Sur le rapport entre les convergences d'une suite de fonctions et de leurs moments avec application à l'inversion des procédés de sommabilité

par

J. KARAMATA (Beograd).

Dans les Comptes-Rendus du premier congrès des mathématiciens des Pays Slaves [1]), j'ai montré comment on peut, en précisant un théorème de M. F. Riesz [2]) sur les suites de fonctionnelles linéaires, en déduire des théorèmes relatifs à l'inversion des procédés de sommabilité, théorèmes que MM. Hardy et Littlewood ont appelés „Tauberian theorems".

La forme que prend le théorème de M. Riesz en vue de cette application est:

Théorème 1. *Soit, pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *une suite de fonctions à variation uniformément bornée, c. à d.*

$$\int_0^1 |d\{\alpha_n(t)\}| = O(1) \qquad (n \to \infty)\,^{3)}$$

1) J. Karamata, Sommabilité et fonctionnelles linéaires, p. 221—228, 1929. — Je profite de cette occasion pour corriger quelques fautes qui se sont introduites par mégard dans cette Note, à savoir: dans le théorème A, p. 222, ligne 2, ce n'est pas seulement la fonction $v(x)$ mais toutes les fonctions $v_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$, qui doivent être non-décroissantes, ainsi que la fonction $v(s,x)$, p. 226, ligne 11, pour tout $s>0$; par conséquent, la condition „$\{a_n\}$ borné — $D(p_n, \lambda_n)$ en module" doit être partout (p. 225, l. 21, p. 226, l. 15, p. 227, l. 1 et 17, p. 228, l. 11.) remplacée par „$\{a_n\}$ borné d'un côté", ainsi que la formule (13) du théorème I, p. 225, est à remplacer par $a_n \geqslant 0$.

2) F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, C. R. 149 (1909) p. 974—977.

3) En général, la relation $b_n = O(a_n)$, $n \to \infty$, où a_n est supposé >0, signifie que $\frac{|b_n|}{a_n}$ reste borné pour tout $n=1,2,3,\ldots$.

et

$$\alpha_n(0) = 0, \text{ pour tout } n = 1,2,3,\ldots;$$

de

$$\int_0^1 t^k\, d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k\, d\{\alpha(t)\} \quad (n \to \infty) \text{ pour tout } k = 0,1,2,\ldots,$$

il résulte que

$$\int_0^x \alpha_n(t)\, dt \to \int_0^x \alpha(t)\, dt \qquad (n \to \infty) \qquad \text{pour tout } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Mais, pour rendre ce théorème susceptible de l'application mentionnée ci-dessus, on est obligé, comme je l'ai fait dans la Note citée [1]), de le préciser d'une certaine manière, en lui donnant la forme suivante:

Théorème 2. *Soit, pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *une suite de fonctions nondécroissantes, c. à d.*

$$(1) \qquad \alpha_n(x+h) \geqslant \alpha_n(x), \text{ pour tout } n = 1,2,3,\ldots \text{ et } h \geqslant 0,$$

et soit

$$\alpha_n(0) = 0, \text{ pour tout } n = 1,2,3,\ldots;$$

des relations

$$\int_0^1 t^k\, d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k\, d\{\alpha(t)\} \quad (n \to \infty) \text{ pour tout } k = 0,1,2,\ldots,$$

il résulte que

$$\alpha_n(x) \to \alpha(x) \qquad (n \to \infty)$$

en tout point de continuité x *de* $\alpha(x)$.

D'autre part, il résulte des considérations de la même Note [1]), que le théorème 2 n'est applicable aux inversions des procédés de sommabilité, que dans le cas où les termes des suites considérées sont des nombres positifs (ou bornés d'un côté). Cette condition provient, du reste, de l'hypothèse (1).

Par conséquent, pour écarter cette restriction (que les termes des suites considérées soient bornés d'un côté), et la remplacer par une condition plus générale, ayant le caractère des conditions de convergence de Landau-Schmidt [4]), on est obligé, comme je

4) E. Landau, Über einen Satz des Herrn Littlewood, Circolo Matematico 35 (1913) p. 6—7.

R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeitschr. 22 (1925) p. 127.

l'ai montré récemment [5]), de se servir, en plus de théorème 2, encore d'autres théorèmes secondaires.

