

$$(15) \quad \frac{x_3(x_1) - x_3(x)}{x_1 - x} - \frac{x_3(x_2) - x_3(x)}{x_2 - x} > \frac{\eta}{2} \left\{ \frac{1 - \sin 2\pi p x}{x_1 - x} + \frac{1 + \sin 2\pi p x}{x_2 - x} \right\} - 2\beta > \frac{\eta}{2} \cdot \frac{2p}{3} - 2\beta > 1.$$

Donc: $x_3(x) \in U_p^{(2)} \subset V_n^{(2)} \subset V_n^{(3)}$. On voit que $V_n^{(3)}$ est dense dans C . Comme, d'autre part, $V_n^{(3)}$ est un ensemble ouvert dans C , il en résulte que son complémentaire $C - V_n^{(3)}$ est non dense dans C . Mais, d'après (10),

$$(16) \quad C - N \subset \sum_{n=1}^{\infty} C - V_n^{(3)}.$$

$C - N$ étant contenu dans un ensemble de première catégorie, est de première catégorie, c. q. f. d.

(Reçu par la Rédaction le 9. 2. 1931).

Une remarque sur les séries

par

S. KACZMARZ (Lwów).

Le but de cette note est une extension des deux théorèmes sur les séries, dûs à M. SZIDON¹⁾. Ces théorèmes sont valables pour les séries dont les termes appartiennent à un champ du type (B), c'est à dire à un espace vectoriel, complet et normé.

Considérons un champ du type (B) et soit $\{a_n\}$ une suite d'éléments de ce champ; posons $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Les théorèmes suivants sont connus:¹⁾

A. Si la suite des moyennes arithmétiques de la série

$$\sum a_k \lambda_k$$

est bornée, suivant la norme, pour toute suite numérique $\{\lambda_n\}$ convexe et tendant vers 0, alors les moyennes arithmétiques de la série

$$\sum a_k$$

sont aussi bornées.

B. Si, pour toute suite numérique monotone et tendant vers 0, les moyennes arithmétiques de la série

$$\sum a_k \lambda_k$$

sont bornées, il existe une constante K telle que

$$\|s_n\| < K.$$

Nous allons maintenant prouver que le théorème est aussi valable si nous remplaçons dans l'hypothèse et dans la thèse du théorème A les termes „la suite des moyennes arithmétiques“ par „la suite des sommes partielles“. Pour ce but nous avons besoin du lemme suivant:

¹⁾ S. Szidon, Math. Zeitschr. 10 (1921) p. 121.

Lemme. Étant donné une suite $\{b_n\}$ telle que

$$b_n > 0, \quad b_n \rightarrow 0,$$

on peut trouver une autre suite $\{c_n\}$ telle que

$$b_n \leq c_n, \quad c_n \rightarrow 0, \quad \Delta^2 c_n \geq 0.$$

En effet, soit n_k tel que

$$b_n < \frac{1}{k} \text{ pour } n \geq n_k;$$

posons $c_{n_k} = \frac{2}{k}$ et, pour $n_k < n < n_{k+1}$,

$$c_n = \frac{1}{k+1} + \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) \frac{1}{n_{k+1} - n_k} (n_{k+1} - n);$$

la suite $\{c_n\}$, qui est une majorante pour $\{b_n\}$, est convexe.

Théorème 1. Si les sommes partielles de la série

$$\sum a_k \lambda_k$$

sont bornées pour les suites numériques $\{\lambda_n\}$ tendant vers 0 et convexes, c'est à dire telles que

$$\Delta^2 \lambda_n = \lambda_n + \lambda_{n+2} - 2\lambda_{n+1} \geq 0,$$

alors on a

$$\left\| \sum_1^m a_k \right\| < K,$$

et réciproquement.

Démonstration. Supposons que

$$\overline{\lim} \|s_n\| = +\infty.$$

Il existe alors une suite d'indices n_i telle que

$$\|s_{n_i}\| \rightarrow \infty.$$

Soit $\{b_n\}$ une suite de nombres positifs, tendant vers 0 et vérifiant l'inégalité

$$\frac{1}{b_{n_i}} \leq \sqrt{\|s_{n_i}\|}.$$

D'après le lemme, il existe une suite $\{\lambda_n\}$ convexe, tendant vers 0 et vérifiant l'inégalité

$$b_n \leq \lambda_n.$$

En posant $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$, on a

$$s_k = \sum_1^n a_k \lambda_k \mu_k = \sum_1^n s_k^1 \Delta \mu_k + s_n^1 \mu_{n+1},$$

où

$$s_k^1 = \sum_1^k a_i \lambda_i.$$

D'après l'hypothèse

$$\|s_k^1\| < K_\lambda,$$

donc

$$\|s_n\| \leq K_\lambda (\mu_{n+1} - \mu_1) + K_\lambda \mu_{n+1} \leq 2K_\lambda \mu_{n+1}.$$

