Bemerkungen über belastete Integralgleichungen

von

LEON LICHTENSTEIN (in Leipzig).

Manche Probleme der mathematischen Physik führen auf Integralgleichungen, bei denen die Integration sich nicht nur über das eigentliche der Betrachtung zugrunde liegende Gebiet, sondern darüber hinaus auch noch über seine Berandung oder sonstige ausgezeichnete Flächen oder Linien erstreckt. Handelt es sich etwa um ein zweidimensionales Gebiet, so treten auf der linken Seite der Gleichung neben Doppelintegralen auch noch einfache Integrale auf.

Es sei etwa T ein von einer stetig gekrümmten Kurve S begrenztes Gebiet, und es möge S_0 einen stetig gekrümmten Querschnitt bezeichnen, der T in die beiden Teilgebiete T_1 und T_2 zerlegt. Es seien weiter a und b zwei sowohl im T_1 und auf seinem Rande, als auch in T_2 mit Einschluß des Randes nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktionen, die auf S_0 entsprechend a_1, b_1 und a_2, b_2 zu Randwerten haben, $(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2 \neq 0$. Es seien schließlich c und f beliebige in $T+S$ stetige, in T der Hölderschen Bedingung genügende Funktionen. Betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f$$

und suchen diejenige in T nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Lösung $u(x,y)$ zu bestimmen, die in T_1 und T_2 stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat und auf S verschwindet.

Es sei $G(\xi,\eta;x,y)$ die zu T gehörige, auf S verschwindende Greensche Funktion der Potentialtheorie. Nach bekannten

Sätzen folgt aus (1) für alle (ξ,η) in T

$$\text{(2)} \quad u(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_T G(\xi,\eta;x,y)\Big[-f(x,y)+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)\,u(x,y)\Big]\,dx\,dy,$$

und nach einer teilweisen Integration

$$\text{(3)} \quad u(\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\int_T\Big\{\frac{\partial}{\partial x}[a(x,y)\,G(\xi,\eta;x,y)]+\frac{\partial}{\partial y}[b(x,y)\,G(\xi,\eta;x,y)] - c(x,y)\Big\}u(x,y)\,dx\,dy-\frac{1}{2\pi}\int_{S_0}\Big[(a_2-a_1)\frac{dy}{ds}-(b_2-b_1)\frac{dx}{ds}\Big] \times G(\xi,\eta;x,y)\,u(x,y)\,ds-\frac{1}{2\pi}\int_T G(\xi,\eta;x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy.$$

Bei der Integration längs S_0 bleibt hierbei T_1 linker Hand liegen [1]).

Die Beziehung (3) ist eine Integralgleichung von der eingangs genannten Form. Weitere Beispiele bietet die Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender nichthomogener Flüssigkeiten, insbesondere die Theorie der Gestalt der Erde [2]).

Es sei, wie vorhin, T ein von einer stetig gekrümmten Kurve S begrenztes endliches Gebiet in der Ebene der Variablen x, y. Es sei $\overset{1}{K}(\tau,\tau')$ eine für alle τ und τ' in $T+S$ erklärte stetige Funktion, und es möge $\overset{2}{K}(\tau,\sigma')$ eine für alle τ in $T+S$ und alle σ' auf S erklärte stetige Funktion, $f(\tau)$ eine beliebige in $T+S$ stetige Funktion bezeichnen. Die Integralgleichung

$$\text{(4)} \qquad \varphi(\tau)+\lambda\int_T \overset{1}{K}(\tau,\tau')\,\varphi(\tau')\,d\tau'+\lambda\int_S \overset{2}{K}(\tau,\sigma')\,\varphi(\sigma')\,d\sigma'=f(\tau),$$

eine „belastete Integralgleichung“ in der Bezeichnungsweise von A. Kneser [3]), läßt sich, wenn die Integralgleichung

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, II, Journal für Mathematik 143 (1913) p. 51—105, insbesondere p. 55.

