l'amabilité de me communiquer une construction fort simple des polynomes $P_k(t)$ en question. Si l'on veut, par exemple, approximer la fonction $1-\varphi(x,1)$ par de tels polynomes, il suffit d'abord de l'approximer par une fonction $f(t)$, différentiable, $f(0)=0$, croissante de 0 à x, decroissante de x à $1, f(1)=1$, et ayant une dérivée seconde au point $t=x$. En prenant alors un polynome $p(t)$ tel que

$$\left|\frac{f'(t)}{x-t}-p(t)\right|<\varepsilon, \text{ pour tout } 0\leqslant t\leqslant 1,$$

on aura

$$P(t)=p(t)+\varepsilon\geqslant 0$$

et

$$|f'(t)-(x-t)P(t)|\leqslant 2\varepsilon|x-t|\leqslant 2\varepsilon, \text{ pour tout } 0\leqslant t\leqslant 1,$$

de sorte que le polynome

$$\int_0^t (x-u)P(u)\,du,$$

multiplié par une constante convenable, fournit le polynome demandé.

Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances

par

A. ZYGMUND (Wilno).

(Les quatre §§ qui constituent cette Note peuvent être lus séparément).

§ 1.

Sur un théorème de Fatou.

1. Considérons une série trigonométrique lacunaire

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos n_k x+b_k\sin n_k x) \tag{1}$$

où les nombres naturels $n_1<n_2<\ldots$ vérifient une inégalité $n_{k+1}/n_k>q>1$ $(k=1,2,\ldots)$ et supposons d'abord que q soit très grand. Supposons aussi que la série en question converge partout dans $(-\infty,+\infty)$. Alors il est facile de prouver que la série (1) converge *absolument*, c'est à dire que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)<\infty. \tag{2}$$

A cet effet soit $a_k\cos n_k x+b_k\sin n_k x=\varrho_k\sin(n_k x+x_k)$ $(\varrho_k>0)$ et considérons les courbes $y=\varrho_k\cos(n_k x+x_k)$ pour $k=1,2,\ldots$. Designons par I_1 un des intervalles dans lesquels $\cos(n_1 x+x_1)\geqslant 1/2$. Comme le quotient n_2/n_1 est grand, il existe un intervalle I_2, faisant partie de I_1, et tel que dans I_2 on ait $\cos(n_2 x+x_2)\geqslant 1/2$. En procédant de cette façon, on obtient une suite d'intervalles $I_1\supset I_2\supset\ldots\supset I_k\supset\ldots$ telle que, dans I_k, on a $\cos(n_k x+x_k)\geqslant 1/2$. Soit x^* le point commun à tous ces intervalles. De la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k \cos(n_k x^* + x_k),$$

il résulte celle de $\sum \varrho_k$, ce qui équivaut à (2).

Le raisonnement que nous venons de faire, se trouve dans la Thèse de FATOU[1]). En ne considérant que des valeurs de k suffisamment grandes, on démontre l'inégalité (2) sous l'hypothèse que la série (1) converge dans un intervalle (α, β) d'une longueur aussi petite que l'on veut. De même, au lieu de supposer que les sommes partielles s_N de la série (1) convergent, il suffit de faire l'hypothèse qu'elles soient finies[2]).

Nous avons supposé jusqu'à présent que le nombre q soit assez grand. Il est facile de voir que le raisonnement ci-dessus subsiste, mutatis mutandis, pour $q > 3$. Nous allons démontrer que le thérorème en question est vrai aussi pour $q > 1$, mais la démonstration devient alors plus compliquée. Elle est basée sur des raisonnements différents de ceux que nous venons de faire. En particulier, elle utilise une idée que M. SIDON a déjà appliqué à l'étude des séries lacunaires[3]).

2. Soit $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ une suite de nombres naturels tels que $n_{k+1}/n_k > q > 3$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Soit $x_1, x_2, \ldots$ une suite arbitraire de nombres réels. Nous alons étudier les intégrales

$$(3) \qquad \int_\alpha^\beta P_N(x)\,dx, \qquad\qquad (4) \qquad \int_\alpha^\beta \cos(mx + \mu)\, P_N(x)\,dx,$$

où m et μ sont des nombres réels et

$$(5) \qquad P_N(x) = \prod_{k=1}^{N} \{1 + \cos(n_k x + x_k)\}.$$

La multiplication étant faite, $P_N(x)$ peut être représenté comme une somme de $(N+1)$ groupes $G_0, G_1, \ldots, G_N$ de termes, où G_h $(1 \leqslant h \leqslant N)$ est composé de produits de h cosinus. Le groupe G_h peut être divisé à son tour en des sousgroupes $G_{h,h}, G_{h,h+1}, \ldots, G_{h,k}, \ldots, G_{h,N}$, où les termes de $G_{h,k}$ sont caractérisés par le fait

[1]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. 30 (1906) p. 335–400, spéc. p. 397.

