# Sur l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\,dt$

par

S. MAZURKIEWICZ (Warszawa).

MM. Hardy et Littlewood ont démontré l'existence d'une fonction $f(x)$, continue, périodique et telle que l'intégrale

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\,dt \tag{I}$$

diverge pour *presque* tous les $x$ [1]).

Je vais démontrer que *l'on peut supprimer* dans cet énoncé le mot „*presque*". Plus précisément: *soit $\Phi$ l'espace de fonctions continues de période 1, la norme étant définie par l'égalité $\|f\| = Max\,|f(t)|$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. L'ensemble $N$ de tous les $f \in \Phi$, telles que l'intégrale* (I) *diverge pour toute valeur de $x$, est de deuxième catégorie dans $\Phi$, son complémentaire $\Phi - N$ étant de première catégorie.*

La méthode est celle de Banach-Saks-Steinhaus, un peu modifiée [2]).

Soit $k$ un nombre naturel $> 97$. On a

$$x = \frac{3l_x + \alpha_x}{3k^2} + \frac{\beta_x}{96k^2} + \frac{\gamma_x + \delta_x}{96k^4}; \tag{1}$$

$l_x$ — entier; $\alpha_x = 0,1,2$; $\beta_x = 0,1\ldots 31$; $\gamma_x = 0,1\ldots k^2-1$.

---

[1]) Hardy-Littlewood, Proc. London Math. Soc. 24 (1926) p. 211—246, en part. p. 234—237.

[2]) Banach, Bull. Sc. Math. (2) 50 (1926) p. 27—32. Saks, Fund. Math. 10 (1927) p. 186—196. Steinhaus, Studia Math. 1 (1929) p. 51—81. Mazurkiewicz, Studia Math. 3 (1931) p. 92—94.



Définissons la fonction continue $f_k(x)$ de période $\frac{1}{k^2}$ par la tabelle

| $\alpha_x$ | $\beta_x$ | $\gamma_x$ | $f_k(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0,1 | | | 0 |
| 2 | $1,2\ldots 30$ | | 1 |
| „ | 0, 31 | $1,2\ldots k^2-2$ | 3 |
| „ | 0 | 0 | $3\delta_x$ |
| „ | „ | $k^2-1$ | $3-2\delta_x$ |
| „ | 31 | 0 | $1+2\delta_x$ |
| „ | „ | $k^2-1$ | $3-3\delta_x$ |

Désignons par $I_m$ l'intervalle $\frac{m}{k^2} \leqslant t \leqslant \frac{m+1}{k^2}$. $x$ étant fixé, désignons respectivement par $H_m^{(1)}$, $H_m^{(2)}$, $H_m^{(3)}$, $H_m^{(4)}$ les ensembles de points $t$ tels que l'on a respectivement:

$$t \in I_m, \quad f_k(x+t) > 1, \tag{2}$$

$$t \in I_m, \quad f_k(x+t) > 1, \tag{3}$$

$$t \in I_m, \quad f_k(x+t) > 1, \tag{4}$$

$$t \in I_m, \quad f_k(x+t) = f_k(x-t) = 0. \tag{5}$$

D'après la définition de $f_k(x)$, on a (en désignant par $|A|$ la mesure de l'ensemble linéaire $A$):

$$|H_m^{(1)}| = \frac{1}{3k^2} - \frac{1}{48k^4} > \frac{1}{4k^2}, \tag{6}$$

$$|H_m^{(2)}| = |H_m^{(3)}| \leqslant \frac{1}{48k^2}, \tag{7}$$

$$|H_m^{(4)}| \geqslant \frac{1}{3k^2}. \tag{8}$$

Soit d'abord $f_k(x) = 0$; l'expression $f_k(x+t) + f_k(x-t) - 2f_k(x)$ est alors $\geqslant 0$ pour tout $t$ et $\geqslant 1$ pour $t \in H_m^{(1)}$. Donc, pour $m = 1, 2\ldots$,

$$\int\limits_{\frac{m}{k^2}}^{\frac{m+1}{k^2}} \frac{f_k(x+t)+f_k(x-t)-2f_k(x)}{t}\,dt \geqslant \int\limits_{H_m^{(1)}} dt > \frac{k^2}{m+1}\cdot\frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4(m+1)}, \tag{9}$$

$$(10) \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{k}} \frac{f_k(x+t)+f_k(x-t)-2f_k(x)}{t}\, dt \geqslant \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m+1} > \frac{1}{4}\log\frac{k+1}{2}.$$

