

où  $\lambda_n \rightarrow 0$ ,  $\lambda_n > 0$ , est une série de FOURIER. Nous démontrerons qu'il existe une série du type (1) pour laquelle

$$(2) \quad \overline{\lim} \int_0^{2\pi} |s_n(x)| dx = +\infty.$$

Dans le cas contraire, on aurait

$$\int_0^{2\pi} |s_n(x)| dx < K_\lambda,$$

donc, suivant le théorème 1,

$$\int_0^{2\pi} |\sum \cos nx| dx < K,$$

contrairement au fait bien connu, que

$$\int_0^{2\pi} |\sum \cos nx| dx = O(\lg n).$$

Il existe alors une série (1) possédant la propriété (2), bien qu'elle converge vers une fonction nonnégative pour tout  $x$  sauf  $x=0, 2\pi$ .

(Reçu par la Rédaction le 10. 3. 1931).

## Über metrische Gruppen

von

S. BANACH (Lwów).

Die vorliegende Arbeit hat zum Gegenstand einige Sätze betreffend Räume vom Typus ( $G$ ); Räume dieser Art bilden einen Sonderfall der stetigen Gruppen. Wir nennen nämlich eine gegebene Gruppe  $X$  einen *Raum vom Typus ( $G$ )*, wenn sie ein metrischer vollständiger Raum ist und dabei die folgenden Bedingungen erfüllt ( $a_n, b_n \in X$  ( $n=1, 2, \dots$ ) und  $a, b \in X$ ):

- 1) Aus  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  folgt  $a_n b_n \rightarrow ab$ ;
- 2) aus  $a_n \rightarrow a$  folgt  $a_n^{-1} \rightarrow a^{-1}$ .

Es ist klar, daß der so erklärten Klasse von Räumen im Besonderen die Räume vom Typus ( $B$ ) angehören, wenn man sie als Gruppen in Bezug auf die Addition betrachtet; diese Klasse enthält auch die unten erwähnten Räume vom Typus ( $F$ ), wenn wir wieder in ihnen die Addition als Gruppenverknüpfung erklären.

Wir beweisen zuerst, daß jede Untergruppe eines Raumes vom Typus ( $G$ ), welche in Bezug auf ihn die BAIREsche Bedingung erfüllt, entweder eine Menge von erster Kategorie oder eine zugleich offene und abgeschlossene Menge ist. Aus der Bemerkung, daß in jedem metrischen Raum eine BORELSche Menge in Bezug auf ihn (und sogar in Bezug auf jede in ihm enthaltene Menge) die BAIREsche Bedingung erfüllt, bekommen wir als eine spezielle Folgerung eine Verallgemeinerung der so genannten Resonanztheoreme, welche bisher nur im Falle der Räume vom Typus ( $B$ ) bekannt waren, auf den Fall von allgemeinen zusammenhängenden Räumen vom Typus ( $G$ ). Wir beweisen weiter, daß eine multiplikative in einem Raume vom Typus ( $G$ ) erklärte und in Bezug auf ihn der BAIRE-

<sup>1</sup> Vgl. F. Leja, Sur la notion du groupe abstrait topologique, Fund. Math. 9 (1927) p. 37—44.

schen Bedingung genügende Operation — daher auch jede multiplikative BAIREsche Operation — stetig ist; im Besonderen ist also eine Operation, die die Grenze einer Folge von stetigen multiplikativen Operationen darstellt, stetig. Endlich befassen wir uns mit dem Problem der Umkehrbarkeit der multiplikativen Operationen und beweisen in dieser Richtung den folgenden Satz: Wenn  $X, Y$  separable Räume vom Typus  $(G)$  sind und die stetige und multiplikative Operation  $y = F(x)$  den Raum  $X$  auf den ganzen Raum  $Y$  eindeutig abbildet, dann ist auch die zu  $y = F(x)$  inverse Operation  $x = F^{-1}(y)$  stetig. In nichtseparablen Räumen vom Typus  $(G)$  gilt ein entsprechender Satz im Allgemeinen nicht. Er behält seine Gültigkeit, wenn gewisse zusätzliche Bedingungen erfüllt sind. Es ist z. B. bekannt, daß er im Fall der Räume vom Typus  $(B)$  stattfindet; an einem anderen Ort werden wir den Beweis dieses Satzes für die allgemeineren Räume vom Typus  $(F)$  erbringen.