Posons $n = n_i - 1$; on aura alors

$$\|s_{n_i-1}\| \leq 2K_\lambda \sqrt{\|s_{n_i}\|},$$

$$\|s_{n_i}\| \leq \|a_{n_i}\| + 2K_\lambda \sqrt{\|s_{n_i}\|}.$$

D'autre part,

$$\|\lambda_{n_i} a_{n_i}\| \leq 2K_\lambda, \quad \|a_{n_i}\| \leq 2K_\lambda \mu_{n_i},$$

donc

$$\|s_{n_i}\| \leq 4K_\lambda \sqrt{\|s_{n_i}\|},$$

c'est à dire

$$\|s_{n_i}\| \leq 6K_\lambda^2,$$

ce qui contredit la formule $\|s_{n_i}\| \rightarrow \infty$.

Réciproquement, si

$$\|s_n\| \leq K,$$

on a

$$s_n^1 = \sum_1^n s_k \Delta \lambda_k + s_n \lambda_{n+1},$$

$$\|s_n^1\| \leq K \lambda_1.$$

Généralisons maintenant le théorème B pour les méthodes sommatoires de TOEPLITZ. Envisageons, pour les séries $\{a_{ik}\}$, un tableau sommatoire (T) jouissant des propriétés:

$$1^\circ a_{i,k} = 0 \text{ pour } k > q_i, \quad |a_{i,k}| < L,$$

$$2^\circ \lim_{i \rightarrow \infty} a_{i,k} = 1.$$

Théorème 2. Supposons que, pour toute suite λ_n monotone et tendant vers 0, il existe une constante K_λ telle que

$$\|(T) \sum a_k \lambda_k\| < K_\lambda,$$

(en d'autres termes, que

$$\left\| \sum_1^{q_i} a_k \lambda_k a_{i,k} \right\| < K_\lambda \quad (i=1, 2, \dots)$$

alors il existe une constante K telle que

$$\left\| \sum_1^m a_k \right\| < K.$$

Le théorème réciproque est vrai si la méthode (T) est permanente.

Démonstration. Nous démontrerons d'abord qu'il existe une constante K telle que, pour toutes les suites λ_n où $\lambda_1 \leq 1$, on a

$$\|(T) \sum a_k \lambda_k\| < K.$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; il existe alors, pour tout $M > 0$, une suite monotone $\lambda_k(M)$ et un nombre $p(M)$ tels que

$$\left\| \sum_1^q q_k \lambda_k(M) \cdot a_{p,k} \right\| > M, \quad q = q_{k p(M)}.$$

Définissons à présent, pour tout n naturel, la suite $\{\lambda_k^n\}$ ($k=1, 2, \dots$) et les nombres $p(n), c_n > 0$ de telle façon, que l'on ait

$$a) \sum_1^\infty \frac{1}{c_i} < 1,$$

$$b) \|(Tp) \sum_{i=n+1}^\infty \frac{1}{c_i} \sum_{k=1}^s a_k \lambda_k^i\| < 1, \quad s = q_{p(n)} = s(n),$$

où (Tp) signifie la transformée par la p -ième ligne du tableau (T) ,

$$c) \frac{1}{c_n} \left\| \sum_{k=1}^{s(n)} a_k \lambda_k^n a_{p(n),k} \right\| > n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{c_i} \left\| \sum_{k=1}^{s(i)} a_k \lambda_k^i a_{p(n),k} \right\|.$$

Cette construction est possible; supposons, en effet, que nous ayons déjà défini $\{\lambda_k^n\}$ et c_i pour $i=1, 2, \dots, n$. Désignons par c_{n+1} un nombre tel que

$$\frac{1}{c_{n+1}} \sum_1^{s(n)} \|a_k\| \leq \frac{1}{n^2}, \quad c_{n+1} > n^2,$$

et par $\{\lambda_k^{n+1}\}$ une suite vérifiant la condition c); il suffit, d'après l'hypothèse, de poser

$$M = c_{n+1} (n+1) + c_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \cdot \sum_{k=1}^{s(i)} \|a_k\| \lambda_k^i. L;$$

posons ensuite

$$\lambda_k = \sum_{i=r}^\infty \frac{\lambda_k^i}{c_i} \quad (s(r-1) < k \leq s(r)).$$

