Zur Theorie der impliziten Funktionaloperationen

von

M. KERNER (Warszawa).

Die vorliegende Arbeit ist einigen Fragen über Operationen in abstrakten Räumen gewidmet. Obwohl ihr Hauptgegenstand die Untersuchung von impliziten nichtlinearen Operationen ist, enthalten zwei erste Paragraphen einige Überlegungen, die auch in anderen Gebieten der allgemeinen Analysis Anwendung finden können.

§ 1. Lineare Operationen.

In diesem Paragraphen kommen im allgemeinen zwei abstrakte Elemente P und X vor. X gehört einem BANACHschen [1]) (*linearen, normierten und vollständigen*) Raume, und P allgemeiner einem *metrischen* Raume an.

Es sei $F(P,X)$ eine Operation, die jedem P einer Umgebung eines bestimmten Elementes P_0 und jedem X ein Element eines (im allgemeinen vom X-Raume verschiedenen) BANACHschen Raumes zuordnet. Wir setzen voraus, daß $F(P,X)$ inbezug auf X *linear* und inbezug auf P für P_0 *stetig* ist.

Dabei ist als *linear* eine Operation bezeichnet, die *additiv* und *stetig* ist.

Für jedes P existiert eine solche positive Zahl m, die von P abhängen kann, daß für alle X die Ungleichung

$$\|F(P,X)\| \leqslant m \,.\, \|X\|$$

[1]) Fundamenta mathematicae 3 (1922) p. 133−181.

gilt [2]). Es sei $m_F(P)$ die kleinste Zahl m, die diese Ungleichung erfüllt. Dann haben wir

$$\|F(P,X)\| \leqslant m_F(P) \,.\, \|X\| \,. \tag{1}$$

Das numerische Funktional $m_F(P)$ von P nennt man oft die *Norm* der linearen Operation $F(P,X)$ für ein gegebenes P. Man kann auch $m_F(P)$ definieren als das Maximum von $F(P,X)$ in der Einheitskugel des X-Raumes, das heißt, für alle X, die die Ungleichung

$$\|X\| \leqslant 1 \tag{2}$$

erfüllen.

Der Gegenstand dieses Paragraphen ist die Untersuchung des Funktionals $m_F(P)$ im Punkte P_0 und seiner Umgebung.

Mit $\mathcal{K}(P_0, r)$ bezeichnen wir eine Kugel im P-Raume, deren Mittelpunkt in P_0 liegt und deren Halbdurchmesser gleich r ist. Mit $\sup_r m_F(P)$ und $\inf_r m_F(P)$ bezeichnen wir die obere und untere Grenze von $m_F(P)$ in der Kugel $\mathcal{K}(P_0, r)$. Dabei lassen wir eine unendliche obere Grenze zu.

Es gilt für jedes r

$$\inf_r m_F(P) \leqslant m_F(P_0) \leqslant \sup_r m_F(P) \,. \tag{3}$$

Es leuchtet ein, daß $\inf_r m_F(P)$ eine wachsende und $\sup_r m_F(P)$ eine abnehmende Funktion von $1/r$ ist. Nach (3) besitzen beide Grenzen für $r \longrightarrow 0$. Bezeichnen wir diese mit $\underline{m}_F(P_0)$ und $\overline{m}_F(P_0)$, so gelten die Ungleichungen

$$0 \leqslant \inf_r m_F(P) \leqslant \underline{m}_F(P_0) \leqslant m_F(P_0) \leqslant \overline{m}_F(P_0) \leqslant \sup_r m_F(P) \leqslant \infty \,. \tag{4}$$

Hier sind $\underline{m}_F(P_0)$ und $\overline{m}_F(P_0)$ der untere und obere Limes von $m_F(P)$ in P_0.

Man kann leicht folgende Beziehungen verifizieren:

$$\overline{m}_{F+G}(P_0) \leqslant \overline{m}_F(P_0) + \overline{m}_G(P_0) \,, \tag{5}$$

$$\overline{m}_{aF}(P_0) = |a| \,.\, \overline{m}_F(P_0) \,. \tag{6}$$

[2]) Banach, loc. cit., p. 153, Lemme 3.

Satz 1. *Unter obigen Voraussetzungen über $F(P, X)$ ist das Funktional $m_F(P)$ in P_0 nach unten stetig:*

$$\underline{m}_F(P_0) = m_F(P_0). \tag{7}$$

Beweis. Wäre es

$$\underline{m}_F(P_0) < m_F(P_0),$$

so wähle man eine Zahl k, für die

$$\underline{m}_F(P_0) < k < m_F(P_0); \tag{8}$$

nach (4) ist dann für jedes r

$$\inf_r m_F(P) < k.$$

In jeder Kugel $\mathcal{K}\left(P_0, \frac{1}{n}\right)$ kann man ein Element P finden, das wir mit P_n bezeichnen, für welches

$$m_F(P_n) < k;$$

nach der Bedeutung von $m_F(P)$ ist für alle X der Kugel (2)

$$\|F(P_n, X)\| < k. \tag{9}$$

Da aber

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P_0,$$

so folgt aus (9) und aus der Stetigkeit von $F(P, X)$ für jedes X der Kugel (2)

$$\|F(P_0, X)\| \leqslant k,$$

und daraus

$$m_F(P_0) \leqslant k,$$

was der Ungleichung (8) widerspricht. Damit ist der Satz bewiesen worden.