[2]) Vgl. meine demnächst erscheinende Arbeit: Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Dritte Abhandlung. Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der. Erde.

[3]) Vgl. A. Kneser, Belastete Integralgleichungen, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 37 (1914) p. 169—197. Dort wird den Betrachtungen der eindimensionale Fall zugrunde gelegt und dementsprechend Gleichungen von

$$\varphi(\tau) + \lambda \int_T \overset{1}{K}(\tau, \tau')\, \varphi(\tau')\, d\tau' = 0 \tag{5}$$

keine Nullösung hat, wie man leicht sieht, ohne weiteres auf eine gewöhnliche Integralgleichung zurückführen. Ist nämlich $\overset{1}{L}(\tau, \tau')$ der zu $\lambda \overset{1}{K}(\tau, \tau')$ gehörige lösende Kern, so folgt aus (4)

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) = f(\tau) - \lambda \int_S \overset{2}{K}(\tau, \sigma')\, \varphi(\sigma')\, d\sigma' - \int_T \overset{1}{L}(\tau, \tau')\, f(\tau')\, d\tau' \\ + \lambda \int_T \int_S \overset{1}{L}(\tau, \tau')\, \overset{2}{K}(\tau', \sigma')\, \varphi(\sigma')\, d\tau'\, d\sigma',\end{aligned} \tag{6}$$

mithin für $\tau \to \sigma$ auf S

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma) = f(\sigma) - \lambda \int_S \overset{2}{K}(\sigma, \sigma')\, \varphi(\sigma')\, d\sigma' - \int_T \overset{1}{L}(\sigma, \tau')\, f(\tau')\, d\tau' \\ + \lambda \int_T \int_S \overset{1}{L}(\sigma, \tau')\, \overset{2}{K}(\tau', \sigma')\, \varphi(\sigma')\, d\tau'\, d\sigma',\end{aligned} \tag{7}$$

und dies ist eine FREDHOLMsche Integralgleichung im üblichen Sinne.

Ist aus (7) $\varphi(\sigma)$ ermittelt, so liefert (6) $\varphi(\tau)$ für alle τ in $T + S$. Es ist leicht zu sehen, daß, wie verlangt werden muß, auf S die beiden Bestimmungen der gesuchten Lösung denselben Wert ergeben.

Nach einer Bemerkung von A. KNESER[4]) gelten bei einer belasteten Integralgleichung bei geeigneter Schreibweise die klassischen FREDHOLMschen Auflösungsformeln. Wir werden dies im Folgenden an Hand der Integralgleichung (4) zeigen. Unsere Ausführungen, deren Ergebnisse kaum etwas wesentlich neues enthalten, sind hauptsächlich darum zu Papier gebracht worden, um für die eingangs erwähnten Anwendungen auf die Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten eine sichere Grundlage zu schaffen.

---

der Form

$$\varphi(s) + \lambda \int_a^b \overset{1}{K}(s, t)\, \varphi(t)\, dt + \lambda \sum_{k=1}^{m} \overset{2}{K}(s, t_k)\, \varphi(t_k) = f(s) \quad (a \leqq t_1, \ldots, t_m \leqq b)$$

betrachtet. Kneser nimmt speziell $\overset{2}{K}(s, t) = p(t)\, \overset{1}{K}(s, t)$, $p > 0$ an.

[4]) Vgl. loc. cit. [3]) p. 193. A. a. O. wird p. 191 auf einen Hinweis von Herrn E. Schmidt Bezug genommen.

§ 1.