Le but de cette Note est de montrer qu'il est possible de généraliser le théorème 2 de manière que son application directe donne les conditions désirées. Du reste, ce théorème présente par lui-même un certain intérêt. Aussi, avant de l'énoncer sous sa forme la mieux indiquée pour l'application en vue, ésquisserons-nous la démonstration du théorème ci-dessous.

Théorème 3. *Soit, pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes* [6]):

$$\lim_{n\to\infty} \inf \min_{x \leqq t \leqq x+h} \{\alpha_n(t)-\alpha_n(x)\} > -w(h) \longrightarrow 0 \quad \textit{avec } h \textit{ et pour}$$

$$(2) \qquad 0 \leqslant x \leqslant x+h \leqslant 1,$$

et

$$(3) \qquad \alpha_n(0)=0, \quad \textit{pour tout } n=1,2,3,\ldots;$$

des relations

$$(4) \qquad \int_0^1 t^k\, d\{\alpha_n(t)\} \longrightarrow \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\} \quad (n\longrightarrow\infty) \textit{ pour tout } k=0,1,2,\ldots,$$

il résulte que

$$(5) \qquad \alpha_n(x) \longrightarrow \alpha(x) \qquad (n\longrightarrow\infty)$$

en tout point de continuité x *de* $\alpha(x)$.

En effet, en considérant la fonction

$$(6) \qquad \varphi(x,t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } 0<t<x \\ 0 \text{ pour } x<t<1, \end{cases}$$

on peut trouver deux suites de polynomes $P_k(t)$ et $p_k(t)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ tels que (voir la figure)

$$P_k(0)=1,\ P_k(1)=0, \text{ pour tout } k=1,2,3,\ldots,$$

$P_k(t)$ croît pour $0<t<x$, décroît pour $x<t<1$, pour tout $k=1,2,3,\ldots$,

$P_k(x)-1 \longrightarrow 0$, $P_k(x+h)\longrightarrow 0$, pour tout $h>0$ lorsque $k\longrightarrow\infty$,

et

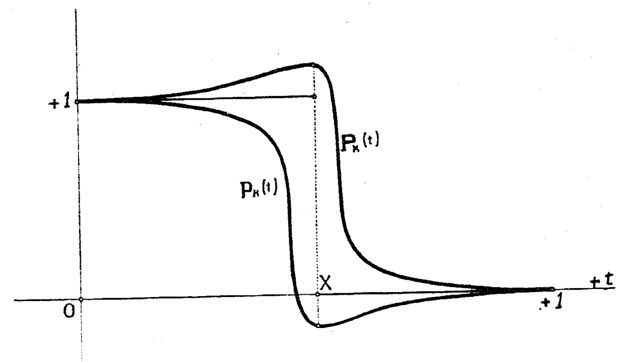
$$p_k(0)=1,\ p_k(1)=0, \text{ pour tout } k=1,2,3,\ldots,$$

[5]) J. Karamata, Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen, Journal f. d. reine u. angew. Math. 164 (1931) p 33—38.

[6]) Nous pouvons les supposer intégrables au sens de Riemann.

$p_k(t)$ décroît pour $0<t<x$, et croît pour $x<t<1$, pour tout $k=1,2,3,\ldots$,

$1-p_k(x-h)\longrightarrow 0$, pour tout $h>0$, $p_k(x)\longrightarrow 0$ lorsque $k\longrightarrow\infty$.



Prenons les polynomes $P_k(t)$ et partageons les intervalles $(0,x)$ et $(x,1)$ respectivement par les points x'_ν, $\nu=0,1,2,\ldots p$, $x'_0=0$, $x'_p=x$, et x_ν, $\nu=0,1,2,\ldots q$, $x_0=x$, $x_q=1$, en sous-intervalles de longueur $\leqslant h$; on aura alors:

$$\int_0^1 P_k(t)\, d\{\alpha_n(t)\} - \alpha_n(x) = \int_0^x \{P_k(t)-1\}\, d\{\alpha_n(t)\} + \int_x^1 P_k(t)\, d\{\alpha_n(t)\}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} \int_{x'_{\nu-1}}^{x'_\nu} \{P_k(t)-1\}\, d\{\alpha_n(t)\} + \sum_{\nu=1}^{q} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P_k(t)\, d\{\alpha_n(t)\}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} \{P_k(x'_\nu)-1\}\, \{\alpha_n(x'_\nu)-\alpha_n(\zeta'_\nu)\} + \sum_{\nu=1}^{q} P_k(x_{\nu-1})\{\alpha_n(\zeta_\nu)-\alpha_n(x_{\nu-1}$$

où

$$x'_{\nu-1} \leqslant \zeta'_\nu \leqslant x'_\nu \text{ et } x_{\nu-1} \leqslant \zeta_\nu \leqslant x_\nu.$$