Im allgemeinen ist $m_F(P)$ nicht nach oben stetig, wie es an einem Beispiele gezeigt werden wird. Es gilt jedoch der

Satz 2. *Unter obigen Voraussetzungen über $F(P, X)$ ist der obere Limes $\overline{m}_F(P_0)$ von $m_F(P)$ im Punkte P_0 endlich:*

$$\overline{m}_F(P_0) < \infty. \tag{10}$$

Beweis. Wäre es

$$\overline{m}_F(P_0) = \infty,$$

so hätte man nach (4) für jedes r

$$\sup_r m_F(P) = \infty.$$

In jeder Kugel $\mathcal{K}\left(P_0, \frac{1}{n}\right)$ kann man ein Element P finden, das wir mit P_n bezeichnen, für welches gilt

$$m_F(P_n) > n. \tag{11}$$

Da

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P_0,$$

so folgt aus der Stetigkeit von $F(P, X)$ für jedes X

$$\lim_{n \to \infty} F(P_n, X) = F(P_0, X).$$

Aus einem Satze von Herrn Banach [3]) schließt man, daß es eine positive Zahl m gibt, derart daß

$$\|F(P_n, X)\| \leqslant m \,.\, \|X\|$$

für jedes n, oder, nach unserer Bezeichnung,

$$m_F(P_n) \leqslant m,$$

was der Ungleichung (11) widerspricht.

Der bewiesene Satz kann auch so ausgesprochen werden:

Satz 2′. *In einer hinreichend kleinen Umgebung von P_0 ist $m_F(P)$ beschränkt.*

Oder genauer:

Satz 2″. *Für jede Zahl $m > \overline{m}_F(P_0)$ kann man eine Umgebung von P_0 finden, in der*

$$m_F(P) \leqslant m.$$

In dieser Umgebung gilt die Ungleichung

$$\|F(P, X)\| \leqslant m \,.\, \|X\|.$$

Als eine unmittelbare Folgerung aus dem Satze 2 beweisen wir den

Satz 3. *Ist die Operation $F(P, X)$ linear inbezug auf X und stetig inbezug auf P für $P = P_0$, so ist $F(P, X)$ stetig in-*

[3]) Loc. cit., p. 157, Théorème 5.

bezug auf P und X (zusammengenommen) für $P = P_0$ und jedes X.

Beweis. Es sei X ein bestimmtes Element des X-Raumes und X' ein beliebiges Element desselben Raumes. Dann ist

$$\|F(P,X') - F(P_0,X)\| \leqslant \|F(P,X'-X)\| + \|F(P,X) - F(P_0,X)\|.$$

Es sei m eine Zahl, die größer als $\overline{m}_F(P_0)$ ist. Wir wählen eine positive Zahl ϱ derart, daß für

$$(12) \qquad \|P - P_0\| < \varrho$$

der erste Ausdruck rechts kleiner als $m . \|X' - X\|$ wird (was nach dem Satze 2″ möglich ist), und der zweite Ausdruck kleiner als $\varepsilon/2$ (was der Stetigkeit von $F(P,X)$ halber möglich ist). Gilt (12) und außerdem noch

$$\|X' - X\| < \frac{\varepsilon}{2m},$$

so hat die Ungleichung

$$\|F(P,X') - F(P_0,X)\| < \varepsilon$$

statt, womit der Satz bewiesen worden ist.

Ich bringe ein Beispiel, aus dem es einleuchtet, daß es wirklich Operationen $F(P,X)$ gibt, für die $m_F(P)$ nicht nach oben stetig ist, also

$$(13) \qquad m_F(P_0) < \overline{m}_F(P_0).$$

Es werde als P eine relle Zahl p, als P_0 die Zahl 0, als X eine im Intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ definierte Funktion $x(t)$ vom summierbaren Quadrate gewählt. Es sei ferner für $0 < |p| < 1$

$$(14) \qquad F[p, x(t)] = 2t . \int_0^1 \sin \pi t E \frac{1}{|p|} . x(t)\, dt,$$

und

$$(15) \qquad F[0, x(t)] = 0.$$

Hier bedeutet $E\frac{1}{|p|}$ die größte ganze Zahl, die $\frac{1}{|p|}$ nicht überschreitet. Das Integral in (14) ist ein Fourierscher Koeffizient von $x(t)$, der mit $|p|$ gegen Null strebt. Also ist $F[p, x(t)]$ für jedes $x(t)$ und für $p = 0$ inbezug auf p stetig. Es ist auch inbezug auf $x(t)$ linear.