### § 1.

Es bezeichne  $X$  einen Raum vom Typus  $(G)$ . Wenn  $a$  ein Punkt dieses Raumes ist, so definiert die Operation  $V(x) = ax$  (wie auch die Operation  $H(x) = xa$ ) eine homöomorphe Abbildung des Raumes  $X$  auf sich selbst. Daher ist bei dieser Abbildung das Bild einer jeden abgeschlossenen (offenen) Menge wieder eine abgeschlossene (offene) Menge; daraus folgt ohne weiteres, daß bei einer solchen Abbildung eine nirgendsdichte Menge (eine Menge von erster Kategorie) in eine nirgendsdichte Menge (eine Menge von erster Kategorie) übergeht. Wir beweisen jetzt den folgenden

*Hilfssatz 1. Wenn eine Untergruppe  $X_0$  des Raumes  $X$  innere Punkte enthält, so ist sie eine offene und zugleich abgeschlossene Menge<sup>2)</sup>.*

*Beweis.* Auf Grund der Voraussetzung gibt es eine offene Kugel  $K_0 \subset X_0$ ; wir bezeichnen mit  $x_0$  ihren Mittelpunkt und es sei  $x_1 \in X_0$ . Bei der Abbildung  $V_1(x) = x_1 x_0^{-1} x$  ist der Punkt  $x_1$  das Bild des Punktes  $x_0$  und die Kugel  $K_0$  geht in eine offene Menge über. Weil außerdem bei dieser Abbildung die Untergruppe  $X_0$

<sup>2)</sup> Wenn eine Teilmenge eines metrischen Raumes zugleich offen und abgeschlossen ist, so ist sie ersichtlich die Summe gewisser Komponenten dieses Raumes.

in sich selbst transformiert wird, so ist klar, daß  $x_1$  ein innerer Punkt dieser Untergruppe ist; da  $x_1$  ein beliebiger Punkt der Untergruppe  $X_0$  bezeichnet, so bildet sie tatsächlich eine offene Menge. Man beweist ganz analog, daß die Menge  $X - X_0$  offen ist. Wenn nämlich der Punkt  $x_2$  der Menge  $X - X_0$  angehört, so geht bei der Abbildung  $V_2(x) = x_2 x_0^{-1} x$  der Punkt  $x_0$  in den Punkt  $x_2$  und die Kugel  $K_0$  in eine offene Teilmenge von  $X - X_0$  über.

*Bemerkung 1.* Wenn die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt sind und der Raum  $X$  zusammenhängend ist, so ist  $X_0 = X$ .

*Hilfssatz 2. Wenn  $X_0$  eine Untergruppe von zweiter Kategorie des Raumes  $X$  ist, so ist sie von zweiter Kategorie in jedem Punkt ihrer abgeschlossenen Hülle.*

*Beweis.* Wenn eine Teilmenge eines metrischen Raumes in jedem ihrer Punkte von erster Kategorie ist, so ist sie eine Menge von erster Kategorie<sup>3)</sup>. Wegen der Voraussetzung gibt es also einen Punkt  $x_0 \in X_0$ , in welchem die Untergruppe  $X_0$  von zweiter Kategorie ist. Es sei  $x_1 \in X_0$  und es bezeichne  $K_1$  eine beliebige offene Kugel mit dem Mittelpunkte  $x_1$ . Bei der Abbildung  $V(x) = x_0 x_1^{-1} x$  geht der Punkt  $x_1$  in  $x_0$  und die Kugel  $K_1$  in eine offene Menge  $G_1$  über; daher ist die Menge  $G_1 X_0$  von zweiter Kategorie. Da weiter bei der betrachteten Abbildung die Untergruppe  $X_0$  in sich selbst transformiert wird, so ist ersichtlich die Menge  $K_1 X_0$  auch von zweiter Kategorie. Die Untergruppe  $X_0$  ist also in jedem ihrer Punkte von zweiter Kategorie, und infolgedessen auch in jedem Punkte ihrer abgeschlossenen Hülle.

*Bemerkung 2.* Wenn die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt sind und der Raum  $X$  zusammenhängend ist, so ist  $\bar{X}_0 = X$ . Es genügt zu bemerken, daß  $\bar{X}_0$  eine Untergruppe des Raumes  $X$  ist, die innere Punkte enthält und die Bemerkung 1 zu berücksichtigen.

*Hilfssatz 3. Wenn  $X_0$  eine echte Untergruppe des Raumes  $X$  ist, so ist die Menge  $X - X_0$  in jedem Punkte ihrer abgeschlossenen Hülle von zweiter Kategorie.*

*Beweis.* Ist die Untergruppe  $X_0$  von erster Kategorie, so ist der Satz trivial; wir können also voraussetzen, daß diese Unter-

<sup>3)</sup> S. Banach, Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fund. Math. 16 (1930) p. 395–398.

gruppe von zweiter Kategorie ist. Daraus folgt, daß  $X_0$  in einem seiner Punkte  $x_0$  von zweiter Kategorie ist; um den Hilfssatz zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, daß die Menge  $X - X_0$  in jedem ihrer Punkte von zweiter Kategorie ist. Es sei  $x_1 \in X - X_0$  und  $K_1$  eine offene Kugel mit  $x_1$  als Mittelpunkt. Bei der Abbildung  $V(x) = x_0 x_1^{-1} x$  geht der Punkt  $x_1$  in den Punkt  $x_0$  und die Kugel  $K_1$  in eine offene Menge  $G_1$  über. Infolgedessen ist die Menge  $G_1 X_0$  von zweiter Kategorie und da bei der betrachteten Abbildung die Untergruppe  $X_0$  in einen Teil der Menge  $X - X_0$  transformiert wird, ist die Menge  $K_1(X - X_0)$  von zweiter Kategorie. Daraus folgt unmittelbar, daß die Menge  $X - X_0$  im Punkt  $x_1$  von zweiter Kategorie ist.