Es sei $h > 0$ eine hinreichend kleine Zahl, und es möge S_h die zu S im Abstande h parallele Kurve in T bezeichnen. Das von S_h begrenzte, ganz im Innern von T gelegene Gebiet heiße T_h. Wir setzen

$$K_h(\tau, \tau') = \begin{cases} \overset{1}{K}(\tau, \tau') \text{ in } T_h, \\ \overset{1}{K}(\tau, \tau') + \dfrac{1}{h} \overset{2}{K}(\tau, \sigma') \text{ in } T - T_h, \end{cases} \tag{8}$$

unter σ' der Fußpunkt des von τ' auf S gefällten Lotes verstanden, und betrachten die Integralgleichung

$$\varphi_h(\tau) + \lambda \int_T K_h(\tau, \tau')\, \varphi_h(\tau')\, d\tau' = f(\tau). \tag{9}$$

Augenscheinlich gilt, wenn $\chi(\tau)$ irgendeine in $T + S$ erklärte stetige Funktion bezeichnet,

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \int_T K_h(\tau, \tau')\, \chi(\tau')\, d\tau' = \int_T \overset{1}{K}(\tau, \tau')\, \chi(\tau')\, d\tau' \\ + \int_S \overset{2}{K}(\tau, \sigma')\, \chi(\sigma')\, d\sigma',\end{aligned} \tag{10}$$

und zwar für alle τ in $T + S$ gleichmäßig. Es ist darum zu vermuten, daß die Lösung der Integralgleichung (9) für $h \to 0$ diejenige der belasteten Integralgleichung (4) liefern dürfte.

Es sei $H_h(\tau, \tau'; \lambda)$ der zu dem Kerne $K_h(\tau, \tau')$ gehörige FREDHOLMsche Quotient

$$H_h(\tau, \tau'; \lambda) = \frac{D_h(\tau, \tau'; \lambda)}{D_h(\lambda)} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} A_m^{(h)}(\tau, \tau')}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} A_{m-1}^{(h)}}, \tag{11}$$

$$A_m^{(h)}(\tau, \tau') = \int_T \cdots \int_T \begin{vmatrix} K_h(\tau, \tau'), & K_h(\tau_1, \tau'), & \ldots, & K_h(\tau_m, \tau') \\ K_h(\tau, \tau_1), & K_h(\tau_1, \tau_1), & \ldots, & K_h(\tau_m, \tau_1) \\ \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\ K_h(\tau, \tau_m), & K_h(\tau_1, \tau_m), & \ldots, & K_h(\tau_m, \tau_m) \end{vmatrix} d\tau_1 \ldots d\tau_m, \tag{12}$$

$$A_m^{(h)} = \int_T A_m^{(h)}(\tau_0, \tau_0)\, d\tau_0.$$

Nach (8) kann $K_h(\tau, \tau')$ als Summe der beiden Kerne

$$(13)\quad K_{h1}(\tau,\tau') = \overset{1}{K}(\tau,\tau') \text{ und } K_{h2}(\tau,\tau') = \begin{cases} 0 & \text{in } T_h, \\ \frac{1}{h}\overset{2}{K}(\tau,\sigma') & \text{in } T - T_h \end{cases}$$

aufgefaßt werden [5]. Wir können darum auch schreiben

$$(14)\quad A_m^{(h)}(\tau,\tau') = \overset{1}{A}{}_m^{(h)}(\tau,\tau') + \frac{1}{h}\overset{2}{A}{}_m^{(h)}(\tau,\tau')$$

mit

$$(15)\quad \overset{1}{A}{}_m^{(h)}(\tau,\tau') = \int_T \cdots \int_T \begin{vmatrix} K_{h1}(\tau,\tau'), & K_{h1}(\tau_1,\tau'), \ldots, & K_{h1}(\tau_m,\tau') \\ K_h(\tau,\tau_1), & K_h(\tau_1,\tau_1), \ldots, & K_h(\tau_m,\tau_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K_h(\tau,\tau_m), & K_h(\tau_1,\tau_m), \ldots, & K_h(\tau_m,\tau_m) \end{vmatrix} d\tau_1 \ldots d\tau_m,$$