[2]) On définit s_N en remplaçant dans (1) ∞ par N.

[3]) S. Sidon, Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken, Math. Ann. 97 (1927) p. 675–676.

que le plus grand des n y rentrant est n_k. Tout produit de h cosinus peut être mis en forme d'une somme de 2^{h-1} cosinus à coefficients 2^{1-h}. Quel que soit $\varepsilon > 0$, les facteurs dans les arguments des cosinus (dont le nombre est $\binom{k-1}{h-1} 2^{h-1}$ et dont chacun est pourvu du coefficient 2^{1-h}) provenant du sousgroupe $G_{h,k}$ appartiennent tous à l'intervalle $(n_k(1-\varepsilon), n_k(1+\varepsilon))$, pourvu que $q \geqslant Q(\varepsilon)$. En particulier, si $q > 3$ (l'hypothèse que nous venons de faire) et si $\beta - \alpha = 2\pi$, l'intégrale (3) est égale à 2π. Nous supposerons toujours que $\varepsilon < 1/3 < 1/2$. Alors

$$\left| \int_\alpha^\beta (G_{1,k} + G_{2,k} + \ldots G_{k,k})\,dx \right| \leqslant 2 \cdot \frac{1}{n_k/2} \sum_{h=1}^{k} \binom{k-1}{h-1} 2^{h-1} \cdot 2^{1-h}$$

$$= 2^{k+1}/n_k.$$

Par conséquent

$$\left| \int_\alpha^\beta P_N(x)\,dx - (\beta - \alpha) \right| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1}/n_k < 4q/n_1(q-2).$$

Supposons maintenant que m soit situé en dehors de tous les intervalles $(n_k(1-2\varepsilon), n_k(1+2\varepsilon))$. Alors, en considérant l'intégrale, étendue à l'intervalle (α, β), du produit $\cos(mx + \mu)$ par $\sum_{h=1}^{k} G_{h,k}$, nous trouvons qu'elle ne dépasse pas (en valeur absolue)

$$\frac{1}{\varepsilon n_k} \sum_{h=1}^{k} \binom{k-1}{h-1} 2^{h-1} \cdot 2^{1-h} = 2^{k-1}/\varepsilon n_k.$$

Il vient que l'intégrale (4) est (absolument) plus petite que

$$(6) \qquad \frac{2}{m} + \frac{1}{n_1 \varepsilon} \cdot \frac{q}{q-2}. \;{}^{4)}$$

3. Nous passons maintenant à la démonstration de la proposition annoncée.

Théorème. *Si en tout point d'un intervalle I les sommes partielles d'une série* (1), *où $n_{k+1}/n_k > q > 1$, sont finies, l'inégalité* (2) *a lieu.*

[4]) Si l'on suppose que m soit situé en dehors des intervalles $(n_k/(1+2\varepsilon), n_k(1+2\varepsilon))$, on doit remplacer, dans (6), ε par $\delta(\varepsilon)$ $(= \varepsilon(1-2\varepsilon)/(1+2\varepsilon))$.

Remarquons d'abord qu'il résulte des prémisses du théorème l'existence dans I d'un sousintervalle (α, β) et d'un nombre M tel que

$$|s_N(x)| \leqslant M \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ N=1, 2, \ldots). \tag{7}$$

C'est le théorème bien connu de BAIRE sur les suites de fonctions continues. Voici sa démonstration. Désignons par $E_{i,k}$ l'ensemble de points x $(x \subset I)$ où $|s_i(x)| \leqslant k$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$. Les ensembles $E_{i,k}$, donc aussi les ensembles $E_k = E_{1,k} \cdot E_{2,k} \cdots E_{i,k} \cdots$, sont fermés, et de plus $I = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$. Comme un intervalle ne peut être présenté comme une somme dénombrable d'ensembles non denses, l'un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots$, appelons le E_M, n'est pas non dense, donc, étant fermé, il contient un intervalle (α, β), ce qui nous donne (7).

Posons $q = 1 + 2\varepsilon$. Soit r un nombre naturel vérifiant les trois inégalités suivantes:

$$\text{a) } q^r > 3, \qquad \text{b) } q^r > 2/(1-2\varepsilon), \qquad \text{c) } q^r > Q(\varepsilon) \tag{8}$$

et soit $\eta = (\beta - \alpha)/4(r+1)$. Posons

$$P_{N,p} = \prod_{k=0}^{N-1} \{1 + \cos(n_{kr+p}x + x_{kr+p})\},$$

$$P_{N,p}^{(h)} = P_{N,p} / \{1 + \cos(n_{hr+p}x + x_{hr+p})\} \quad (p = 1, 2, \ldots, r).$$