Soit $f_k(x) \geqslant 1$; l'expression $f_k(x+t)+f_k(x-t)-2f_k(x)$ est $\leqslant -2$ pour $t \in H_m^{(4)}$, $\leqslant 0$ pour $t \in I_m - (H_m^{(2)}+H_m^{(3)})$, enfin $\leqslant 4$ pour $t \in H_m^{(2)}+H_m^{(3)}$. Donc

$$(11) \int_{\frac{m}{k^2}}^{\frac{m+1}{k^2}} \frac{f_k(x+t)+f_k(x-t)-2f_k(x)}{t}\, dt \leqslant -2\int_{H_m^{(4)}}\frac{dt}{t} + 4\int_{H_m^{(2)}}\frac{dt}{t} + 4\int_{H_m^{(3)}}\frac{dt}{t}$$

$$\leqslant -\frac{2k^2}{m+1}\cdot\frac{1}{3k^2} + \frac{8k^2}{m}\cdot\frac{1}{48k^2} = \left(-\frac{2}{3}+\frac{m+1}{6m}\right)\cdot\frac{1}{m+1} < -\frac{1}{3(m+1)},$$

$$(12) \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{k}} \frac{f_k(x+t)+f_k(x-t)-2f_k(x)}{t}\, dt < -\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m+1} < -\frac{1}{3}\log\frac{k+1}{2}.$$

Soit enfin $0 < f_k(x) < 1$. Deux cas sont possibles: *a)* $\beta_x = \gamma_x = 0$ et *b)* $\beta_x = \gamma_x = k^2-1$.

A cause de la symmétrie, il suffit de considérer le premier cas. On a, pour $\frac{1}{k^4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{k^3}$,

$$(13) \frac{3l_x+2}{3k^2}+\frac{96}{96k^4} < x+t < \frac{3l_x+2}{3k^2}+\frac{96k+1}{96k^4} < \frac{3l_x+2}{3k^2}+\frac{k^2-1}{96k^4},$$

$$(14) \qquad f_k(x+t) = 3,$$

$$(15) \qquad f_k(x+t)+f_k(x-t)-2f(x) \geqslant 3-2 = 1,$$

$$(16) \int_{\frac{1}{k^4}}^{\frac{1}{k^3}} \frac{f_k(x+t)+f_k(x-t)-2f(x)}{t}\, dt \geqslant \int_{\frac{1}{k^4}}^{\frac{1}{k^3}}\frac{dt}{t} = \log k.$$

Donc, quel que soit $x$, on a l'une au moins des inégalités (10), (12), (16). Définissons les ensembles $U_k^{(i)}$, $V_k^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ de la manière suivante: $U_k^{(1)}$ est l'ensemble de tous les $f \in \Phi$ telles que l'on a, pour tout $x$, l'une au moins des inégalités



$$(17) \left|\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{k}} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\, dt\right| \geqslant 1$$

$$(18) \left|\int_{\frac{1}{k^4}}^{\frac{1}{k^3}} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\, dt\right| \geqslant 1.$$

$U_k^{(2)}$ est l'ensemble de tous les $f \in \Phi$ telles que l'on a, pour tout $x$, l'une au moins des inégalités

$$(19) \left|\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{k}} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| \geqslant 2$$

$$(20) \left|\int_{\frac{1}{k^4}}^{\frac{1}{k^3}} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| \geqslant 2.$$

$U_k^{(3)}$ est l'ensemble de tous les $f \in \Phi$, telles qu'il existe un $f^* \in U_k^{(2)}$ satisfaisant à l'inégalité

$$(21) \qquad \|f-f^*\| < \frac{1}{4k}.$$

Enfin

$$(22) \qquad V_n^{(i)} = \sum_{k=n}^{\infty} U_k^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots).$$

Soit $f \in \Phi$, $\eta$ un nombre positif. Il existe un polynôme trigonométrique $q(x)$ (en $\sin 2\pi x$, $\cos 2\pi x$) tel que $\|f-q\| < \frac{\eta}{2}$.