$$(16)\quad \overset{2}{A}{}_m^{(h)}(\tau,\tau') = h\int_T \cdots \int_T \begin{vmatrix} K_{h2}(\tau,\tau'), & K_{h2}(\tau_1,\tau'), \ldots, & K_{h2}(\tau_m,\tau') \\ K_h(\tau,\tau_1), & K_h(\tau_1,\tau_1), \ldots, & K_h(\tau_m,\tau_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K_h(\tau,\tau_m), & K_h(\tau_1,\tau_m), \ldots, & K_h(\tau_m,\tau_m) \end{vmatrix} d\tau_1 \ldots d\tau_m.$$

Die m-fachen Integrale (15) und (16) zerfallen in 2^m Summanden, indem in einer Anzahl Zeilen K_h durch K_{h1}, in dem Rest durch K_{h2} ersetzt wird. Es sei

$$(17)\quad \operatorname{Max}\{|\overset{1}{K}(\tau,\tau')|, |\overset{2}{K}(\tau,\sigma')|\} = M.$$

Betrachten wir denjenigen der 2^m Bestandteile etwa von $\overset{1}{A}{}_m^{(h)}(\tau,\tau')$, in dem K_{h1}, sagen wir, m_1-mal, K_{h2} dagegen $m_2 = m - m_1$-mal vertreten ist. Dem HADAMARDschen Determinantensatze gemäß ist der absolute Betrag der zu integrierenden Funktion

$$\leqslant m^{\frac{m}{2}} M^m \frac{1}{h^{m_2}} \text{ [6]}.$$

Der betrachtete Term ist m_1-mal über T, m_2-mal über $T - T_h$ zu integrieren. Der Inhalt des m-dimensionalen Gebietes hat den Wert

$$\Theta^{m_1} \varDelta^{m_2} h^{m_2} (1 + \delta(h))^{m_2},$$

[5] Auch jetzt bezeichnet σ' den Fußpunkt des von τ' auf S gefällten Lotes.

[6] Man beachte, daß in m_2 Spalten $1/h$ als gemeinsamer Faktor auftritt. Nach Ausklammern dieses Faktors erhält man für den Betrag der übrig bleibenden Determinante die Schranke $m^{\frac{m}{2}} M^m$.

unter Θ den Flächeninhalt von T, unter $\varDelta$ die Länge von S, unter $\delta(h)$ eine mit h zugleich verschwindende Größe verstanden. Das Ergebnis der Integration ist also absolut

$$(18)\quad \leqslant m^{\frac{m}{2}} M^m \frac{1}{h^{m_2}} \Theta^{m_1} \varDelta^{m_2} h^{m_2} (1 + \delta(h))^{m_2}$$

$$\leqslant m^{\frac{m}{2}} M^m \Theta^{m_1} \varDelta^{m_2} (1 + \delta(h))^{m_2}.$$

Es sei h_0 so klein gewählt, daß für $h \leqslant h_0$ gewiß $|\delta(h)| < 1$ wird. Wird zur Vereinfachung

$$(19)\quad \operatorname{Max}\{\Theta, \varDelta\} = \Theta_*$$

gesetzt, so kann die Schranke (18) durch

$$2^m m^{\frac{m}{2}} M^m \Theta_*^m$$

ersetzt werden. Da $\overset{1}{A}{}_m^{(h)}(\tau,\tau')$ in 2^m Summanden der soeben betrachteten Art zerfällt, so finden wir, alles in allem,

$$(20)\quad |\overset{1}{A}{}_m^{(h)}(\tau,\tau')| \leqslant 2^{2m} m^{\frac{m}{2}} M^m \Theta_*^m.$$

Ebenso ist

$$(21)\quad |\overset{2}{A}{}_m^{(h)}(\tau,\tau')| \leqslant 2^{2m} m^{\frac{m}{2}} M^m \Theta_*^m.$$