Considérons l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta s_{Nr} P_{N,p}\, dx = \int_\alpha^\beta \left\{ \sum_{j=1}^{Nr} \varrho_j \cos(n_j x + x_j) \right\} P_{N,p}\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \varrho_{rk+p} \left\{ \int_\alpha^\beta \cos^2(n_{rk+p}x + x_{rk+p})\, P_{N,p}^{(k)}\, dx + \int_\alpha^\beta \cos(n_{rk+p}x + x_{rk+p})\, P_{N,p}^{(k)}\, dx \right\} + R_p. \tag{9}$$

Le coefficient de ϱ_{rk+p} dans la formule (9) est la somme de deux intégrales, dont la seconde, qui est de la forme (4), est plus petite en valeur absolue que η, pourvu que n_1 soit suffisamment grand (ce que nous pouvons toujours supposer, en changeant, s'il est nécessaire, la valeur de M dans (7)). La première des intégrales mentionnées est égale à

$$\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \{1 + \cos(2n_{rk+p}x + 2x_{rk+p})\}\, P_{N,p}^{(k)}\, dx, \tag{10}$$

et comme $n_{r(k-1)+p}(1+2\varepsilon) \leqslant 2n_{rk+p} \leqslant n_{r(k+1)+p}(1-2\varepsilon)$ (cf. (8 b)), on en déduit que, si n_1 est suffisamment grand, l'intégrale (10) est $\geqslant \frac{1}{2}(\beta - \alpha) - \eta$. Le coefficient de ϱ_{rk+p} dans (9) dépasse donc $\frac{1}{2}(\beta - \alpha) - 2\eta$.

Le terme R_p dans (9) est composé de $r-1$ séries

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varrho_{kr+p'} \left\{ \int_\alpha^\beta \cos(n_{rk+p'}x + x_{rk+p'})\, P_{N,p}\, dx \right\} \quad (p' = 1, 2, \ldots r;\ p' \neq p)$$

qui (cf. l'expression (6)) sont plus petites en valeur absolue que $\eta \sum_{k=0}^{N-1} \varrho_{kr+p'}$ (nous supposons encore une fois que n_1 soit suffisamment grand). Il vient que

$$\sum_{p=1}^{r} \int_\alpha^\beta s_{Nr} P_{N,p}\, dx \geqslant \sum_{j=1}^{Nr} \varrho_j \left\{ \frac{1}{2}(\beta - \alpha) - \eta(r+1) \right\} \geqslant \frac{1}{4}(\beta - \alpha) \sum_{j=1}^{Nr} \varrho_j, \tag{11}$$

et comme le premier membre dans (10) ne dépasse pas $2\pi r M$, on en déduit l'inégalité (2).

4. Remarques additionnelles. 1° Dans la démonstration précédente il suffit de supposer, au lieu de (7), que

$$s_N(x) \leqslant M \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ N = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

L'inégalité (2) a donc lieu, s'il existe un intervalle I en tout point duquel on ait $\overline{\lim}\, s_N < \infty$, car cette hypothèse entraîne l'existence d'un intervalle (α, β) et d'un nombre M tel que (12) ait lieu [5])

On peut dire un peu plus généralement que si, en tout point d'un intervalle I, *tout au plus* une des égalités $\overline{\lim}\, s_N = +\infty$, $\underline{\lim}\, s_N = -\infty$ a lieu, l'inégalité (2) est vérifiée. En effet, soient E' et E'' les ensembles de points où l'on a respectivement $\overline{\lim}\, s_N < \infty$, $\overline{\lim}\, s_N = \infty$. De même, dans les ensembles F' et F'', nous aurons respectivement $\underline{\lim}\, s_N > -\infty$, $\underline{\lim}\, s_N = -\infty$. On a $E' = E_1 + E_2 + \ldots$; $F' = F_1 + F_2 + \ldots$, les ensembles $E_1, E_2, \ldots F_1, F_2, \ldots$ étant fermés (cf. le raisonnement de BAIRE reproduit plus haut). Si E' et F' étaient de première catégorie, E'' et F'' seraient de seconde caté-

[5]) Cf. le raisonnement analogue concernant l'inégalité (7).

gorie, mais comme, par hypothèse, $E''.F''=0$, on aurait $F''\subset E'$, ce qui est evidemment impossible. Il en résulte qu'un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots, F_1, F_2, \ldots$ contient un intervalle, ce quí entraîne (2).

2° Le théorème subsiste même dans le cas où les nombres n_k ne sont pas entiers.