Ich behaupte $m_F(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $p \neq 0$. Denn es folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\left[\int_0^1 \sin \pi t E \frac{1}{|p|} \cdot x(t)\, dt\right]^2 \leqslant \int_0^1 \sin^2 \pi t E \frac{1}{|p|} dt \cdot \int_0^1 x^2(t)\, dt,$$

oder

$$\left|\int_0^1 \sin \pi t E \frac{1}{|p|} . x(t)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \|x(t)\|,$$

und, da $\|2t\| = 1$, so ist nach (14) für $p \neq 0$

$$(16) \qquad \|F[p, x(t)]\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \|x(t)\|.$$

Anderseits, erhält man für $x(t) = \sin \pi t E \frac{1}{|p|}$, also für $\|x(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\left\|F\left[p, \sin \pi t E \frac{1}{|p|}\right]\right\| = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt, daß man in (16) die Zahl $1/\sqrt{2}$ durch keine kleinere ersetzen kann. Damit ist bewiesen worden, daß wirklich für $p \neq 0$ $m_F(p) = 1/\sqrt{2}$.

Daraus folgt, daß $\overline{m}_F(0) = 1/\sqrt{2}$. Da nach (15) $m_F(0) = 0$ ist, so gilt die Ungleichung (13).

Dagegen gilt der einleuchtende

Satz 4. *Ist jede beschränkte Folge des X-Raumes kompakt*[4]*, so ist unter obigen Voraussetzungen über $F(P,X)$ das Funktional $m_F(P)$ in P_0 stetig.*

Um diesen Satz zu begründen, genügt es nach dem Satze 1 die Gleichheit

$$(17) \qquad m_F(P_0) = \overline{m}_F(P_0)$$

zu beweisen.

[4]) Für einen solchen Raum gibt es eine endliche lineare Basis. Vgl. Riesz, Acta mathematica 41 (1916) p. 77—79.

Beweis. Wäre es

$$m_F(P) < \overline{m}_F(P_0),$$

so wähle man eine Zahl k, für die

$$(18) \qquad m_F(P_0) < k < \overline{m}_F(P_0).$$

Nach (4) ist dann für jedes r

$$\sup_r m_F(P) > k.$$

In jeder Kugel $\mathcal{K}\left(P_0, \frac{1}{n}\right)$ kann man ein Element P finden, das wir mit P_n bezeichnen, für welches

$$m_F(P_n) > k.$$

Also gibt es für jedes n ein Element X_n der Einheitskugel (2) des X-Raumes, für das

$$(19) \qquad \|F(P_n, X_n)\| > k.$$

Die beschränkte (also kompakte) Folge X_n umfaßt eine konvergente Teilfolge X_{n_i}, die gegen eine Grenze X strebt. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} P_{n_i} = P_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} X_{n_i} = X.$$

Nach dem Satze 3 ist $F(P, X)$ für P_0 und X stetig, und es folgt aus (19)

$$\|F(P_0, X)\| \geqslant k.$$

Da X der Kugel (2) angehört, so folgt

$$m_F(P_0) \geqslant k,$$

was der Ungleichung (18) widerspricht.

Wir bemerken, daß man in allen Beweisen dieses Paragraphen voraussetzen kann, daß F von einigen Elementen $P, Q, \ldots$ für $P_0, Q_0, \ldots$ stetig abhängt.

§ 2. Differenziale und die Lipschitzsche Bedingung.

In diesem Paragraphen betrachten wir eine Funktionaloperation $F(P)$, die einem Elemente P eines BANACHschen Raumes

ein Element eines ebensolchen Raumes zuordnet. Wir setzen voraus, daß $F(P)$ in der Umgebung von P_0 ein *Differenzial* besitzt. Ich errinere an die Definition des Differenzials nach Herrn FRÉCHET [5]:

Gibt es eine lineare Operation $\Psi(X)$ derart, daß

$$(20) \qquad \frac{\|F(P+X) - F(P) - \Psi(X)\|}{\|X\|}$$

mit $\|X\|$ gegen Null strebt, so heißt $\Psi(X)$ das Differenzial (die Differenzialoperation) der Operation $F(P)$ in P.

Das ist eine Operation, die von P und X abhängt. Wir bezeichnen sie (anders, als Herr FRÉCHET) mit

$$(21) \qquad dF(P; X).$$

Wir setzen noch voraus, daß sie in P_0 inbezug auf P stetig ist.

Die Operation $dF(P; X)$ erfüllt alle Voraussetzungen, die im § 1 über $F(P, X)$ gemacht wurden. Wir können auf $dF(P; X)$ alle Überlegungen des § 1 übertragen. Doch ist zu bemerken, daß jetzt die P- und X-Räume zusammenfallen (und beide BANACHisch sind).