Der Zerlegung (14) entsprechend läßt sich $D_h(\tau,\tau';\lambda)$ in der Form

$$(22)\quad D_h(\tau,\tau';\lambda) = \overset{1}{D}_h(\tau,\tau';\lambda) + \frac{1}{h}\overset{2}{D}_h(\tau,\tau';\lambda)$$

darstellen. Augenscheinlich konvergieren die beiden Reihen $\overset{1}{D}(\tau,\tau';\lambda)$ und $\overset{2}{D}(\tau,\tau';\lambda)$ für alle $h \leqslant h_0$ und alle λ gleichmäßig. Für $h \to 0$ geht, wie man leicht sieht, $\overset{1}{D}_h(\tau,\tau';\lambda)$ für alle reellen oder komplexen λ mit $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ (λ_0 beliebig) gleichmäßig gegen den Ausdruck

$$(23)\quad \overset{1}{D}(\tau,\tau';\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \overset{1}{A}_m(\tau,\tau'),$$

$$(24)\quad \overset{1}{A}_m(\tau,\tau') = \int_{T+S} \cdots \int_{T+S} \begin{vmatrix} \overset{1}{K}(\tau,\tau'), & \overset{1}{K}(\tau_1,\tau'), \ldots, & \overset{1}{K}(\tau_m,\tau') \\ \boldsymbol{K}(\tau,\tau_1), & \boldsymbol{K}(\tau_1,\tau_1), \ldots, & \boldsymbol{K}(\tau_m,\tau_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \boldsymbol{K}(\tau,\tau_m), & \boldsymbol{K}(\tau_1,\tau_m), \ldots, & \boldsymbol{K}(\tau_m,\tau_m) \end{vmatrix} d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_m,$$

in dem $\boldsymbol{K}(\tau,\tau_1)$ und $\boldsymbol{d\tau}$ folgende Bedeutung haben. Es ist

(25) $$\boldsymbol{K}(\tau,\tau_1)=\begin{cases}\overset{1}{K}(\tau,\tau_1) \text{ für } \tau_1 \text{ in } T,\\ \overset{2}{K}(\tau,\sigma_2)\text{ für } \tau_1=\sigma_1 \text{ auf } S,\end{cases}\qquad (\tau \text{ in } T+S)$$

$$\boldsymbol{d\tau}=d\tau \text{ in } T,\ =d\sigma \text{ auf } S.$$

Der Integralausdruck $\overset{1}{A}_m(\tau,\tau')$ zerfällt in 2^m Summanden der vorhin betrachteten Zerfällung des Ausdruckes $\overset{1}{A}{}^{(h)}_m$ entsprechend. Die Integration erstreckt sich bald über T, bald über S. So ist beispielweise

$$\overset{1}{A}_0(\tau,\tau')=\overset{1}{K}(\tau,\tau'),$$

(26) $$\overset{1}{A}_1(\tau,\tau')=\int_{T+S}\begin{vmatrix}\overset{1}{K}(\tau,\tau'), & \overset{1}{K}(\tau_1,\tau')\\ \boldsymbol{K}(\tau,\tau_1), & \boldsymbol{K}(\tau_1,\tau_1)\end{vmatrix}\boldsymbol{d\tau}_1$$

$$=\int_T \begin{vmatrix}\overset{1}{K}(\tau,\tau'), & \overset{1}{K}(\tau_1,\tau')\\ \overset{1}{K}(\tau,\tau_1), & K(\tau_1,\tau_1)\end{vmatrix} d\tau_1+\int_S\begin{vmatrix}\overset{1}{K}(\tau,\tau'), & \overset{1}{K}(\sigma_1,\tau')\\ \overset{2}{K}(\tau,\sigma_1), & \overset{2}{K}(\sigma_1,\sigma_1)\end{vmatrix}d\sigma_1;$$

$\overset{1}{D}(\tau,\tau';\lambda)$ ist eine ganze transzendente Funktion von λ.