Bemerkung 3. Bei den Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 ist  $\overline{X - X_0} = X$ , wenn der Raum  $X$  zusammenhängend ist. Im entgegengesetzten Fall würde die Menge  $X_0$  innere Punkte enthalten und kraft der Bemerkung 1 wäre  $X_0 = X$ , entgegen der Voraussetzung.

Satz 1. Wenn  $X_0$  eine Untergruppe des Raumes  $X$  ist, die in Bezug auf ihn der Baireschen Bedingung genügt, so ist sie entweder von erster Kategorie oder zugleich offen und abgeschlossen.

Beweis. Setzen wir voraus, daß  $X_0$  eine Menge von zweiter Kategorie ist; es enthält daher die Untergruppe  $\overline{X_0}$  innere Punkte und auf Grund des Hilfssatzes 1 ist sie eine offene Menge. Wenn  $x_0$  einen Punkt der Untergruppe  $X_0$  bezeichnet, in welchem sie von zweiter Kategorie ist, so ist sie es auch in Bezug auf  $\overline{X_0}$ . Da aber  $\overline{X_0}$  einen Raum vom Typus (G) bildet, so folgern wir aus dem Hilfssatz 2, daß  $X_0$  in jedem Punkt der Untergruppe  $\overline{X_0}$  von zweiter Kategorie in Bezug auf sie und also auch in Bezug auf den Raum  $X$  ist. Nehmen wir an, daß  $X_0 \neq \overline{X_0}$  ist; aus dem Hilfssatz 3 folgt, daß dann die Menge  $\overline{X_0} - X_0$  in jedem Punkt der Menge  $\overline{X_0} - X_0$  von zweiter Kategorie zu  $\overline{X_0}$  und daher auch zu  $X$  ist. Auf diese Weise haben wir gezeigt, daß die Untergruppe  $X_0$  in jedem Punkt der offenen Menge  $\overline{X_0}$  von zweiter Kategorie zugleich mit ihrer Komplementärmenge ist; das steht aber im Widerspruch damit, daß die Untergruppe  $X_0$  in Bezug auf den Raum  $X$  der Baireschen Bedingung genügt. Es muß also  $X_0 = \overline{X_0}$  sein, was zusammen mit dem Vorigen zeigt, daß  $X_0$  eine zugleich offene und abgeschlossene Menge ist.

Bemerkung 4. Wenn der Raum  $X$  zusammenhängend ist

und die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind, so ist die Untergruppe  $X_0$  entweder von erster Kategorie oder mit dem Raum  $X$  identisch. Dies folgt unmittelbar aus der Bemerkung 1.

Bemerkung 5. Eine SUSLINSche Teilmenge eines metrischen Raumes genügt in Bezug auf ihn (und sogar in Bezug auf jede in ihm enthaltene Menge) der BAIREschen Bedingung<sup>4)</sup>.

Es seien  $X, Y$  beliebige Räume vom Typus (G) und  $y = F(x)$  eine Operation (Funktion), welche im Raume  $X$  erklärt ist und deren Werte Elemente des Raumes  $Y$  sind. Wir sagen, daß die Operation  $y = F(x)$  *multiplikativ* ist, wenn für beliebige Elemente  $x_1, x_2$  aus  $X$  die Relation  $F(x_1 x_2) = F(x_1) F(x_2)$  gilt; eine multiplikative und stetige Operation nennen wir *potenzartig\**). Ein *Funktional* ist eine Operation mit reellen Werten.

Setzen wir voraus, daß im Raume  $X$  eine Folge potenzartiger Operationen  $\{F_n(x)\}$  erklärt ist, deren jede den Raum  $X$  auf einen Teil des Raumes  $Y$  abbildet. Es bezeichne  $X_0$  die Konvergenzmenge der Folge  $\{F_n(x)\}$ , d. h. die Menge aller Punkte des Raumes  $X$ , in denen diese Folge von Operationen konvergent ist. Nach einem bekannten Satz ist die Menge  $X_0$  eine BORELSche Menge und zwar ein  $F_{\sigma, \delta}$ ; das folgt übrigens unmittelbar aus der Identität

$$X_0 = \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{p, q=s} X_{p, q, r},$$

wo  $X_{p, q, r}$  ( $p, q, r = 1, 2, \dots$ ) die Menge aller dieser Punkte  $x$  des Raumes  $X$  bezeichnet, für die die Ungleichung

$$(F_p(x), F_q(x)) \leq \frac{1}{r}$$

stattfindet. Unter Berücksichtigung der Bemerkung 5 folgt nun aus dem Satz 1, da die Menge  $X_0$  offenbar eine Untergruppe des Raumes  $X$  bildet, der