Insbesondere können wir für (21) ein Funktional $m_{dF}(P)$, und beide Limites, $\underline{m}_{dF}(P_0)$ und $\overline{m}_{dF}(P_0)$, bilden. Dann gilt die Beziehung

$$(22) \qquad 0 \leqslant \underline{m}_{dF}(P_0) = m_{dF}(P_0) \leqslant \overline{m}_{dF}(P_0) < \infty.$$

Ist jede beschränkte Folge des P-Raumes kompakt, so soll auch das vorletzte Zeichen ein Gleichheitszeichen sein.

Um den Ergebnissen des § 1 wichtige Eigenschaften der Operation $F(P)$ entnehmen zu können, werden wir den folgenden Grundsatz beweisen:

Satz 5. *Gilt für eine positive Zahl m und für jedes P einer konvexen Menge des P-Raumes die Ungleichung*

$$(23) \qquad \|dF(P; X)\| \leqslant m \,.\, \|X\|,$$

so gilt auch für jedes P und P' dieser Menge die Ungleichung

$$(24) \qquad \|F(P') - F(P)\| \leqslant m \,.\, \|P' - P\|.$$

[5]) Annales de l'École Normale Supérieure III 42 (1925) p. 293—323.

Als *konvexe* Menge bezeichnen wir, wie gewöhnlich, eine Menge, die mit den beiden Endpunkten einer geraden Strecke immer auch die ganze Strecke enthält. Beispiele: gerade Strecke, Kugel, der ganze Raum.

Beweis. Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Ist die Behauptung nicht richtig, so gibt es zwei Elemente P und P' der konvexen Menge, für die

$$\|F(P')-F(P)\| > m \, . \, \|P'-P\| . \tag{25}$$

Wir wollen aus (25) auf einen Widerspruch schließen.

Es sei $m' > m$ eine Zahl, für die (25) noch erfüllt bleibt:

$$\|F(P')-F(P)\| > m' \, . \, \|P'-P\| . \tag{26}$$

Den reellen Zahlen u des Intervalls $0 \leqslant u \leqslant 1$ ordnen wir Elemente $P+u(P'-P)$ zu. Damit ist eine gerade Strecke gebildet, die P und P' verbindet, und daher in unserer konvexen Menge liegt. Jeder Zahl u desselben Intervalls soll weiter das Element

$$F(u) = F[P+u(P'-P)] \tag{27}$$

zugeordnet werden.

Man überzeugt sich leicht, daß für

$$0 \leqslant u_1 < u_2 < u_3 \leqslant 1$$

aus den Ungleichungen

$$\|F(u_2)-F(u_1)\| \leqslant m' \, . \, (u_2-u_1) \, . \, \|P'-P\| \tag{28 a}$$

$$\|F(u_3)-F(u_2)\| \leqslant m' \, . \, (u_3-u_2) \, . \, \|P'-P\| \tag{28 b}$$

die Ungleichung

$$\|F(u_3)-F(u_1)\| \leqslant m' \, . \, (u_3-u_1) \, . \, \|P'-P\| \tag{28 c}$$

folgt.

Jetzt bilden wir eine Intervallenfolge $\mathcal{J}_n = (a_n, b_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

1° $\mathcal{J}_0 = (0, 1)$,

2° $\mathcal{J}_{n+1}$ bezeichnet ein der zwei Intervalle, die aus $\mathcal{J}_n$ durch Halbierung entstehen,

3° für jedes n ist

$$\|F(b_n)-F(a_n)\| > m' \, . \, (b_n-a_n) \, . \, \|P'-P\| . \tag{29}$$

Die Möglichkeit der Bedingung 3° genugzutun läßt sich folgendermaßen begründen. Erstens gilt die Ungleichung (29) für

$n = 0$, weil sie nach (27) mit (26) übereinstimmt. Dann, gilt sie für ein bestimmtes n, so muß sie für eines der zwei Intervalle gelten, die aus $\mathcal{J}_n$ durch Halbierung entstehen. Denn anderfalls müßten für beide Teilintervalle die Ungleichungen (28 a) und (28 b) erfüllt sein, und daraus könnte man für $\mathcal{J}_n$ die Ungleichung (28 c) schließen, was (29) widerspricht.

Aus 2° folgt, daß $\mathcal{J}_n$ eine abnehmende Folge von Intervallen bildet, deren Länge $1/2^n$ gegen Null strebt. Es gibt eine Zahl c $(0 \leqslant c \leqslant 1)$, die allen Intervallen $\mathcal{J}_n$ angehört.

Führen wir in (20) das Element $\bar{P} = P + c(P'-P)$ anstatt P, und $v(P'-P)$ anstatt X ein. Aus der Definition des Differenzials folgt, daß es eine solche positive Zahl δ gibt, daß für $|v| < \delta$ die Ungleichung

$$\frac{\|F[\bar{P}+v(P'-P)]-F[\bar{P}]-dF[P; v(P'-P)]\|}{|v| \, . \, \|P'-P\|} \leqslant m'-m$$

erfüllt ist. Nach (27) folgt daraus

$$\|F(c+v)-F(c)\| \leqslant \|dF[\bar{P}; v(P'-P)]\| + (m'-m) \, . \, |v| \, . \, \|P'-P\| ,$$

und nach (23)

$$\|F(c+v)-F(c)\| \leqslant m' \, . \, |v| \, . \, \|P'-P\| \tag{30}$$

für $|v| < \delta$.