3° Le théorème démontré généralise le théorème suivant démontré par M. Sidon [6]: Si une série (1) (avec $n_{k+1}/n_k > q > 1$) est celle de Fourier d'une fonction $f(x)$ bornée (ou même bornée inférieurement), on a l'inégalité (2). En effet, dans ce cas, les premières moyennes arithmétiques sont uniformément bornées (ou bornées inférieurement) et comme pour les séries trigonométriques lacunaires (avec $\varrho_k \to 0$) la différence entre s_N et la moyenne arithmétique correspondante [7]) est absolument plus petite que

$$\frac{n_1\varrho_1+n_2\varrho_2+\ldots+n_N\varrho_N}{n_N} \leqslant (\varrho_N+\varrho_{N-1}q^{-1}+\varrho_{N-2}q^{-2}+\ldots+\varrho_1 q^{-(N-1)}) \to 0,$$

on voit que les s_N sont uniformément bornées, ou bornées inférieurement. Il suffit même de supposer que $f(x)$ soit inférieurement bornée dans un intervalle de longueur aussi petite que l'on veut.

4° Il résulte de la remarque 1° que si, pour une série lacunaire (1), l'inégalité (2) n'est pas vérifiée, il existe un ensemble Z, partout dense dans $(0, 2\pi)$, en tout point duquel on a $\overline{\lim}\, s_N = +\infty$, $\underline{\lim}\, s_N = -\infty$. On en déduit [8]) qu' étant donné un intervalle arbitraire I et un nombre réel arbitraire s, on peut trouver dans I un point x tel que $\lim s_N(x) = s$. Ceci paraît d'autant plus curieux que, si $\sum \varrho_k^2 = \infty$, la série (1) diverge presque partout.

5° Soit donné un tableau de nombres $\alpha_{p,q}$ $(p, q = 1, 2, \ldots)$ qui vérifient les deux conditions suivantes:

$$1^\circ\ \lim_{q\to\infty} \alpha_{p,q} = 0\ (p = 1, 2, \ldots), \qquad 2^\circ\ \lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{p,q} = 1.$$

Considérons les expressions (moyennes de Toeplitz)

$$\sigma_N(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{N,q}\, s_q(x) \qquad (N = 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

[6]) loc. cit.

[7]) Rappelons qu'avant de définir les moyennes arithmétiques de la série (1) on doit remplacer les termes vacants par des zéros.

[8]) A. Zygmund, On the convergence of lacunary trigonometric series, Fund. Math. 16 (1930) p. 90–107, spéc. p. 103.

s_N ayant la même signification qu'auparavant. Supposons que les séries (13) convergent dans un intervalle I et que, de plus, $\sigma_N(x) = O(1)$ (resp. $\overline{\lim}\, \sigma_N(x) < \infty$) pour $x \subset I$. Alors on peut démontrer que l'inégalité (2) a lieu. La démonstration ne diffère pas essentiellement de celle que nous avons donné plus haut.

§ 2.

Remarque sur l'unicité des fonctions analytiques.

1. Considérons une fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (|z| < 1) \tag{1}$$

et supposons que cette fonction possède presque partout sur la circonférence $|z| = 1$ des valeurs limites $f(e^{i\theta}) = f^*(\theta)$, intégrables L. On peut se demander sous quelles conditions les coefficients c_n de la série (1) sont des coefficients (complexes) de Fourier de $f^*(\theta)$, c'est à dire sous quelles conditions on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

En considérant la fonction

$$f(z) = \exp\frac{1+z}{1-z}, \tag{3}$$

on voit que la formule (2) n'est pas en général vraie. En effet, bien que la fonction $f^*(\theta)$ correspondante, égale à $\exp i\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta$, soit intégrable, la rapidité, aveclaquelle $f(z)$ croît pour $z \to 1$, montre que (2) n'a pas lieu.

Nous démontrerons cependant la proposition suivante:

Théorème. *Soit* $\varphi(x)$ $(x \geqslant 0)$ *une fonction mesurable, bornée dans tout intervalle fini et telle que* $\varphi(x)/x \to \infty$ *avec* x. *Alors si, pour* $r \to 1$, *on a*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\overset{+}{\log}\, |f(re^{i\theta})|)\, d\theta = O(1)\ ^{9)}, \tag{4}$$

et si $f^*(\theta) \subset L$, *les formules* (2) *ont lieu. Pour* $\varphi(x) \equiv x$, *le théorème n'est pas vrai.*

[9]) $\overset{+}{u}$ désigne Max $(u, 0)$.

Ce théorème a été énoncé, sans démonstration, dans un autre travail[10]. En posant $\varphi(x) = e^{\alpha x}$ $(\alpha > 0)$, nous obtenons un cas spécial, mais peut-être le plus intéressant, qui a été démontré indépendamment par M. SMIRNOFF[11].

Dans ce cas, l'inégalité (4) se réduit à

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{\alpha} d\theta = O(1) \tag{5}$$

et le théorème peut être déduit des théorèmes connus de M. F. RIESZ[12].