En y faisant $n\longrightarrow\infty$, il résulte, d'après (2) et (4), que

$$(7) \qquad \int_0^1 P_k(t)\, d\{\alpha(t)\} - \lim_{n\to\infty} \sup\ \alpha_n(x) \geqslant -w(h) \Big\{ \sum_{\nu=1}^{p} [P_k(x'_\nu)-1]$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{q} P_k(x_{\nu-1}) \Big\}.$$

Puis, en faisant $k \to \infty$, l'on obtient, d'après la construction des polynomes $P_k(t)$ et en supposant que x est un point de continuité de $\alpha(x)$,

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leqslant \alpha(x) + w(h) \to \alpha(x) \text{ lorsque } h \to 0.$$

Des considération semblables, appliquées aux polynomes $p(t)$, donnent

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_n(x) \geqslant \alpha(x)$$

d'où il résulte l'affirmation (5).

Ce théorème, contenant le théorème 2 comme cas particulier, appliqué aux inversions des procédés de sommabilité, donnerait déjà des résultats plus généraux. Mais, il serait désirable de l'élargir d'avantage. En effet, des conditions (2), (3) et (4) pour $k=0$, l'on déduit facilement que $\alpha_n(x) = O(1)$, $n \to \infty$, pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$; or, cette condition dans l'application aux procédés de sommabilité suppose que les nombres des suites considérées soient de même $= O(1)$, ce qui est une condition superflue.

Ceci résulte de ce que le nombre h de la condition (2) est indépendant de x; on l'évitera donc en choisissant convenablement la manière dont h doit dépendre de x. Ce que l'on obtient, en effet, en remplaçant dans le théorème 3 la condition (2) par la suivante:

(8) $$\liminf_{n\to\infty} \min_{x<t\leqq x^\lambda} \{\alpha_n(t) - \alpha_n(x)\} > -w(\lambda) \to 0 \text{ lorsque } 1 > \lambda \to 1, \quad \text{pour tout } 0 < x < 1.$$

Pour le faire voir, on se sert encore des polynomes $p_k(t)$ et $P_k(x)$. Mais, dans ce cas, l'inégalité (7) prend la forme

$$\int_0^1 P_k(t)\, d\{\alpha(t)\} - \limsup \alpha_n(x) > -w(\lambda)\left[\sum_{\nu=-\infty}^{0} \{P_k(x^{\lambda^\nu}) - 1\} + \sum_{\nu=0}^{\infty} P_k(x^{\lambda^\nu})\right] \qquad (\lambda < 1),$$

les points x_ν' et x_ν y étant remplacés par $x^{\lambda^\nu}, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Les deux séries du second membre de cette inégalité sont bien convergentes, car, du fait que $P_k(0) = 1$ et $P_k(1) = 0$, il s'en suit que l'on peut poser

$$P_k(t) - 1 = t P_k^{(1)}(t) \text{ et } P_k(t) = (1-t) P_k^{(2)}(t),$$

la première relation montrant la convergence de la première et la seconde la convergence de la seconde série. D'autre part, du fait que l'on peut choisir les polynomes $P_k(t)$ de manière que les expressions $\frac{P_k(t)-1}{t}$ et $\frac{P_k(t)}{1-t}$ restent uniformément bornées par rapport à t, k tendant vers l'infini, il s'en suit que le second membre de l'inégalité précédente tend vers $-w(\lambda)$, lorsque $k \to \infty$. On peut donc en tirer les mêmes conclusions comme pour le théorème 3 et en déduire le théorème suivant:

Théorème 4. *Soit, pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes:*

(9) $$\alpha_n(0) = 0, \text{ pour tout } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{x<t\leqq x^\lambda} \{\alpha_n(t) - \alpha_n(x)\} > -w(\lambda) \to 0 \text{ lorsque } 1 > \lambda \to 1, \text{ pour tout } 0 < x < 1;$$

des relations

(10) $$\int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\} \; (n \to \infty) \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

il résulte que

$$\alpha_n(x) \to \alpha(x),\ n \to \infty, \text{ en tout point de continuité } x \text{ de } \alpha(x).$$

Ce théorème semble répondre à toutes les conditions exigées, mais, pour que son application à l'inversion des procédés de sommabilité soit plus immédiate, il resterait encore à y apporter quelques changements.

D'abord, nous remplacerons les conditions (9) par les suivantes: $\alpha_n(1) = 0$, pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots$, d'ailleurs équivalentes. Puis, nous referons la démonstration des théorèmes précédents, mais à la place de la fonction $\varphi(x, t)$, donnée par la relation (6), nous considérerons la fonction $1 = \varphi(x, t)$. Ceci permettera de nous affranchir de la condition (10) pour $k = 0$, et l'on obtient ainsi, en definitif, le théorème suivant:

Théorème 5. *Soit* $\alpha_n(x)$, *pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes:*

(11) $$\alpha_n(1) = 0, \text{ pour tout } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

(12) $$\liminf_{n\to\infty} \min_{x<t\leqq x^\lambda} \{\alpha_n(t) - \alpha_n(x)\} > -w(\lambda) \to 0 \text{ lorsque } 1 > \lambda \to 1, \quad \text{pour } 0 < x < 1,$$

et

(13) $\int_0^1 t^k d\{\alpha_n(t)\} \to \int_0^1 t^k d\{\alpha(t)\}$ $(n\to\infty)$ *pour tout* $k=1,2,\ldots,$

alors

(14) $\alpha_n(x)\to\alpha(x)$ $(n\to\infty)$ *en tout point de continuité* x *de* $\alpha(x)$.

Passons à l'application de ce théorème aux inversions des procédés de sommabilité. Nous ne considérerons ici qu'un procédé de sommabilité dont nous nous sommes déjà occupé à plusieurs reprises et qui contient, du reste, comme cas particulier le procédé étudié dans la Note citée sous [1]). D'autre part, dans la Note citée sous [4]), nous en avons donné l'inversion sous une forme très générale, à savoir:

Théorème 6. *Soient, pour* $0\leqslant x\leqslant\infty$, $\varphi(x)$ *une fonction de la forme*

$$\varphi(x)=x^{\sigma}L(x) \qquad (\sigma\geqslant 0)$$

où $L(x)$ *est une fonction continue, positive et satisfaisant à la relation*

$$L(ux)/L(x)\to 1 \quad (x\to\infty) \quad \textit{pour tout } u>0,$$

et $A(x)$, $A(0)=0$, *une fonction à variation bornée en tout intervalle fini et telle que l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-s\zeta}d\{A(\zeta)\}$ *ait un sens pour tout* $s>0$; *de la relation*

$$\int_0^\infty e^{-s\zeta}d\{A(\zeta)\}\sim\varphi\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (s\to 0) \tag{15}$$

il résulte alors

$$A(x)\sim\frac{\varphi(x)}{\Gamma(\sigma+1)} \qquad (x\to\infty) \tag{16}$$

toutes les fois que

(17) $\liminf_{x\to\infty}\ \min_{x<t\leqq\mu x}\dfrac{A(t)-A(x)}{\varphi(x)}>-w(\mu)\to 0$ *lorsque* $1<\mu\to 1$.

Ce théorème contient comme cas particulier la plupart des „Tauberian theorems". La démonstration que nous en avons donnée, étant assez longue, il s'agira ici de montrer que ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème 5.

Il suffit, pour cela, de remarquer que, dans ce cas, l'on a

$$\alpha_n(t)=A(-n\lg t)/\varphi(n) \quad \text{et} \quad \alpha(t)=(-\lg t)^{\sigma}/\Gamma(\sigma+1),$$

car, en remplaçant dans (15) s par sk, et en y faisant les substitutions $e^{-s\zeta}=t$ et $1/s=x$, on en tire que

$$\int_0^1 t^k d\left\{\frac{A(-x\lg t)}{\varphi(x)}\right\}\to\frac{1}{k^{\sigma}}=\int_0^1 t^k d\left\{\frac{(-\lg t)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}\right\} \qquad (x\to\infty)$$

et pour tout

$$k=1,2,\ldots,$$

ce qui montre en même temps que les relations (13) du théorème 5 sont remplies.