Soit $c = \mathrm{Max.}\,|q'(x)|$ et considérons la fonction

$$(23) \qquad r_k(x) = q(x) + \frac{\eta}{6} f_k(x) \qquad (k \geqslant 97);$$

on a $\|f - r_k\| < \eta$, et on vérifie immédiatement, en partant de (10), (12) et (16) que $r_k \in U_k^{(2)}$ pour

$$(24) \qquad k \geqslant 2e^{\frac{1}{\eta}\left(\frac{c}{2}+48\right)};$$

il en résulte que $V_n^{(2)}$ est dense dans $\Phi$. Donc $V_n^{(3)}$ est un ensemble ouvert dans $\Phi$ et dense dans $\Phi$ et l'ensemble

$$(25) \qquad \Phi - \prod_{n=1}^{\infty} V_n^{(3)}$$

est de première catégorie. D'autre part, si l'on a (21) et si $f^*$ satisfait à (19) resp. (20), alors $f$ satisfait à (17) resp. (18). Donc $U_k^{(3)} \subset U_k^{(1)}$, $V_n^{(3)} \subset V_n^{(1)}$. Enfin, si $f \in \prod_{n=1}^{\infty} V_n^{(1)}$, alors on a pour tout $x$ et pour une infinité d'entiers $k$ l'une au moins des inégalités (17), (18), — l'intégrale (I) ne saurait donc être convergente pour aucun $x$. Il en résulte

$$(26) \qquad \Phi - N \subset \Phi - \prod_{n=1}^{\infty} V_n^{(1)} \subset \Phi - \prod_{n=1}^{\infty} V_n^{(3)},$$

c. à d. $\Phi - N$ est de première catégorie, c. q. f. d.

*(Reçu par la Rédaction le 31. 3. 1931).*

---

# Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes

par

M. PAUL LÉVY (Paris).

## Introduction.

### § 1. Notations et remarques préliminaires.

Nous désignerons par $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ des variables dépendant de lois de probabilité indépendantes les unes des autres; par $S_n$ la somme $x_1 + x_2 + \dots + x_n$; par $\mathcal{E}\{x\}$ la valeur probable de $x$, et par $\mathcal{D}\{x\}$ celle de $[x - \mathcal{E}\{x\}]^2$; par $\mathcal{P}\{E\}$ la probabilité d'un évènement $E$; par $\mathcal{P}\{E, E'\}$ celle de la réalisation de $E$ et $E'$; par $\mathcal{R}\{E_n\}$ la probabilité que $E_n$ soit réalisé pour une infinité de valeurs de l'entier $n$.

Rappelons que, si les probabilités $\mathcal{P}\{E_n\}$ sont indépendantes, $\mathcal{R}\{E_n\}$ est égal à 0 ou 1 suivant que la somme $\Sigma \mathcal{P}\{E_n\}$ est finie ou infinie, toute autre valeur étant exclue. Ce résultat est dû à M. Emile Borel.

La loi de probabilité dont dépend une variable $x$ étant définie par la *fonction des probabilités totales*

$$(1) \qquad F(\xi) = \mathcal{P}\{x < \xi\},$$

il y a lieu, aux points de discontinuité de cette fonction, de distinguer les deux expressions

$$(2) \qquad \begin{cases} \lim F(\xi - \varepsilon) = \mathcal{P}\{x < \xi\}, \\ \lim F(\xi + \varepsilon) = \mathcal{P}\{x \leqslant \xi\} \end{cases}$$

($\varepsilon$ désignant un infiniment petit positif). Toutefois, pour simplifier les formules, il nous arrivera d'employer la notation (1) pour désigner indifféremment l'une ou l'autre des expressions (2) ou n'importe quelle valeur intermédiaire. Il en résultera que certaines