Ganz analog geht $\overset{2}{D}(\tau,\sigma';\lambda)$ für $h\to 0$, wie vorhin, für alle λ mit $|\lambda|\leqslant\lambda_0$ gleichmäßig gegen die ganze transzendente Funktion

$$\overset{2}{D}(\tau,\sigma';\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\overset{2}{A}_m(\tau,\sigma'),$$

(27) $$\overset{2}{A}_m(\tau,\sigma')=\int_{T+S}\cdots\int_{T+S}\begin{vmatrix} \overset{2}{K}(\tau,\sigma'), & \overset{2}{K}(\tau_1,\sigma'),\ldots, & \overset{2}{K}(\tau_m,\sigma')\\ \boldsymbol{K}(\tau,\tau_1), & \boldsymbol{K}(\tau_1,\tau_1),\ldots, & \boldsymbol{K}(\tau_m,\tau_1)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \boldsymbol{K}(\tau,\tau_m), & \boldsymbol{K}(\tau_1,\tau_m),\ldots, & \boldsymbol{K}(\tau_m,\tau_m)\end{vmatrix}\boldsymbol{d\tau}_1\ldots\boldsymbol{d\tau}_m.$$

Auch $\overset{2}{A}_m(\tau,\sigma')$ [7] zerfällt in 2^m Summandem, und es ist beispielweise

$$A_0\ (\tau,\sigma')=\overset{2}{K}(\tau,\sigma'),$$

(28) $$\overset{2}{A}_1(\tau,\sigma')=\int_{T+S}\begin{vmatrix}\overset{2}{K}(\tau,\sigma'), & \overset{2}{K}(\tau_1,\sigma')\\ \boldsymbol{K}(\tau,\tau_1), & \boldsymbol{K}(\tau_1,\tau_1)\end{vmatrix}\boldsymbol{d\tau}_1$$

[7] Nach (13) ist $\overset{2}{A}_m(\tau,\tau')$ nur für $\tau'=\sigma'$ von Null verschieden.

$$=\int_T\begin{vmatrix}\overset{2}{K}(\tau,\sigma'), & \overset{2}{K}(\tau_1,\sigma')\\ \overset{1}{K}(\tau,\tau_1), & \overset{1}{K}(\tau_1,\tau_1)\end{vmatrix}d\tau_1+\int_S\begin{vmatrix}\overset{2}{K}(\tau,\sigma'), & \overset{2}{K}(\sigma_1,\sigma')\\ \overset{2}{K}(\tau,\sigma_1), & \overset{2}{K}(\sigma_1,\sigma_1)\end{vmatrix}d\sigma_1.$$

Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$\boldsymbol{A}_m(\tau,\tau_1)=\begin{cases}\overset{1}{A}_m(\tau,\tau_1)\text{ für }\tau_1\text{ in }T,\\ \overset{2}{A}_m(\tau,\sigma_1)\text{ für }\tau_1=\sigma_1\text{ auf }S,\end{cases}\qquad(\tau\text{ in }T+S)$$

(29) $$\boldsymbol{D}(\tau,\tau';\lambda)=\sum_{m=0}^\infty\frac{\lambda^m}{m!}\boldsymbol{A}_m(\tau,\tau'),$$

kürzer

(29') $$\boldsymbol{D}(\tau,\tau';\lambda)=\sum_{m=0}^\infty\frac{\lambda^m}{m!}\int_{T+S}\cdots\int_{T+S}\begin{vmatrix}\boldsymbol{K}(\tau,\tau'), & \boldsymbol{K}(\tau_1,\tau'),\ldots, & \boldsymbol{K}(\tau_m,\tau')\\ \boldsymbol{K}(\tau,\tau_1), & \boldsymbol{K}(\tau_1,\tau_1),\ldots, & \boldsymbol{K}(\tau_m,\tau_1)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \boldsymbol{K}(\tau,\tau_m), & \boldsymbol{K}(\tau_1,\tau_m),\ldots, & \boldsymbol{K}(\tau_m,\tau_m)\end{vmatrix}\boldsymbol{d\tau}_1\ldots\boldsymbol{d\tau}_m.$$