<sup>4)</sup> Für den Fall der Borelschen Teilmengen ist dieser Satz in der unter <sup>2)</sup> zitierten Arbeit, p. 4, enthalten. In voller Allgemeinheit wurde er von Herrn Szpilrajn ausgesprochen: E. Szpilrajn, O mierzalności i warunku Baire'a, C. R. du Premier Congrès de Mathématiciens des Pays Slaves (1930) p. 297–303, insb. p. 300. Den Beweis kann man übrigens genau so wie im Fall der Euklidischen Räume führen: O. Nikodym, Sur une propriété de l'opération  $A$ , Fund. Math. 7 (1925) p. 149–154; er bietet keine Schwierigkeiten, wenn wir nur den in der unter <sup>2)</sup> zitierten Note enthaltenen Hauptsatz berücksichtigen.

\*) Anm. b. d. Korrektur: Diese Benennung hat Herr Steinhaus vorgeschlagen.

Satz 2. Die Konvergenzmenge einer Folge potenzartiger, im Raume  $X$  erklärter Operationen bildet eine Untergruppe dieses Raumes, die entweder von erster Kategorie oder zugleich offen und abgeschlossen ist.

Bemerkung 6. Wenn unter den Voraussetzungen des letzten Satzes der Raum  $X$  zusammenhängend ist, so ist die Konvergenzmenge der betrachteten Folge entweder eine Untergruppe des Raumes  $X$  von erster Kategorie oder mit diesem Raum identisch. Dies folgt aus dem Satz 2 und der Bemerkung 1.

Nehmen wir jetzt an, daß  $\{F_{p,q}(x)\}$  eine Doppelfolge von potenzartigen, im Raume  $X$  erklärten Operationen ist und dabei die Werte der Operation  $F_{p,q}(x)$  einem Raume  $Y_p$  ( $p=1, 2, \dots$ ) vom Typus  $(G)$  angehören. Aus der Bemerkung 6 ergibt sich sofort der folgende

Satz 3. Wenn eine Doppelfolge potenzartiger, im Raume  $X$  erklärter Operationen  $\{F_{p,q}(x)\}$  die Eigenschaft besitzt, daß bei jedem natürlichen  $p$  ein Punkt  $x_p$  im Raume  $X$  existiert, in welchem die Folge  $F_{p,1}(x), F_{p,2}(x), \dots$  divergiert, und der Raum  $X$  zusammenhängend ist, so ist die Menge aller Punkte dieses Raumes, in denen mindestens eine der Folgen  $F_{p,1}(x), F_{p,2}(x), \dots$  ( $p=1, 2, \dots$ ) konvergiert, von erster Kategorie.

Man kann also im Besonderen, unter den Voraussetzungen des obigen Satzes, im Raume  $X$  einen Punkt  $x_0$  so wählen, daß jede der Folgen  $F_{p,1}(x_0), F_{p,2}(x_0), \dots$  ( $p=1, 2, \dots$ ) divergent ist; diese Folgerung bildet eine Verallgemeinerung des zweiten Resonanztheorems auf den Fall von allgemeinen zusammenhängenden Räumen vom Typus  $(G)$ <sup>5)</sup>.

Es sei, wie oben,  $\{F_n(x)\}$  eine Folge potenzartiger im Raume  $X$  erklärter Operationen, deren jede den Raum  $X$  auf einen Teil des Raumes  $Y$  abbildet. Bezeichnen wir mit  $X_0$  die Menge aller Punkte  $x$  des Raumes  $X$ , in denen die Folge  $\{F_n(x)\}$  beschränkt, d. h.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (F_n(x), 1) < +\infty$$

ist.  $X_0$  bildet eine BORELSche Menge, ein  $F_\sigma$ ; es ist nämlich

$$X_0 = \sum_{p=1}^{\infty} X_p,$$

<sup>5)</sup> S. Banach et H. Steinhaus, Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math. 9 (1927) p. 50–61, insb. p. 55.

wo  $X_p$  ( $p=1, 2, \dots$ ) die Menge aller Punkte  $x$  des Raumes  $X$  bezeichnet, wo

$$(F_n(x), 1) \leq p \quad (n=1, 2, \dots)$$

ist. Wenn nun die Menge  $X_0$  eine Untergruppe des Raumes  $X$  bildet, so muß sie, nach dem Satz 1 und der Bemerkung 5, von erster Kategorie oder zugleich offen und abgeschlossen sein; insbesondere also gilt der

Satz 4. Die Menge aller Punkte, in denen eine Folge von potenzartigen, im Raume  $X$  erklärten Funktionalen beschränkt ist, bildet eine Untergruppe dieses Raumes, die entweder von erster Kategorie oder zugleich offen und abgeschlossen ist.