Für hinreichend großes n liegt das Intervall $\mathcal{J}_n$ im Intervalle $(c-\delta, \; c+\delta)$. Genauer:

$$c-\delta < a_n \leqslant c \leqslant b_n < c+\delta .$$

Nach (30), wo man der Reihe nach $v = a_n - c$ und $v = b_n - c$ einsetzt, gilt

$$\|F(c)-F(a_n)\| \leqslant m' \, . \, (c-a_n) \, . \, \|P'-P\| ,$$

$$\|F(b_n)-F(c)\| \leqslant m' \, . \, (b_n-c) \, . \, \|P'-P\| ,$$

und daraus, wie (28 c) aus (28 a) und (28 b), folgt

$$\|F(b_n)-F(a_n)\| \leqslant m' \, . \, (b_n-a_n) \, . \, \|P'-P\| ,$$

was der Ungleichung (29) widerspricht.

Damit ist der Satz bewiesen worden.

Die Ungleichung (24) kann man als eine Art *Lipschitzsche Bedingung* betrachten. Der Satz selbst entspricht in mancher Hinsicht der Formel des endlichen Zuwachses einer Funktion.

Mit dem Satze 2′ des § 1 zusammengesetzt liefert der Satz 5 den

Satz 6. *Besitzt $F(P)$ ein Differenzial in der Umgebung von P_0, das für P_0 in bezug auf P stetig ist, so gibt es eine Umgebung von P_0 und eine positive Zahl m, für die die Lipschitzsche Bedingung*

$$\|F(P')-F(P)\| \leqslant m \, . \, \|P'-P\| \tag{31}$$

erfüllt ist.

Oder genauer, nach dem Satze 2′′:

Satz 6′. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 6 gibt es für jede Zahl $m > \overline{m}_{dF}(P_0)$ eine Umgebung von P_0, in der* (31) *gilt.*

Bemerkung. Die Überlegungen dieses Paragraphen lassen sich auf den Fall verallgemeinern, wo F von zwei Elementen P und Q abhängt. Dabei sollen P und $F(P, Q)$ Banachschen Räumen angehören, Q kann ein Element eines beliebigen metrischen Raumes sein. Dabei soll $F(P, Q)$ ein partielles Differenzial $d_P F(P, Q; X)$ besitzen, wenn P und Q in gewissen Umgebungen von P_0 und Q_0 liegen. Dieses Differenzial soll für $P = P_0$ und $Q = Q_0$ inbezug auf P und Q stetig sein.

In dem Satze 5 kann auch F von P und Q abhängen. P soll einer konvexen Menge des P-Raumes angehören. Dabei beeinflußt die Anwesenheit von Q weder den Satz noch den Beweis. Die Lipschitzsche Bedingung hat die Gestalt:

$$\|F(P', Q)-F(P, Q)\| \leqslant m \, . \, \|P'-P\| \, . \tag{31′}$$

In den Sätzen 6 und 6′ ist die Lipschitzsche Bedingung (31′) erfüllt, wenn P einer passenden Umgebung von P_0, und Q einer von Q_0 angehört.

§ 3. Implizite Operationen.

In diesem Paragraphen bedeutet P ein Element eines Banachschen, Q — eines beliebigen metrischen Raumes.

Satz 7. 1° *Ordnet die Operation $F(P, Q)$ jedem P einer Umgebung von P_0 im P-Raume und jedem Q einer Umgebung von Q_0 im Q-Raume ein Element des P-Raumes zu,*

2° *gilt $F(P_0, Q_0) = 0$,*

3° *ist $F(P, Q)$ für gewisse Umgebungen von P_0 und Q_0 stetig inbezug auf P und Q,*

4° *besitzt $F(P, Q)$ für gewisse Umgebungen von P_0 und Q_0 ein partielles Differenzial $d_P F(P, Q; X)$,*

5° *ist $d_P F(P, Q; X)$ für $P = P_0$ und $Q = Q_0$ stetig inbezug auf P und Q,*

so gibt es für jede komplexe Zahl λ mit

$$|\lambda| \cdot \overline{m}_{d_P F}(P_0, Q_0) < 1 \tag{32}$$

Umgebungen von P_0 und Q_0, in denen die Gleichung

$$P - P_0 = \lambda \, . \, F(P, Q) \tag{33}$$

genau eine Lösung $P = \Phi(Q)$ hat. Diese Lösung hat folgende Eigenschaften:

a) *$\Phi(Q_0) = P_0$,*

b) *$\Phi(Q)$ ist stetig.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes gibt es eine Zahl m, für die