2. Considérons la fonction (3). On a pour cette fonction

$$\overset{+}{\log} |f(z)| = \log |f(z)| = \Re \frac{1+z}{1-z} > 0 \qquad (|z|<1)$$

et ceci prouve que le théorème cesse d'être vrai pour $\varphi(x) \equiv x$.

Avant de passer à la démonstration de la première partie du théorème, remarquons que nous pouvons supposer que la fonction φ soit convexe, car, pour toute fonction $\varphi(x)$ telle que $\varphi(x)/x \longrightarrow \infty$ avec x, on peut trouver une fonction convexe φ_1, $0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi(x)$, pour laquelle $\varphi(x)/x \longrightarrow \infty$.

La condition (4) entraîne, à plus forte raison, l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})| \, d\theta = O(1), \tag{6}$$

donc, d'après un théorème connu de MM. NEVANLINNA,

$$f(z) = \frac{\xi(z)}{\eta(z)}$$

où $|\xi(z)|<1$, $|\eta(z)|<1$, $\eta(z) \neq 0$ $(|z|<1)$. Soit $\log 1/|\xi(z)| = u_1(r$ $\log 1/|\eta(z)| = u_2(r,\theta)$, $\log |f| = u_2(r,\theta) - u_1(r,\theta) = u(r,\theta)$. C fonction, qui peut admettre la valeur $-\infty$, est subharmonique

Les inégalités (4) et (6) peuvent être écrites dans la forn

$$\int_0^{2\pi} \varphi\{\overset{+}{u}(r,\theta)\} \, d\theta = O(1), \tag{7}$$

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{u}(r,\theta) \, d\theta = O(1). \tag{8}$$

[10]) A. Zygmund, Sur les fonctions conjuguées, Fund. Math. 13 (1929 p. 296, note 2.

[11]) V. Smirnoff, Sur les valeurs limites des fonctions analytiques, C. R 188 (1929) p. 131—133.

[12]) F. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Math Zeitschr. 18 (1922) p. 87—95.

[13]) Pour la définition et les propriétés des fonctions subharmoniques cf F. Riesz, Acta Math. 48 (1926) p. 329—343.

Considérons maintenant une famille de fonctions absolument continues

$$U(r,\theta) = \int_0^{\theta} \overset{+}{u}(r,t) \, dt,$$

dépendant du paramètre r $(0<r<1)$. Toutes ces fonctions sont uniformément absolument continues.

Ceci est une conséquence du théorème général dû à M. W. H. YOUNG[14]: Si les fonctions $g_1(x), g_2(x), \dots$, définies dans un intervalle (α, β), vérifient une condition

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(|g_n(t)|) \, dt \leqslant M \quad (\varphi\text{—convexe}, \ \varphi(x)/x \longrightarrow \infty), \tag{9}$$

alors les fonctions

$$G_n(x) = \int_{\alpha}^{x} g_n(t) \, dt$$

sont uniformément absolument continues. Voici la démonstration de cette proposition. Soit E un ensemble arbitraire de points situé dans (α, β); nous désignerons sa mesure par $|E|$. Nous avons à prouver que, uniformément par rapport à n,

$$\lim_{|E| \to 0} \int_E |g_n(x)| \, dx = 0. \tag{10}$$

Posons

$$\frac{1}{|E|} \int_E |g_n(x)| \, dx = \xi. \tag{11}$$

D'après l'inégalité de JENSEN,

$$\varphi(\xi) \leqslant \frac{1}{|E|} \int_E \varphi(|g_n|) \, dx,$$

$$\frac{\varphi(\xi)}{\xi} \cdot \int_E |g_n(t)| \, dt \leqslant M. \tag{12}$$

Désignons par $A(\varepsilon)$ un nombre tel que $\varphi(x)/x \geqslant M/\varepsilon$ pour $x \geqslant A(\varepsilon)$. Alors, si $\xi \geqslant A(\varepsilon)$, l'inégalité (12) nous donne

$$\int_E |g_n(t)| \, dt \leqslant \varepsilon. \tag{13}$$

Si $\xi \leqslant A(\varepsilon)$, on déduit de (11) que

$$\int_E |g_n(t)| \, dt \leqslant A(\varepsilon) \, . \, |E|. \tag{14}$$

[14]) W. H. Young, On successions with subsequences converging to an integral, Proc. London Math. Soc. 24 (1926) p. 1—20.

Les inégalités (13) et (14) prouvent (10).