Bemerkung 7. Wenn die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt sind und der Raum  $X$  zusammenhängend ist, so ist die Menge aller Punkte, in denen die betrachtete Folge beschränkt ist, entweder eine Untergruppe des Raumes  $X$  von erster Kategorie oder mit diesem Raum identisch.

Aus dem Satz 4 und der Bemerkung 1 folgt endlich der

Satz 5. Wenn eine Doppelfolge von potenzartigen, im Raume  $X$  erklärten Funktionalen  $\{F_{p,q}(x)\}$  so beschaffen ist, daß bei jedem natürlichen  $p$  ein Punkt  $x_p$  im Raume  $X$  existiert, in welchem die Folge  $F_{p,1}(x), F_{p,2}(x), \dots$  nicht beschränkt ist, und der Raum  $X$  zusammenhängend ist, so ist die Menge aller Punkte dieses Raumes, in denen mindestens eine der Folgen  $F_{p,1}(x), F_{p,2}(x), \dots$  ( $p=1, 2, \dots$ ) beschränkt ist, von erster Kategorie.

Man kann also, unter den Voraussetzungen dieses Satzes, einen Punkt  $x_0$  im Raume  $X$  so wählen, daß  $\overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} |F_{p,q}(x_0)| = +\infty$  ( $p=1, 2, \dots$ ) ist; dieses Ergebniss bildet eine Verallgemeinerung des ersten Resonanztheorems über Funktionale<sup>6)</sup> auf den Fall von Räumen vom Typus  $(G)$ .

## § 2.

Es bezeichne  $X$  einen Raum vom Typus  $(G)$  und  $y = F(x)$  eine in ihm erklärte multiplikative Operation, deren Werte Elemente eines Raumes  $Y$  vom Typus  $(G)$  sind. Setzen wir voraus, daß die Operation  $y = F(x)$  in einem Punkte  $a$  stetig ist und es bezeichne  $b$  einen beliebigen anderen, dem Raume  $X$  angehörigen

<sup>6)</sup> Die unter <sup>4)</sup> zitierte Arbeit, insb. p. 54.

Punkt. Wenn die Punktfolge  $\{b_n\}$  gegen  $b$  konvergent ist, so konvergiert die Folge  $\{b_n b^{-1} a\}$  nach  $a$ ; infolgedessen haben wir  $F(b_n b^{-1} a) \rightarrow F(a)$  und da stets  $F(b_n b^{-1} a) = F(b_n) [F(b)]^{-1} F(a)$  ist, so muß  $F(b_n) \rightarrow F(b)$  sein. Auf diese Weise erhält man den folgenden

Hilfssatz 4. *Eine multiplikative, im Raume  $X$  erklärte und in einem Punkte dieses Raumes stetige Operation ist potenzartig.*

Wir beweisen nun den

Satz 6. *Eine multiplikative, im Raume  $X$  erklärte und in Bezug auf ihn der Baireschen Bedingung genügende Operation  $y = F(x)$  ist potenzartig.*

Beweis. Wegen der Voraussetzung enthält der Raum  $X$  eine Teilmenge  $A$ , die von erster Kategorie ist und die folgende Eigenschaft besitzt: Betrachtet man die Operation  $y = F(x)$  in der Menge  $X - A$ , so ist sie dort überall stetig. Es sei  $\{b_n\}$  eine gegen 1 konvergente Punktfolge und bezeichnen wir mit  $B_p$  die Menge aller dieser Punkte  $x$ , für die  $b_p x \in A$  ist ( $p = 1, 2, \dots$ ). Jede der Mengen  $B_p$  ist in dem Bilde von  $A$  bei der Abbildung  $V_p(x) = b_p^{-1} x$  enthalten und also von erster Kategorie; infolgedessen ist die Menge  $B = \sum_{p=1}^{\infty} B_p$  auch von erster Kategorie und  $(X - A)$

$- B \neq \emptyset$ . Es sei  $a \in (X - A) - B$ ; wir haben  $a \in X - A$ ,  $b_p a \in X - A$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) und, da die Folge  $\{b_p a\}$  nach  $a$  konvergiert,  $F(b_p a) \rightarrow F(a)$ . Aus den Gleichungen  $F(b_p a) = F(b_p) F(a)$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) folgt nun die Beziehung  $F(b_p) \rightarrow 1$ ; die Operation  $y = F(x)$  ist im Punkte 1 stetig und, nach dem Hilfssatze 4, potenzartig.

Bemerkung 8. Eine in einem metrischen Raume erklärte BAIRESCHE Funktion, deren Werte einem metrischen Raume angehören, genügt in Bezug auf ihn (und sogar in Bezug auf jede in ihm enthaltene Menge) der BAIRESCHE Bedingung<sup>7)</sup>.

Aus dem Satz 6 und der Bemerkung 8 folgt, daß eine im Raume  $X$  erklärte multiplikative BAIRESCHE Operation potenzartig ist; speziell gilt der

Satz 7. *Eine im Raume  $X$  erklärte Operation, die die Grenze einer Folge von stetigen und multiplikativen, in diesem Raume erklärten Operationen darstellt, ist potenzartig.*

<sup>7)</sup> Die unter <sup>2)</sup> zitierte Arbeit, insb. p. 397.