$$\overline{m}_{d_P F}(P_0, Q_0) < m < \frac{1}{|\lambda|} \, . \tag{34}$$

Berücksichtigt man den Satz 6 und die Bemerkung, die ihm folgt, so kann man eine Kugel $\mathcal{K}(P_0, a)$ im P-Raume und $\mathcal{K}(Q_0, b)$ im Q-Raume derart bilden, daß für P, P' und Q, die entsprechenderweise diesen Kugeln angehören, die Lipschitzsche Ungleichung

$$\|F(P', Q)-F(P, Q)| \leqslant m \, . \, \|P'-P\| \tag{35}$$

gilt. Dabei kann man eventuell b so vermindern, daß für Q, die in der Kugel $\mathcal{K}(Q_0, b)$ liegen, die Ungleichung

$$\|F(P_0, Q)\| \leqslant \frac{1-|\lambda| \, . \, m}{|\lambda|} \cdot a \tag{36}$$

gilt, was nach (34) und nach den Voraussetzungen 2° und 3° möglich ist.

Jetzt werden wir beweisen, daß die Behauptung unseres Satzes gilt, wenn P und Q entsprechenderweise den Kugeln $\mathcal{K}(P_0, a)$ und $\mathcal{K}(Q_0, b)$ angehören.

Dazu bilden wir eine Folge der Operationen $\Phi_n(Q)$, die folgendermaßen entsteht:

1° für jedes Q der Kugel $\mathcal{K}(Q_0, b)$ sei

$$\Phi_0(Q) = P_0, \tag{37}$$

2° für jedes Q derselben Kugel

$$\Phi_{n+1}(Q) = P_0 + \lambda \, . \, F[\Phi_n(Q), Q]. \tag{38}$$

Daß diese Konstruktion immer möglich ist, überzeugt man sich, wie folgt. Erstens, liegt $\Phi_0(Q)$ in der Kugel $\mathcal{K}(P_0, a)$. Dann, liegt $\Phi_n(Q)$ in derselben Kugel,

$$\| \Phi_n(Q) - P_0 \| \leqslant a, \tag{39}$$

so folgt aus (38)

$$\| \Phi_{n+1}(Q) - P_0 \| \leqslant |\lambda| \, . \, \| F[\Phi_n(Q), Q] - F[P_0, Q] \| + |\lambda| \, . \, \| F(P_0, Q) \|.$$

Hieraus schließt man nach (35) und (36)

$$\| \Phi_{n+1}(Q) - P_0 \| \leqslant |\lambda| \, . \, m \, . \, \| \Phi_n(Q) - P_0 \| + (1 - |\lambda| \, . \, m) \, . \, a,$$

und nach (39)

$$\| \Phi_{n+1}(Q) - P_0 \| \leqslant a.$$

Damit ist gezeigt, daß mit $\Phi_n(Q)$ auch $\Phi_{n+1}(Q)$ in der Kugel $\mathcal{K}(P_0, a)$ liegt. Also gilt (39) für jedes n und die Konstruktion ist immer möglich.

Nach (37) und (38) ist für $n = 1$

$$\Phi_1(Q) - \Phi_0(Q) = \lambda \, . \, F(P_0, Q),$$

nach (36)

$$\| \Phi_1(Q) - \Phi_0(Q) \| \leqslant (1 - |\lambda| \, . \, m) \, . \, a,$$

und nach (38) und (35)

$$\| \Phi_{n+1}(Q) - \Phi_n(Q) \| \leqslant |\lambda| \, . \, m \, . \, \| \Phi_n(Q) - \Phi_{n-1}(Q) \|.$$

Daraus folgt durch Induktion

$$\| \Phi_{n+1}(Q) - \Phi_n(Q) \| \leqslant (1 - |\lambda| \, . \, m) \, . \, a \, . \, |\lambda|^n \, . \, m^n \tag{40}$$

für jedes Q der Kugel $\mathcal{K}(Q_0, b)$.

Nach (40), unter Berücksichtigung von (34), ist die Reihe

$$\Phi_0(Q) + [\Phi_1(Q) - \Phi_0(Q)] + \ldots + [\Phi_{n+1}(Q) - \Phi_n(Q)] + \ldots \tag{41}$$

konvergent[6]). Bezeichnen wir mit $\Phi(Q)$ ihre Summe, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(Q) = \Phi(Q). \tag{42}$$

Aus (38) folgt jetzt, unter Berücksichtigung der Voraussetzung 3°, für jedes Q der Kugel $\mathcal{K}(Q_0, b)$

$$\Phi(Q) = P_0 + \lambda \, . \, F[\Phi(Q), Q].$$

Dabei gehört $\Phi(Q)$ nach (39) und (42) der Kugel $\mathcal{K}(P_0, a)$ an. Also liefert $\Phi(Q)$ eine geforderte Lösung von (33).