On a d'une part

$$\Delta \lambda_k = \begin{cases} \lambda_k < 1, \\ \sum_r^\infty \frac{1}{c_i} \Delta \lambda_k^i > 0 \\ \frac{1}{c_n} \lambda_k^n + \sum_{r+1}^\infty \frac{1}{c_i} \Delta \lambda_k^i > 0 \end{cases}$$

et d'autre part

$$\sum_1^\infty a_k \lambda_k = \sum_1^\infty \frac{1}{c_i} \sum_1^{s(i)} a_k \lambda_k^i,$$

donc

$$(Tp(n)) \sum_1^\infty a_k \lambda_k = A + B + C,$$

où

$$A = \frac{1}{c_n} \sum_1^{s(n)} a_k \lambda_k^n a_{p(n),k},$$

$$B = \sum_1^{n-1} \frac{1}{c_i} \sum_1^{s(i)} a_k \lambda_k^i a_{p(n),k},$$

$$C = (Tp(n)) \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{c_i} \sum_1^{s(n)} a_k \lambda_k^i.$$

D'après les propriétés a) b) c) on aura alors

$$\|(Tp(n)) \sum a_i \lambda_i\| > -1,$$

c'est à dire

$$\lim \| (T) \sum a_i \lambda_i \| < K,$$

ce qui est impossible d'après l'hypothèse. Il existe donc une constante K vérifiant l'inégalité

$$\|(T) \sum a_k \lambda_k\| < K.$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Soit

$$\lambda_k = 1 \quad \text{pour } k \leq n,$$

$$\lambda_k = 0 \quad \text{pour } k > n.$$

On a, d'après ce qui précède,

$$\left\| \sum_1^n a_k a_{p,k} \right\| < K.$$

La propriété 2) du tableau sommatoire (T) et l'inégalité précédente donnent

$$\left\| \sum a_k \right\| \leq K.$$

Le théorème réciproque est évident.

Application. On sait que la série trigonométrique

$$(1) \quad \sum_1^\infty \lambda_n \cos nx,$$

où $\lambda_n \rightarrow 0$, $\lambda_n > 0$, est une série de FOURIER. Nous démontrerons qu'il existe une série du type (1) pour laquelle

$$(2) \quad \overline{\lim} \int_0^{2\pi} |s_n(x)| dx = +\infty.$$

Dans le cas contraire, on aurait

$$\int_0^{2\pi} |s_n(x)| dx < K_\lambda,$$

donc, suivant le théorème 1,

$$\int_0^{2\pi} |\sum \cos nx| dx < K,$$

contrairement au fait bien connu, que

$$\int_0^{2\pi} |\sum \cos nx| dx = O(\lg n).$$

Il existe alors une série (1) possédant la propriété (2), bien qu'elle converge vers une fonction nonnégative pour tout x sauf $x=0, 2\pi$.

(Reçu par la Rédaction le 10. 3. 1931).

Über metrische Gruppen

von

S. BANACH (Lwów).

Die vorliegende Arbeit hat zum Gegenstand einige Sätze betreffend Räume vom Typus (G); Räume dieser Art bilden einen Sonderfall der stetigen Gruppen. Wir nennen nämlich eine gegebene Gruppe X einen *Raum vom Typus (G)*, wenn sie ein metrischer vollständiger Raum ist und dabei die folgenden Bedingungen erfüllt ($a_n, b_n \in X$ ($n=1, 2, \dots$) und $a, b \in X$):

- 1) Aus $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ folgt $a_n b_n \rightarrow ab$;
- 2) aus $a_n \rightarrow a$ folgt $a_n^{-1} \rightarrow a^{-1}$.

Es ist klar, daß der so erklärten Klasse von Räumen im Besonderen die Räume vom Typus (B) angehören, wenn man sie als Gruppen in Bezug auf die Addition betrachtet; diese Klasse enthält auch die unten erwähnten Räume vom Typus (F), wenn wir wieder in ihnen die Addition als Gruppenverknüpfung erklären.

Wir beweisen zuerst, daß jede Untergruppe eines Raumes vom Typus (G), welche in Bezug auf ihn die BAIRESCHE Bedingung erfüllt, entweder eine Menge von erster Kategorie oder eine zugleich offene und abgeschlossene Menge ist. Aus der Bemerkung, daß in jedem metrischen Raum eine BORELSche Menge in Bezug auf ihn (und sogar in Bezug auf jede in ihm enthaltene Menge) die BAIRESCHE Bedingung erfüllt, bekommen wir als eine spezielle Folgerung eine Verallgemeinerung der so genannten Resonanztheoreme, welche bisher nur im Falle der Räume vom Typus (B) bekannt waren, auf den Fall von allgemeinen zusammenhängenden Räumen vom Typus (G). Wir beweisen weiter, daß eine multiplikative in einem Raume vom Typus (G) erklärte und in Bezug auf ihn der BAIRE-

¹ Vgl. F. Leja, Sur la notion du groupe abstrait topologique, Fund. Math. 9 (1927) p. 37—44.