## § 3.

Es seien  $X, Y$  zwei Räume vom Typus  $(G)$  und  $y = F(x)$  eine potenzartige, im Raume  $X$  erklärte Operation, die ihn auf den ganzen Raum  $Y$  eineindeutig abbildet. Die zu  $y = F(x)$  inverse Operation  $x = F^{-1}(y)$  ist multiplikativ; daß sie unstetig sein kann, lehrt das folgende einfache Beispiel:

Wir betrachten die Gruppe  $X$  der reellen Zahlen in Bezug auf die Addition und definieren als Entfernung je zweier verschiedenen Elemente dieser Gruppe die Zahl 1;  $X$  bildet offenbar einen Raum vom Typus  $(G)$ . Wir bezeichnen weiter mit  $Y$  den Raum vom Typus  $(G)$ , den die Menge der reellen Zahlen bei der Addition als Gruppenverknüpfung und der üblichen Entfernungsdefinition bildet. Setzt man im Raume  $X$   $y = x$ , so bildet die so in diesem Raume erklärte potenzartige Operation ihn auf den ganzen Raum  $Y$  eineindeutig ab; die zu ihr inverse Operation ist aber ersichtlich überall unstetig.

Wir werden jetzt zeigen, daß wenn nur der Raum  $X$  separabel ist (dann muß der Raum  $Y$  als stetiges Bild von  $X$  separabel sein), so ist die zu  $y = F(x)$  inverse Operation  $x = F^{-1}(y)$  potenzartig; wir schicken eine Bemerkung voraus:

Bemerkung 9. Eine Teilmenge eines metrischen Raumes  $Y$ , die das stetige Bild einer SUSLINSCHEN Teilmenge eines vollständigen und separablen metrischen Raumes  $X$  ist, ist eine SUSLINSCHEN Menge<sup>8)</sup>.

Nach dieser Bemerkung beweisen wir den

Satz 8. *Wenn eine potenzartige, in einem separablen Raume  $X$  vom Typus  $(G)$  erklärte Operation  $y = F(x)$  ihn auf den ganzen Raum  $Y$  vom Typus  $(G)$  abbildet,  $\{y_n\}$  eine Folge von Elementen des Raumes  $Y$  ist, die gegen ein Element  $y_0$  dieses Raumes konvergiert und  $x_0$  das Urbild des Elementes  $y_0$  bezeichnet, so gibt es im Raume  $X$  eine gegen  $x_0$  konvergente Elementfolge  $\{x_n\}$  von dieser Eigenschaft, daß stets  $F(x_n) = y_n$  ist.*

Beweis. Ohne der Allgemeinheit des Beweises zu schaden, können wir voraussetzen, daß  $x_0 = y_0 = 1$  ist. Es sei  $m$  eine natürliche Zahl. Man kann um jeden Punkt des Raumes  $X$  eine offene Kugel  $K$  so schlagen, daß für  $a, b \in K$  stets  $(ab^{-1}, 1) < \frac{1}{m}$  wird. Da der Raum  $X$  separabel ist, so kann das System aller die-

<sup>8)</sup> F. Hausdorff, Mengenlehre, 2 Auflage (1927) p. 209.

ser Kugeln ohne Änderung seiner Summe durch ein abzählbares Teilsystem  $K_1, K_2, \dots$  ersetzt werden; wir haben also

$$(1) \quad (ab^{-1}, 1) < \frac{1}{m} \text{ für } a, b \in K_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und dabei

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} K_n = X.$$

Es bezeichne  $F(K_n)$  das Bild der Kugel  $K_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) bei der Abbildung  $y = F(x)$  des Raumes  $X$  auf den Raum  $Y$ .

Wegen (2) und der Voraussetzung erschöpft die Menge  $\sum_{n=1}^{\infty} F(K_n)$

den ganzen Raum  $Y$ ; mindestens eine der Mengen  $F(K_n)$  muß daher von zweiter Kategorie sein. Setzen wir voraus, daß die Menge  $F(K_p)$  diese Eigenschaft aufweist; folglich ist sie von zweiter Kategorie in jedem Punkte einer offenen Kugel  $L$ . Weil aber, auf Grund der Bemerkungen 5 und 9, die Menge  $F(K_p)$  als stetiges Bild der offenen Kugel  $K_p$  in Bezug auf den Raum  $Y$  der BAIRESCHEN Bedingung genügt, so können wir sogar annehmen, daß die Menge  $L - F(K_p)$  von erster Kategorie ist. Es existiert — wie leicht zu sehen ist — eine offene Kugel  $L_0$  und eine natürliche Zahl  $n_0$ , so beschaffen, daß

$$(3) \quad y_n y \in L \quad (n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots) \text{ für } y \in L_0$$

ist. Anderenfalls gäbe es nämlich eine Elementfolge  $\{\eta_n\}$  und eine wachsende Folge natürlicher Zahlen  $\{k_n\}$ , so daß stets  $y_{k_n} \eta_n \in L$  und dabei  $\eta_n \rightarrow y_0$  wäre. Da die Folge  $\{y_n\}$  nach 1 konvergiert, so würde aus  $\eta_n \rightarrow y_0$  die Relation  $y_{k_n} \eta_n \rightarrow y_0$  folgen, die mit  $y_{k_n} \eta_n \in L$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) unvereinbar ist.