Es gilt augenscheinlich

(30) $$\boldsymbol{D}(\tau,\tau';\lambda)=\overset{1}{D}(\tau,\tau';\lambda)\ \text{für alle } \tau' \text{ in } T,$$
$$\boldsymbol{D}(\tau,\sigma';\lambda)=\overset{2}{D}(\tau,\sigma';\lambda)\ [8].$$

Man überzeugt sich jetzt ohne Mühe, daß $D_h(\lambda)$ für alle $h\leqslant h_0$ und alle λ mit $|\lambda|\leqslant\lambda_0$ für $h\to 0$ gleichmäßig gegen

(31) $$\boldsymbol{D}(\lambda)=1+\sum_{m=1}^\infty\frac{\lambda^m}{m!}\boldsymbol{A}_{m-1}\qquad \Big(\boldsymbol{A}_m=\int_{T+S}\boldsymbol{A}_m(\tau_0,\tau_0)\,\boldsymbol{d\tau}_0$$
$$=\int_T\overset{1}{A}_m(\tau_0,\tau_0)\,d\tau_0+\int_S\overset{2}{A}_m(\sigma_0,\sigma_0)\,d\sigma_0\Big)$$

konvergiert.

Es sei schließlich

(32) $$\boldsymbol{H}(\tau,\tau';\lambda)=\frac{\boldsymbol{D}(\tau,\tau';\lambda)}{\boldsymbol{D}(\lambda)}.$$

Offenbar ist für alle τ in $T+S$

[8] Man vergleiche in diesem Zusammenhang die Ausführungen p. 28—29 in meinen kürzlich erschienenen „Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen", Berlin 1931.

$$H(\tau,\tau';\lambda)=\frac{\overset{1}{D}(\tau,\tau';\lambda)}{D(\lambda)} \text{ für alle } \tau' \text{ in } T, \tag{33}$$

$$H(\tau,\sigma';\lambda)=\frac{\overset{2}{D}(\tau,\sigma';\lambda)}{D(\lambda)}\,.$$

§ 2.

Es möge nun λ einen Wert haben, so daß $D(\lambda)\neq 0$ ist. Dann ist für alle hinreichend kleinen h gewiß auch $D_h(\lambda)\neq 0$. Die Integralgleichung (9) hat eine und nur eine Lösung

$$\varphi_h(\tau)=f(\tau)-\lambda\int_T H_h(\tau,\tau';\lambda)f(\tau')\,d\tau'. \tag{34}$$

Geht man zur Grenze $h\to 0$ über, so findet man leicht, daß

$$\varphi(\tau)=f(\tau)-\lambda\int_{T+S} H(\tau,\tau';\lambda)f(\tau')\,d\tau' \tag{35}$$

$$=f(\tau)-\lambda\int_T\frac{\overset{1}{D}(\tau,\tau';\lambda)}{D(\lambda)}f(\tau')\,d\tau'-\lambda\int_S\frac{\overset{2}{D}(\tau,\sigma';\lambda)}{D(\lambda)}f(\sigma')\,d\sigma'$$

eine Lösung der „belasteten“ Integralgleichung (4) darstellt.

Der Übersichtlichkeit halber setzen wir

$$\Phi(\tau)=\varphi(\tau),\quad F(\tau)=f(\tau).$$

Wegen (25) können wir für (4) auch kürzer schreiben

$$\Phi(\tau)+\lambda\int_{T+S} K(\tau,\tau')\,\Phi(\tau')\,d\tau'=F(\tau). \tag{36}$$

Für (35) tritt dementsprechend

$$\Phi(\tau)=F(\tau)-\lambda\int_{T+S} H(\tau,\tau';\lambda)\,F(\tau')\,d\tau' \tag{35'}$$

ein.

