Sur les fonctions non dérivables

par

S. MAZURKIEWICZ (Varsovie).

Je démontre le théorème suivant qui donne la reponse à une question posée par M. Steinhaus [1]):

Soit C l'espace des fonctions continues de période 1. L'ensemble N de fonctions de C, qui n'admettent pas de dérivée (finie) à droite dans aucun point, est de seconde catégorie dans C, son complémentaire étant de première catégorie. La norme $\|x\|$ d'une fonction $x(\tau)$ est definie, comme d'habitude, par l'égalité

(1) $$\|x\| = \operatorname{Max} |x(\tau)| \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

Pour $k=1,2\ldots$, soit $U_k^{(1)}$ l'ensemble de fonctions $x(\tau) \in C$ qui satisfont à la condition suivante: pour tout τ il existe deux points τ_1, τ_2 tels que

(2) $$\tau + \frac{1}{k} \leqslant \tau_i \leqslant \tau + \frac{3}{k} \qquad (i=1,2),$$

(3) $$\frac{x(\tau_1)-x(\tau)}{\tau_1-\tau} - \frac{x(\tau_2)-x(\tau)}{\tau_2-\tau} > \frac{1}{2}.$$

Soit $U_k^{(2)}$ l'ensemble de fonctions $y(\tau) \in C$ satisfaisant à une condition analogue, l'égalité (3) étant remplacée par

(4) $$\frac{y(\tau_1)-y(\tau)}{\tau_1-\tau} - \frac{y(\tau_2)-y(\tau)}{\tau_2-\tau} > 1.$$

Soit $U_k^{(3)}$ l'ensemble de fonctions $z(\tau) \in C$, telles que, pour une (au moins) fonction $y(\tau) \in U_k^{(2)}$, on ait l'inégalité

(5) $$\|z-y\| < \frac{1}{8k}.$$

---

[1]) Studia Math. 1 (1929) p. 81.

Posons enfin

(6) $$V_n^{(i)} = \sum_{k=n}^{\infty} U_k^{(i)} \qquad (i=1,2,3).$$

On aura évidemment:

(7) $$\prod_{n=1}^{\infty} V_n^{(1)} \subset N$$

Supposons maintenant que l'on a (2), (4), (5); on aura alors

(8) $$\frac{z(\tau_1)-z(\tau)}{\tau_1-\tau} - \frac{z(\tau_2)-z(\tau)}{\tau_2-\tau} > \frac{y(\tau_1)-y(\tau)}{\tau_1-\tau} - \frac{y(\tau_2)-y(\tau)}{\tau_2-\tau} -$$
$$- \left\{ \frac{|y(\tau_1)-z(\tau_1)| + |y(\tau)-z(\tau)|}{\tau_2-\tau} + \frac{|y(\tau_2)-z(\tau_2)| + |y(\tau)-z(\tau)|}{\tau_2-\tau} \right\}$$
$$> 1 - 4k\frac{1}{8k} = \frac{1}{2};$$

il en résulte que

(9) $$U_k^{(3)} \subset U_k^{(1)}, \quad V_n^{(3)} \subset V_n^{(1)},$$

donc, d'aprés (7),

(10) $$\prod_{n=1}^{\infty} V_n^{(3)} \subset N.$$

Soit $x_1(\tau) \in C$, $\eta > 0$. Il existe un polynôme trigonométrique $x_2(\tau)$ (en $\cos 2\pi\tau$, $\sin 2\pi\tau$) tel que $\|x_1 - x_2\| < \frac{\eta}{2}$. Soit n un nombre naturel, $\beta = \left\| \frac{dx_2}{d\tau} \right\|$, enfin p un nombre naturel à la fois supérieur à n et à $\frac{3}{\eta}(2\beta+1)$. Considérons la fonction $x_3(\tau) = x_2(\tau) + \frac{\eta}{2}\sin 2\pi p\tau$. On a évidemment

(11) $$\|x_1 - x_3\| < \eta.$$

Posons, pour $\frac{q}{p} < \tau < \frac{q+1}{p}$, $q = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$,

(12) $$\tau_1 = \frac{q+2+\frac{1}{4}}{p}, \quad \tau_2 = \frac{q+2+\frac{3}{4}}{p};$$

on aura

(13) $$\tau + \frac{1}{p} \leqslant \frac{q+2}{p} < \tau_1 < \tau_2 < \frac{q+3}{p} \leqslant \tau + \frac{3}{p},$$

(14) $$\sin 2\pi p\tau_1 = 1, \quad \sin 2\pi p\tau_2 = -1,$$

(15) $$\frac{x_3(\tau_1)-x_3(\tau)}{\tau_1-\tau}-\frac{x_3(\tau_2)-x_3(\tau)}{\tau_2-\tau}>\frac{\eta}{2}\left\{\frac{1-\sin 2\pi p\tau}{\tau_1-\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{1+\sin 2\pi p\tau}{\tau_2-\tau}\right\}-2\beta>\frac{\eta}{2}\cdot\frac{2p}{3}-2\beta>1.$$

Donc: $x_3(\tau)\in U_p^{(2)}\subset V_n^{(2)}\subset V_n^{(3)}$. On voit que $V_n^{(3)}$ est dense dans C. Comme, d'autre part, $V_n^{(3)}$ est un ensemble ouvert dans C, il en résulte que son complémentaire $C-V_n^{(3)}$ est non dense dans C. Mais, d'après (10),

(16) $$C-N\subset\sum_{n=1}^{\infty}C-V_n^{(3)}.$$

$C-N$ étant contenu dans un ensemble de première catégorie, est de première catégorie, c. q. f. d.

(Reçu par la Rédaction le 9. 2. 1931).

Une remarque sur les séries

par

S. KACZMARZ (Lwów).

Le but de cette note est une extension des deux théorèmes sur les séries, dûs a M. Szidon[1]). Ces théorèmes sont valables pour les séries dont les termes appartiennent à un champ du type (B), c'est à dire à un espace vectoriel, complet et normé.

Considérons un champ du type (B) et soit $\{a_n\}$ une suite d'éléments de ce champ; posons $s_n=\sum_1^n a_k$.

Les théorèmes suivants sont connus:[1])

A. Si la suite des moyennes arithmétiques de la série

$$\sum a_k\lambda_k$$

est bornée, suivant la norme, pour toute suite numérique $\{\lambda_n\}$ convexe et tendant vers 0, alors les moyennes arithmétiques de la série

$$\sum a_k$$

sont aussi bornées.

B. Si, pour toute suite numérique monotone et tendant vers 0, les moyennes arithmétiques de la série

$$\sum a_k\lambda_k$$

sont bornées, il existe une constante K telle que

$$\|s_n\|<K.$$

Nous allons maintenant prouver que le théorème est aussi valable si nous remplaçons dans l'hypothèse et dans la thèse du théorème A les termes „la suite des moyennes arithmétiques" par „la suite des sommes partielles". Pour ce but nous avons besoin du lemme suivant:

[1]) S. Szidon, Math. Zeitschr. 10 (1921) p. 121.