Es sei  $L_n$  das Bild der Menge  $L_0 F(K_p)$  bei der Abbildung  $V_n(y) = y_n y$  des Raumes  $Y$  auf sich selbst ( $n = 1, 2, \dots$ ); da die Menge  $L_0 F(K_p)$  von zweiter Kategorie ist, so besitzt jede der Mengen  $L_n$  dieselbe Eigenschaft. Außerdem haben wir nach (3)  $L_n \subset L$  und infolgedessen

$$L_n = L_n F(K_p) + L_n [L - F(K_p)] \quad (n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots).$$

Die Menge  $L - F(K_p)$  ist von erster Kategorie; aus den letzten Gleichungen folgt nun, daß die Mengen  $L_n F(K_p)$  von zweiter

Kategorie und also nicht leer sind ( $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ ). Bezeichnet man mit  $\eta_n$  einen beliebigen Punkt der Menge  $L_n F(K_p)$ , so ist, wie aus der Definition der Mengen  $L_n$  sofort folgt,

$$(4) \quad \eta_n, \bar{\eta}_n = y_n^{-1} \eta_n \in F(K_p) \quad (n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots).$$

Es seien  $\xi_n, \bar{\xi}_n$  die in  $K_p$  gelegenen Urbilder von  $\eta_n, \bar{\eta}_n$ , also

$$(5) \quad F(\xi_n) = \eta_n, F(\bar{\xi}_n) = \bar{\eta}_n, \quad \xi_n, \bar{\xi}_n \in K_p$$

und setzen wir

$$(6) \quad x_{m,n} = \xi_n \bar{\xi}_n^{-1} \quad (n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots).$$

Nach (4), (5) und (6) bestehen, für alle natürliche  $n > n_0$ , die Gleichungen  $F(x_{m,n}) = F(\xi_n) [F(\bar{\xi}_n)]^{-1} = \eta_n \bar{\eta}_n^{-1} = \eta_n (y_n^{-1} \eta_n)^{-1} = y_n$ , d. h.

$$(7) \quad F(x_{m,n}) = y_n;$$

man kann dabei ersichtlich noch die Elemente  $x_{m,1}, x_{m,2}, \dots, x_{m,n_0}$  im Raume  $X$  so wählen, daß die obige Beziehung auch für  $n = 1, 2, \dots, n_0$  gültig wird. Für  $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$  ist, wegen (1), (5) und (6),  $(x_{m,n}, 1) < \frac{1}{m}$  und demnach

$$(8) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_{m,n}, 1) \leq \frac{1}{m}.$$

Auf diese Weise haben wir, bei jedem natürlichen  $m$ , eine Folge  $\{x_{m,n}\}$  von Elementen des Raumes  $X$  definiert, für die die Relationen (7), (8) stattfinden. Die Konstruktion der Elementfolge  $\{x_n\}$  mit den im Satze verlangten Eigenschaften bietet jetzt keine Schwierigkeiten; sie wird dem Leser überlassen.

Bemerkung 10. Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes geht bei der Abbildung  $y = F(x)$  des Raumes  $X$  auf den Raum  $Y$  eine jede offene Menge in eine offene Menge. Der Beweis ist unmittelbar.

Als eine leichte Folgerung des Satzes 8 bekommen wir den

Satz 9. Wenn eine potenzartige, in einem separablen Raume  $X$  vom Typus (G) erklärte Operation  $y = F(x)$  ihn auf den ganzen Raum  $Y$  eineindeutig abbildet, so ist die zu  $y = F(x)$  inverse Operation  $x = F^{-1}(y)$  potenzartig.

Man kann nun ohne besondere Schwierigkeiten zeigen, daß die Bemerkung gilt:

Bemerkung 11. Wenn  $X$  ein Raum vom Typus  $(G)$  ist, so sind die folgenden Eigenschaften dieses Raumes äquivalent:

( $\alpha$ ) Wenn  $y = F(x)$  eine potenzartige, im Raume  $X$  erklärte Operation ist, die ihn auf einen Raum  $Y$  vom Typus  $(G)$  eindeutig abbildet, so ist die Umkehroperation  $x = F^{-1}(y)$  potenzartig.