3. Posons

$$P(R, r, t) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos t + r^2}.$$

De la définition des fonctions subharmoniques il vient $(0 \leqslant r < R < 1)$

$$\overset{+}{u}(r, \theta) \leqslant \int_0^{2\pi} \overset{+}{u}(R, t)\, P(R, r, \theta - t)\, dt$$

$$(15) \qquad = \int_0^{2\pi} \overset{+}{u}(R, t)\, [P(R, r, \theta - t) - P(1, r, \theta - t)]\, dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} \overset{+}{u}(R, t)\, P(1, r, \theta - t)\, dt = A + B.$$

Le premier membre de cette inégalité ne dépend pas de R. Faisons tendre R vers 1. L'inégalité (8) entraîne $A \to 0$. D'autre part, comme pour $0 < r < 1$ la fonction $P(1, r, \theta - t)$ est une fonction continue de θ, on obtient

$$(16) \qquad \int_0^{2\pi} \overset{+}{u}(R, t)\, P(1, r, \theta - t)\, dt \to \int_0^{2\pi} \overset{+}{u}(1, t)\, P(1, r, \theta - t)\, dt.$$

Nous nous servons ici de la proposition suivante, qui est une légère généralisation d'un théorème bien connu de M. F. Riesz: Si $g_n(x) \to g(x)$ presque partout dans (α, β) et si la condition (9) est remplie, alors

$$\int_\alpha^\beta |g_n(x) - g(x)|\, dx \to 0.$$

Pour la démonstration il suffit de remarquer que

1° la fonction $g(x)$ vérifie aussi l'inégalité (9), donc, en particulier, $g(x)$ est intégrable,

2° la différence $g_n - g$ est petite en dehors d'un ensemble E de mesure aussi petite que l'on veut (théorème de Egoroff). Donc

$$\int_\alpha^\beta |g_n - g|\, dx \leqslant \int_{CE} |g_n - g|\, dx + \int_E |g_n|\, dx + \int_E |g|\, dx.$$

Les intégrales $G_n(x)$ de g_n étant uniformément absolument continues, la deuxième intégrale du second membre tend vers zéro avec $|E|$. De même la troisième intégrale. E fixé, la première intégrale du second membre tend vers 0 avec $1/n$.

Les relations (15) et (16) nous donnent

$$(17) \qquad \overset{+}{u}(r, \theta) \leqslant \int_0^{2\pi} \overset{+}{u}(1, t)\, P(1, r, \theta - t)\, dt.$$

La fonction x^k $(x \geqslant 0, k \geqslant 1)$ étant convexe, nous obtenons, à l'aide de l'inégalité de Jensen.

$$\overset{+}{u}{}^k(r, \theta) \leqslant \int_0^{2\pi} \overset{+}{u}{}^k(1, t)\, P(1, r, \theta - t)\, dt \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{u}{}^k(r, \theta)\, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \overset{+}{u}{}^k(1, \theta)\, d\theta.$$

Divisons cette inégalité par $k!$ En prenant leur somme nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} \exp \overset{+}{u}(r, \theta)\, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \exp \overset{+}{u}(1, \theta)\, d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta = O(1), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Si $f^*(\theta) \subset L^\alpha$ $(\alpha > 0)$, on démontre d'une façon analogue que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\alpha d\theta = O(1).$$

§ 3.

Sur la dérivabilité des séries de Fourier.

1. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Soit $f(\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ une fonction intégrable L et soit*

$$(1) \qquad f(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Supposons que, pour une valeur de θ_0, la fonction

$$(2) \qquad \varphi(\theta) = \frac{f(\theta_0 + \theta) - f(\theta_0 - \theta)}{4 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta} = \varphi_{\theta_0}(\theta),$$

soit intégrable L. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que la série différentiée

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,(b_n \cos n\,\theta_0 - a_n \sin n\,\theta_0)$$

soit sommable $(C, k+1)$ *vers une somme* s, *est que la série de Fourier de* $\varphi(\theta)$ *soit sommable* (C, k) *vers* s *pour* $\theta = 0$ (k *réel, nonnégatif*) [15].

Ce théorème permet de réduire l'étude des séries différentiées à l'étude de certaines séries de Fourier. En particulier, si $f'(\theta_0)$ existe et est fini, la condition nécéssaire et suffisante pour que la série (3) soit sommable $(C, 1)$, est que la série de Fourier de la fonction $\varphi(\theta)$ (continue pour $\theta = 0$) converge pour $\theta = 0$.

2. Nous commençons par démontrer le lemme suivant:

Lemme. Soient données deux suites de nombres $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ telles que $v_n = (n+1)(u_n - u_{n+1})$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Alors, si la série $\sum u_n$ est sommable (C, k) vers une somme s, la série $\sum v_n$ est sommable $(C, k+1)$ vers la même somme. Réciproquement, si $\sum v_n$ est sommable $(C, k+1)$ et si les moyennes arithmétiques d'ordre k de la série $\sum u_n$ sont $o(n)$, la série $\sum u_n$ est sommable $(C, 0)$ (k arbitraire > -1) [16].