On s'assure, d'autre part, que la condition (12) se transforme, pour le cas considéré, en (17), et que $A(0)=0$ entraîne les relations (11). On en tire donc, d'après (14), que

$$\frac{A(-x\lg t)}{\varphi(x)}\to\frac{(-\lg t)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)} \quad (x\to\infty,\ u>0), \text{ pour tout } 0<t<1,$$

c. à. d., en y posant $u=-\lg t$,

$$A(ux)\sim\frac{\varphi(x)}{\Gamma(\sigma+1)}u^{\sigma} \quad (x\to\infty,\ u>0).$$

Ceci donne pour $u=1$ la relation (16), comme il fallait montrer.

Ce exemple suffit déjà pour montrer que le théorème 5 est la source commune de bien des théorèmes d'inversion relatifs aux procédés de sommabilité.

En appliquant ce théorème aux procédés de sommabilité de forme plus générale, on en tire d'autres conclusions intéressantes, ce qui fera l'objet d'un autre travail.

(Reçu par la Rédaction le 22. 1. 1931).

Remarque apportée le 10. 4. 1931 pendant la correcture: M. F. Riesz, par l'intermédiaire de M. Vilmos Schmidt, a eu l'amabilité de me communiquer une construction fort simple des polynomes $P_k(t)$ en question. Si l'on veut, par exemple, approximer la fonction $1-\varphi(x,1)$ par de tels polynomes, il suffit d'abord de l'approximer par une fonction $f(t)$, différentiable, $f(0)=0$, croissante de 0 à x, decroissante de x à $1, f(1)=1$, et ayant une dérivée seconde au point $t=x$. En prenant alors un polynome $p(t)$ tel que

$$\left|\frac{f'(t)}{x-t}-p(t)\right|<\varepsilon, \text{ pour tout } 0\leqslant t\leqslant 1,$$

on aura

$$P(t)=p(t)+\varepsilon\geqslant 0$$

et

$$|f'(t)-(x-t)P(t)|\leqslant 2\varepsilon|x-t|\leqslant 2\varepsilon, \text{ pour tout } 0\leqslant t\leqslant 1,$$

de sorte que le polynome

$$\int_0^t (x-u)P(u)\,du,$$

multiplié par une constante convenable, fournit le polynome demandé.

Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances

par

A. ZYGMUND (Wilno).

(Les quatre §§ qui constituent cette Note peuvent être lus séparément).

§ 1.

Sur un théorème de Fatou.

1. Considérons une série trigonométrique lacunaire

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos n_k x+b_k\sin n_k x) \tag{1}$$

où les nombres naturels $n_1<n_2<\ldots$ vérifient une inégalité $n_{k+1}/n_k>q>1$ $(k=1,2,\ldots)$ et supposons d'abord que q soit très grand. Supposons aussi que la série en question converge partout dans $(-\infty,+\infty)$. Alors il est facile de prouver que la série (1) converge *absolument*, c'est à dire que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)<\infty. \tag{2}$$

A cet effet soit $a_k\cos n_k x+b_k\sin n_k x=\varrho_k\sin(n_k x+x_k)$ $(\varrho_k>0)$ et considérons les courbes $y=\varrho_k\cos(n_k x+x_k)$ pour $k=1,2,\ldots$. Designons par I_1 un des intervalles dans lesquels $\cos(n_1 x+x_1)\geqslant 1/2$. Comme le quotient n_2/n_1 est grand, il existe un intervalle I_2, faisant partie de I_1, et tel que dans I_2 on ait $\cos(n_2 x+x_2)\geqslant 1/2$. En procédant de cette façon, on obtient une suite d'intervalles $I_1\supset I_2\supset\ldots\supset I_k\supset\ldots$ telle que, dans I_k, on a $\cos(n_k x+x_k)\geqslant 1/2$. Soit x^* le point commun à tous ces intervalles. De la convergence de la série