( $\beta$ ) Wenn durch eine Entfernungsdefinition der Raum  $X$  wieder zu einem Raume vom Typus  $(G)$  wird und — indem wir mit  $(a, b)^*$  die neue Entfernung je zweier Elemente  $a, b$  dieses Raumes bezeichnen — aus  $x_n \subset X$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $x_0 \subset X$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  stets  $(x_n, x_0)^* \rightarrow 0$  folgt, so auch umgekehrt.

Nach dem Satz 9 besitzt der Raum  $X$  die Eigenschaft ( $\alpha$ ), wenn er nur separabel ist; wegen der letzten Bemerkung kommt ihm dann auch die Eigenschaft ( $\beta$ ) zu. Wir fügen hier noch einen Satz an:

Satz 10. Wenn  $y = F(x)$  eine multiplikative, in einem separablen Raume  $X$  vom Typus  $(G)$  erklärte Operation ist, deren Werte einem separablen Raume  $Y$  vom Typus  $(G)$  angehören und aus  $x_n \subset X$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $x_0 \subset X$ ,  $y_0 \subset Y$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $F(x_n) \rightarrow y_0$  stets  $y_0 = F(x_0)$  folgt, so ist die Operation  $y = F(x)$  potenzartig.

Der Beweis verläuft folgenderweise. Wir bezeichnen mit  $(a, b)^*$ ,  $(a, b)^{**}$  die Entfernung je zweier Elemente  $a, b$  des Raumes  $X$  bzw.  $Y$  und erklären im Raume  $X$  noch einen anderen Distanzbegriff durch die Festsetzung

$$(a, b) = (a, b)^* + (F(a), F(b))^{**}.$$

Durch diese Entfernungsdefinition wird der Raum  $X$  auch zu einem separablen Raume vom Typus  $(G)$ ; die Vollständigkeit folgt unmittelbar, wenn wir die Eigenschaften der Operation  $y = F(x)$  berücksichtigen. Wir betrachten nun den so erklärten Distanzbegriff als fundamental. Da aus  $x_n \subset X$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $x_0 \subset X$  und  $x_n \rightarrow x_0$ , d. h.  $(x_n, x_0) \rightarrow 0$ , stets  $(x_n, x_0)^* \rightarrow 0$  folgt, so auch, nach dem Satz 9 und der Bemerkung 11, umgekehrt; dies ist aber mit der Stetigkeit der Operation  $y = F(x)$  gleichbedeutend.

Wir wissen schon, daß im Fall des Satzes 9 die Voraussetzung, nach der der Raum  $X$  separabel ist, nicht entbehrt werden kann; in nichtseparablen Räumen vom Typus  $(G)$  gilt im Allgemeinen dieser Satz nicht. Es ist aber gut bekannt, daß er

z. B. für Räume vom Typus  $(B)$  stets gilt<sup>9)</sup>; wir werden an einem anderen Ort zeigen, daß er auch für die allgemeineren Räume vom Typus  $(F)$  seine Gültigkeit behält. Dabei nennen wir einen gegebenen linearen Raum  $X$  einen *Raum vom Typus  $(F)$* , wenn er ein vollständiger metrischer Raum ist und die folgenden Eigenschaften besitzt ( $a_n \subset X$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $a, b \subset X$ ,  $t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) und  $t$  reelle Zahlen):

- 1)  $(a, b) = (a - b, 0)$ ;
- 2) aus  $a_n \rightarrow a$  folgt  $t a_n \rightarrow t a$ ;
- 3) aus  $t_n \rightarrow t$  folgt  $t_n a \rightarrow t a$ .

(Reçu par la Rédaction le 8. 2. 1931).

<sup>9)</sup> S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires II, Stud. Math. 1 (1929) p. 223—239, insb. Théorème 7; siehe auch: J. Schauder, Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen, Stud. Math. 2 (1930) p. 1—6.

### Studia Mathematica III.

#### Errata.

Page 114, ligne 19, au lieu de	$\gamma_x = 0, 1 \dots k^2 - 1$	lire	$\gamma_x = 0, 1 \dots k^2 - 1$ ;	$0 \leq \delta_x < 1$ .
„ 115 „ 14 „ „ „	$f_k(x+t) > 1$	„	$f_k(x+t) = 1$	
„ „ „ 16 „ „ „	$f_k(x+t) > 1$	„	$f_k(x-t) > 1$	
„ „ „ 20 „ „ „	$\frac{1}{48k^4}$	„	$\frac{1}{48k^2}$	
„ „ „ 26 „ „ „	$\int_m^{H_m^{(1)}} dt$	„	$\frac{k^2}{m+1} \int_m^{H_m^{(1)}} dt$	
„ 116 „ 6 „ „ „	$< -\frac{1}{3(m+1)}$	„	$\leq -\frac{1}{3(m+1)}$	
„ „ „ 10 „ „ „	$\beta_x = \gamma_x = k^2 - 1$	„	$\beta_x = 31, \gamma_x = k^2 - 1$	
„ 117 „ 11 „ „ „	$i = 1, 2, 3 \dots$	„	$i = 1, 2, 3$	