Désignons les moyennes arithmétiques (d'ordre α) des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ respectivement par σ_n^α et τ_n^α et posons

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)};\quad \sigma_n^\alpha = U_n^\alpha / A_n^\alpha;\quad \tau_n^\alpha = V_n^\alpha / A_n^\alpha.$$

Alors

$$V_n^{k+1} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{k+1} v_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{k+1} (\nu+1)\, u_\nu - \sum_{\nu=0}^{n+1} A_{n-\nu+1}^{k+1} \nu\, u_\nu$$

$$= (k+2) \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{k+1} u_\nu - \sum_{\nu=0}^{n+1} u_\nu \left[(k+1-\nu)\, A_{n-\nu}^{k+1} + \nu\, A_{n-\nu+1}^{k+1} \right].$$

[15]) Le théorème n'est nouveau que partiellement, car la suffisance de la condition a été démontrée (pour $k = 0, 1, 2 \ldots$) par M. W. H. Young, On the convergence of the derived series of Fourier series, Proc. Lond. Math. Soc. 17 (1918) p. 195—236 et par M. Rajchman, Sur la possibilité de différentier une série de Fourier terme à terme (en polonais), Prace Mat.-Fiz. 28 (1917) p. 213—219.

[16]) Le lemme est dû à MM. Hardy et Littlewood (Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier series, Math. Zeitschr. 19 (1924) p. 67—96). La première partie de ce lemme a été démontrée déjà par M. Rajchman (loc. cit.).

Comme on vérifie facilement, l'expression entre les crochets [] est égale à $(n+1)\, A_{n-\nu+1}^k$ et nous obtenons les relations

$$(4)\qquad \begin{aligned} V_n^{k+1} &= (k+2)\, U_n^{k+1} - (n+1)\, U_{n+1}^k, \\ \tau_n^{k+1} &= (k+2)\, \sigma_n^{k+1} - (k+1)\, \sigma_{n+1}^k \end{aligned}$$

d'où la première partie du lemme résulte immédiatement.

3. En tenant compte de l'égalité $U_{n+1}^k = U_{n+1}^{k+1} - U_n^{k+1}$, on peut écrire la relation (4) sous la forme

$$(n+k+3)\, U_n^{k+1} - (n+1)\, U_{n+1}^{k+1} = V_n^{k+1}.$$

En exprimant U_n^{k+1}, V_n^{k+1} par σ_n^{k+1} et τ_n^{k+1}, nous obtenons que

$$(5)\qquad \frac{\sigma_n^{k+1}}{n+k+2} - \frac{\sigma_{n+1}^{k+1}}{n+k+3} = \frac{\tau_n^{k+1}}{(n+k+2)(n+k+3)}.$$

Supposons (ce que nous pouvons toujours faire) que $\tau_n^{k+1} \longrightarrow 0$. Les égalités (5) nous donnent

$$\frac{\sigma_n^{k+1}}{n+k+2} = C + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (C = \text{const}).$$

Il en résulte que $U_n^{k+1} = (n+k+2)\, A_n^{k+1} . C + o\,(n^{k+1})$, donc, d'après (4),

$$U_n^k = \frac{k+2}{n+1}\, U_n^{k+1} - \frac{V_n^k}{n+1} = C \cdot \frac{(k+2)\,(n+k+2)}{n+1}\, A_n^{k+1} + o\,(n^k).$$

Comme, d'après l'hypothèse, $U_n^k = o\,(n^{k+1})$, on obtient que $C = 0$, $U_n^k = o\,(n^k)$, c. q. f. d.

4. Démonstration du théorème. Posons

$$v_{n-1} = n\,(b_n \cos n\,\theta_0 - a_n \sin n\,\theta_0) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{v_\nu}{\nu+1} = \sum_{\nu=n+1}^{N+1} (b_\nu \cos \nu\,\theta_0 - a_\nu \sin \nu\,\theta_0)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(\theta_0+t) - f(\theta_0-t)}{4 \sin \frac{1}{2} t} \left\{ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t - \cos\left(N + \frac{3}{2}\right) t \right\} dt.$$

La fonction

$$\psi(t) = \frac{f(\theta_0+t) - f(\theta_0-t)}{4 \sin \frac{1}{2} t}$$

étant, par hypothèse, intégrable, on a pour $N \longrightarrow \infty$

$$u_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{v_\nu}{\nu+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(t) \cos n t\, dt + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [f(\theta_0+t) - f(\theta_0 - t)] \frac{1}{4} \sin n t\, dt = u'_n + u''_n.$$

La fonction $\psi(t)$ étant intégrable, on obtient, d'après le critère bien connu de LIPSCHITZ-DINI, que la série $\sum u''_n$ converge et a pour somme 0. Les séries $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ sont donc en même temps sommables ou non sommables (C, k) et, dans le premier cas, leurs sommes sont égales. Les nombres u'_n sont des coefficients de FOURIER de la fonction (paire) $\varphi(t)$ et les sommes partielles de la serie $\sum u'_n$ — donc aussi leurs moyennes (C, k) $(k \geqslant 0)$ — sont $o(n)$. Comme $v_n = (n+1)(u_n - u_{n+1})$, il suffit d'appliquer le lemme.