Daß $\Phi(Q)$ die einzige Lösung von (33) ist, die in der Kugel $\mathcal{K}(P_0, a)$ liegt, falls Q der Kugel $\mathcal{K}(Q_0, b)$ angehört, schließt man, wie folgt. Gäbe es für ein Q zwei Lösungen $\Phi(Q)$ und $\Phi'(Q)$, so wäre nach (39)

$$\Phi'(Q) - \Phi(Q) = \lambda \, . \, \{ F[\Phi'(Q), Q] - F[\Phi(Q), Q] \},$$

und nach (35)

$$\| \Phi'(Q) - \Phi(Q) \| \leqslant |\lambda| \, . \, m \, . \, \| \Phi'(Q) - \Phi(Q) \|,$$

was nach (34) nur dann möglich ist, wenn

$$\| \Phi'(Q) - \Phi(Q) \| = 0,$$

und beide Lösungen zusammenfallen.

Wir wollen noch die Eigenschaften a) und b) von $\Phi(Q)$ beweisen. Die Eigenschaft a) folgt aus der Voraussetzung 2° unter Berücksichtigung der Einzigkeit der Lösung. Was die Eigenschaft b) betrifft, so ist die Reihe (41) „gleichmäßig" konvergent. Wie im Falle der gewöhnlichen Funktionen, kann man beweisen, daß aus der Stetigkeit der Glieder für gleichmäßig konvergente Reihen die Stetigkeit der Summe folgt.

Der Satz 7 kann auch folgendermaßen erweitert werden:

Satz 7'. *Erfüllen zwei Operationen $F(P, Q)$ und $G(P, Q)$ alle Bedingungen 1° — 5°, die im Satze 7 über $F(P, Q)$ vorausgesetzt wurden,*

so gibt es für jedes Paar komplexer Zahlen λ und μ mit

$$|\lambda| \, . \, \overline{m}_{d_P F}(P_0, Q_0) + |\mu| \, . \, \overline{m}_{d_P G}(P_0, Q_0) < 1, \tag{43}$$

---

[6]) Vgl. Banach, loc. cit., p. 138—139, Théorème 8.

Umgebungen von P_0 und Q_0, in denen die Gleichung

(44) $$P-P_0=\lambda\,.\,F(P,Q)+\mu\,.\,G(P,Q)$$

genau eine Lösung $P=\Phi(Q)$ hat. Diese besitzt die Eigenschaften a) *und* b) *des Satzes* 7.

Die Beweisführung unterscheidet sich im wesentlichen von der des Satzes 7 nicht. Nur soll man anstatt der Zahl m zwei Zahlen m und m_1 einführen, für die

$$\overline{m}_{d_P F}(P_0,Q_0)<m\,,$$

$$\overline{m}_{d_P G}(P_0,Q_0)<m_1\,,$$

$$|\lambda|\,.\,m+|\mu|\,.\,m_1<1\,.$$

Anstatt (36) sollen folgende Ungleichungen erfüllt werden:

$$\|F(P_0,Q)\|\leqslant\frac{1-|\lambda|\,.\,m-|\mu|\,.\,m_1}{|\lambda|}\,a\,,$$

$$\|G(P_0,Q)\|\leqslant\frac{1-|\lambda|\,.\,m-|\mu|\,.\,m_1}{|\mu|}\,a\,.$$

Als sukzessive Approximationen bildet man

$$\Phi_0(Q)=P_0\,,$$

$$\Phi_{n+1}(Q)=P_0+\lambda\,.\,F[\Phi_n(Q),Q]+\mu\,.\,G[\Phi_n(Q),Q]\,.$$

Einen Sonderfall des Satzes 7′ erhalten wir, wenn

$$\overline{m}_{d_P G}(P_0,Q_0)=0\,.$$

Dann hat die Gleichung (44) eine Lösung für jedes μ, z. B. für $\mu=1$. Dieser Fall findet statt, wenn insbesondere die Operation G von P gar nicht abhängt. Führen wir die Bezeichnung $G(Q)$ anstatt $P_0+G(Q)$ ein, so erhalten wir das

Korollar. *Erfüllt $F(P,Q)$ die Voraussetzungen* 1°—5° *des Satzes* 7 *und*

6° *ordnet $G(Q)$ jedem Q einer Umgebung von Q_0 im Q-Raume ein Element des P-Raumes zu,*

7° *gilt $G(Q_0)=P_0$,*

8° *ist $G(Q)$ für eine gewisse Umgebung von Q_0 stetig, so gibt es für jede komplexe Zahl λ mit*

(45) $$|\lambda|\,.\,\overline{m}_{d_P F}(P_0,Q_0)<1\,,$$

Umgebungen von P_0 und Q_0, in denen die Gleichung

(46) $$P=\lambda\,.\,F(P,Q)+G(Q)$$

genau eine Lösung $P=\Phi(Q)$ hat. Diese besitzt die Eigenschaften a) *und* b) *des Satzes* 7.

