subset E$ entraîne $S(\mu) \subset E$.*

S'il n'en était pas ainsi, $(CE) \cap S(\mu)$ serait non vide et contenu dans $]-\infty, 0]$. Or un germe de spectre de mesure singulière ne peut être un germe d'ensemble de Riesz (théorème 4).

Construction d'ensembles de Riesz au sens fort.

THÉORÈME 8. *Soit E un ensemble cohérent d'entiers et pour tout entier h, $E(h)$ la partie de E composée de toutes les sommes $\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon_k t_k$ où ε_k est dans E_k et où au plus h des ε_k sont négatifs. Alors $E(h)$ est un ensemble de Riesz au sens fort.*

Démonstration. L'ensemble $\pi(E(h))$ est fermé dans $\mathscr{E}$ et, grâce à la continuité de l'application π, $E(h)$ est fermé dans E ce qui signifie que $E(h)$ est fermé dans Z muni de la topologie $\mathscr{T}$ car E est fermé. Il reste à montrer que $E(h)$ est un ensemble de Riesz. Nous appliquerons, à cet effet, la proposition 2 où cependant le rôle des entiers positifs et des entiers négatifs sera échangé; ainsi, pour démontrer que $E(h)$ est un ensemble de Riesz, nous déterminerons l'ensemble F des entiers positifs adhérents pour la topologie $\mathscr{T}$ à $]-\infty, -1] \cap E(h)$. Si nous prouvons que F est un ensemble de Riesz au sens fort, il en sera de même de $E(h)$. Cette dernière vérification doit se faire par récurrence sur h. Nous savons déjà que $E(0)$ est un ensemble de Riesz au sens fort. Supposons que $E(h-1)$ en soit un et admettons, pour l'instant, que F est contenu dans $E(h-1)$. Il en résultera que $E(h)$ est un ensemble de Riesz au sens fort. Pour montrer que F est contenu dans $E(h-1)$ remarquons d'abord que F est contenu dans $E(h)$ et que tout élément n de F s'écrit donc

$$n = \sum_{0}^{K} a_k t_k, \qquad a_k \in E,\ a_k > 0.$$

Grâce à la continuité de l'application π, on sait que la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ de $\mathscr{E}$ est adhérente, pour la topologie de $\mathscr{E}$ aux suites $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ définissant les éléments négatifs de $E(h)$; ces suites $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ comportent au plus h termes négatifs et le dernier terme non nul de ces suites est toujours négatif. L'ensemble V formé des suites $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ telles que

$$\varepsilon_0 = a_0, \quad \varepsilon_1 = a_1, \quad \ldots, \quad \varepsilon_K = a_K,$$

est un voisinage de $\pi(n)$. Si h des nombres $a_0, a_1, \ldots, a_K$ étaient négatifs, V ne pourrait rencontrer une suite $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ définissant un élément de $]-\infty, -1] \cap E(h)$; cette suite se terminerait par un terme négatif et a_K étant positif, cette suite comporterait plus de h termes négatifs; alors n ne serait pas adhérent à $]-\infty, -1] \cap E(h)$. Ainsi n appartient à $E(h-1)$ ce qui termine la démonstration.

Travaux cités

[1] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, 1962.

[2] — *Trigonometric series with gaps*, J. Math. Mech. 9 (1960), p. 203-228.

[3] C. Ryll-Nardzewski, *Concerning almost periodic extensions of functions*, Colloquium Math. 12 (1964), p. 235-237.

[4] E. Strzelecki, *A problem on interpolation by periodic and almost periodic functions*, ibidem 11 (1963), p. 91-99.

Reçu par la Rédaction le 30. 7. 1967