§ 4.[17])

Sur un théorème de M. Carleman.

1. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le démiplan $\Re z > 0$, continue pour $\Re z \geqslant 0$ et vérifiant l'inégalité $|f(z)| < 1$. Supposons que $|f(\pm ri)| < e^{-\gamma(r)}$ $(0 \leqslant r < \infty)$, où $\gamma(r)$ est une fonction finie et intégrable R dans tout intervalle $(-h, h)$.

En se servant de l'inégalité de POISSON-JENSEN, M. CARLEMAN a démontré[18]) que, si l'intégrale $\int^\infty \gamma(r) r^{-2} dr$ diverge, on a $f(z) \equiv 0$. Nous allons prouver que le résultat de M. CARLEMAN peut être obtenu par un raisonnement tout à fait élémentaire. Il nous sera plus commode de considérer, au lieu du démiplan $\Re z > 0$, le cercle $|\zeta| < 1$.

2. Soit $g(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + \ldots$ une fonction régulière pour $|\zeta| < 1$, continue pour $|\zeta| \leqslant 1$ et ne dépassant pas 1 en valeur absolue. Supposons que $|g(e^{\pm i\theta})| \leqslant e^{-\delta(\theta)}$ $(0 < \theta \leqslant \pi)$, δ étant une fonction nonnégative et intégrable R dans tout intervalle (ε, π). Nous prouverons que, si $\int_0^\pi \delta\, d\theta = \infty$, on a $g(\zeta) \equiv 0$[19]). En effet, soit $\omega = \exp 2\pi i/n$. En appliquant un artifice bien connu, considérons la fonction $g_n(z) = g(z)\, g(z\omega) \ldots g(z\omega^{n-1})$. On a $g_n(0) = a_0^n$. Désignons par m_k le minimum (nonnégatif) de $\delta(\theta)$ dans l'intervalle $(2(k-1)\pi/n, 2k\pi/n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Pour $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/n$, on a $|g_n(e^{i\theta})| \leqslant \exp(-m_1 - m_2 - \ldots - m_n)$ et comme $g_n(e^{i\theta})$ est de période $2\pi/n$, cette dernière inégalité est vérifiée pour $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Donc

$$|a_0^n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant e^{-(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)},$$

$$|a_0| \leqslant e^{-\frac{1}{n}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)},$$

et, en tenant compte que, pour $n \to \infty$, $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)/n \to \infty$, on obtient que $a_0 = 0$. Si $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0$, il suffit de considérer la fonction $g(\zeta)/\zeta^k = a_k + a_{k+1}\zeta + \ldots$ qui vérifie la même inégalité que $g(\zeta)$. Il en résulte que $a_k = 0$ et, par conséquent, $g(\zeta) \equiv 0$.

3. Revenons maintenant à la fonction $f(z)$ dans le démiplan $\Re z > 0$ et posons $z = (1+\zeta)/(1-\zeta)$. Pour $\zeta = e^{i\theta}$ on a $z = i \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta$. La fonction $g(\zeta) = f(z)$ est continue pour $|\zeta| \leqslant 1$ et de plus $|g(e^{\pm i\theta})| \leqslant e^{-\delta(\theta)}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, où $\delta(\theta) = \gamma\left(\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta\right)$. Il suffit de remarquer que

$$\int_0^\pi \delta(\theta)\, \delta\theta = 2 \int_0^\infty \frac{\gamma(r)}{1+r^2}\, dr = \infty.$$

[17]) Ajouté le 23. 3. 31.

[18]) Comptes Rendus, 174 (1922) p. 373. Voir aussi, Ch. J. de la Vallée-Poussin, Quatre leçons sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, Bull. de la Soc. Math. de France, 52 (1924) p. 173.

[19]) Supposons, pour plus de simplicité, que la fonction δ soit continue pour $\theta \neq 0$. Alors, si $\lim\limits_{\theta \to 0} \delta(\theta) = \infty$ et si $\delta(\theta)$ est intégrable dans $(0, \pi)$, il existe une fonction $g(\zeta)$ non nulle, continue pour $|\zeta| \leqslant 1$ et telle que $|g(e^{i\theta})| \leqslant e^{-\delta(\theta)}$ $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi;$ $\delta(-\theta) = \delta(\theta))$. Il suffit de poser $g(\zeta) = e^{-u(\varrho,\theta) - iv(\varrho,\theta)}$, où u est l'intégrale de Poisson de $\delta(\theta)$ et v est conjuguée à u.

(Reçu par la Rédaction, sauf le § 4, le 29. 1. 1931).