Ist insbesondere $F(P,Q)$ linear inbezug auf P, so umfaßt (46) inhomogene lineare Integralgleichungen, die von einem (im allgemeinen abstrakten) Parameter Q stetig abhängen. Unser Korollar lehrt, daß man für solche Gleichungen in einer Umgebung von Q_0 eine gleichmäßige Beschränkung der λ-Werte erreichen kann, für die die Gleichung eine Lösung hat[7]). Außerdem hängt die Lösung von Q stetig ab. Selbstverständlich folgt der lineare Fall unmittelbar aus dem Satze 2′ ohne die Überlegungen des § 2 in Betracht zu nehmen.

Zum Schluß beweisen wir einen einleuchtenden Satz, den man nur als eine andere Fassung des Satzes der gewöhnlichen Analysis über implizite Funktionen betrachten kann.

Satz 8. 1° *Ist jede beschränkte Folge des P-Raumes kompakt,*

2° *ordnet $G(P,Q)$ jedem P einer Umgebung von P_0 im P-Raume und jedem Q einer Umgebung von Q_0 im Q-Raume ein Element des P-Raumes zu,*

3° *gilt $G(P_0,Q_0)=0$,*

4° *ist $G(P,Q)$ für gewisse Umgebungen von P_0 und Q_0 stetig inbezug auf P und Q,*

5° *besitzt $G(P,Q)$ für gewisse Umgebungen von P_0 und Q_0 ein partielles Differenzial $d_P G(P,Q;X)$,*

6° *ist $d_P G(P,Q;X)$ für $P=P_0$ und $Q=Q_0$ stetig inbezug auf P und Q,*

7° *ist die lineare Operation $d_P G(P_0,Q_0;X)$ eindeutig umkehrbar,*

so besitzt die Gleichung

(47) $$G(P,Q)=0$$

[7]) Vgl. Banach, loc. cit., p. 161, Théorème 7.

in gewissen Umgebungen von P_0 und Q_0 genau eine Lösung $P=\Phi(Q)$. Diese hat die Eigenschaften:

a) $\Phi(Q_0)=P_0$,

b) $\Phi(Q)$ *ist stetig.*

Beweis. Bezeichnen wir mit $\Psi(Y)$ die zu $d_P G(P_0, Q_0; X)$ inverse, nach der Voraussetzung 7° existierende Operation. Dann sind die Gleichungen

$$Y=d_P G(P_0, Q_0; X), \tag{48}$$

$$X=\Psi(Y) \tag{49}$$

äquivalent. Dann ist auch $\Psi(Y)$ linear [8]).

Setzen wir an

$$F(P, Q)=\Psi[d_P G(P_0;\, P-P_0)-G(P, Q)]. \tag{50}$$

Wir wollen beweisen, daß $F(P, Q)$ alle Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt.

Die Voraussetzung 1° des Satzes 7 folgt aus der jetzigen Voraussetzung 2°. Die Voraussetzung 2° folgt aus der Voraussetzung 3° über $G(P, Q)$ und aus der Linearität von $d_P G$ und Ψ. Was 3° betrifft, so ist nach jetzigem 4° $F(P, Q)$ aus zwei stetigen Operationen zusammengesetzt, also stetig. Nach unserer Voraussetzung 5° ist $F(P, Q)$ aus zwei diffenzierbaren Operationen zusammengesetzt, also differenzierbar [9]), womit die Voraussetzung 4° des Satzes 7 bewiesen wird. Man hat dabei [9])

$$d_P F(P, Q; X)=\Psi[d_P G(P_0, Q_0; X)]-\Psi[d_P G(P, Q; X)], \tag{51}$$

woraus nach jetzigem 6° auch die letzte Voraussetzung 5° des Satzes 7 folgt.

Aus (51) folgt, daß

$$d_P F(P_0, Q_0; X)=0,$$

und daraus

$$m_{d_P F}(P_0, Q_0)=0. \tag{52}$$

Wendet man nach Voraussetzung 1° den Satz 4 auf die Operation $d_P F$, so folgt aus (17) und (52)

$$\overline{m}_{d_P F}(P_0, Q_0)=0.$$

[8]) Vgl. Banach. Studia mathematica 1 (1929) p. 238, Théorème 7.

[9]) Vgl. Fréchet, loc. cit., p. 310—311. Dabei ist für eine lineare Operation $\Psi(X)$

$$d_P \Psi(P; X)=\Psi(X).$$

Also gilt die Behauptung des Satzes 7 für jedes λ und insbesondere für $\lambda=1$. Die Gleichung (33), jetzt nach (50)

$$P-P_0=\Psi[d_P G(P_0, Q_0; P-P_0)-G(P, Q)], \tag{53}$$

hat eine Lösung, die die Eigenschaften a) und b) besitzt. Nach der Beziehung zwischen (48) und (49) kann man die Gleichung (53) inbezug auf den in den eckigen Klammern enthaltenen Ausdruck auflösen. In dieser Weise erhält man endlich die Gleichung (47).

Damit haben wir bewiesen, daß es in der Umgebung von P_0 und Q_0 eine Lösung von (47) gibt, die die Eigenschaften a) und b) besitzt.

(Reçu par la Rédaction le 14. 4. 1931).