Die zu (9) adjungierte Integralgleichung

$$\psi_h(\tau')+\lambda\int_T K_h(\tau,\tau')\,\psi_h(\tau)\,d\tau=f(\tau') \tag{37}$$

hat, wenn wir wie vorhin $D(\lambda)\neq 0$ voraussetzen,

$$\psi_h(\tau')=f(\tau')-\lambda\int_T H_h(\tau,\tau';\lambda)\,f(\tau)\,d\tau \tag{38}$$

zur Lösung. Wir wollen jetzt sehen, was diese Formeln für $h\to 0$ ergeben.

Wir bemerken vor allem, daß man $f(\tau)$ abteilungsweise stetig annehmen darf, in welchem Falle natürlich auch $\psi_h(\tau)$ abteilungsweise stetig ausfallen wird, ersetzen $f(\tau)$ in T_h durch hf_h^* und schreiben

$$\psi_h(\tau)=h\,\psi_h^* \text{ in } T_h\,. \tag{39}$$

Die Gleichung (37) liefert dann für τ' in T_h

$$h\,\psi_h^*(\tau')+h\lambda\int_{T_h}\overset{1}{K}_h(\tau,\tau')\,\psi_h^*(\tau)\,d\tau+\lambda\int_{T-T_h}\overset{1}{K}_h(\tau,\tau')\,\psi_h(\tau)\,d\tau=h\,f^*(\tau'), \tag{40}$$

für τ' in $T-T_h$ hingegen

$$\psi_h(\tau')+h\lambda\int_{T_h}\overset{1}{K}(\tau,\tau')\,\psi_h^*\,d\tau+\lambda\int_{T-T_h}\overset{1}{K}(\tau,\tau')\,\psi_h(\tau)\,d\tau \tag{41}$$

$$+\lambda\int_{T_h}\overset{2}{K}_h(\tau,\tau')\,\psi_h^*(\tau)\,d\tau+\frac{1}{h}\int_{T-T_h}\overset{2}{K}_h(\tau,\tau')\,\psi_h(\tau)\,d\tau=f(\tau')\,.$$

Wie sich alsbald zeigen wird, konvergiert $\psi_h^*(\tau')$ für $h\to 0$ für alle τ' in jedem ganz in T enthaltenen Bereiche gleichmäßig gegen eine in $T+S$ stetige Funktion $\psi^*(\tau')$. Des weiteren geht $\psi_h(\tau')$ in $T-T_h$ gleichmäßig gegen eine auf S erklärte stetige Funktion $\psi(\sigma')$. Aus (40) und (41) ergibt sich, wie man leicht sieht,

$$\psi^*(\tau')+\lambda\int_T\overset{1}{K}(\tau,\tau')\,\psi^*(\tau)\,d\tau+\lambda\int_S\overset{1}{K}(\sigma,\tau')\,\psi(\sigma)\,d\sigma=f^*(\tau'), \tag{40'}$$

$$\psi(\sigma')+\lambda\int_T\overset{2}{K}(\tau,\sigma')\,\psi^*(\tau)\,d\tau+\lambda\int_S\overset{2}{K}(\sigma,\sigma')\,\psi(\sigma)\,d\sigma=f(\sigma'). \tag{41'}$$

Wir haben auf p. 218 die sprungweise unstetige Funktion

$$K(\tau,\tau_1)=\begin{cases}\overset{1}{K}(\tau,\tau_1) \text{ für } \tau_1 \text{ in } T,\\ \overset{2}{K}(\tau,\sigma_1) \text{ für } \tau_1=\sigma_1 \text{ auf } S\end{cases}\quad(\tau \text{ in } T+S) \tag{42}$$

eingeführt. Setzt man

$$\Psi(\tau)=\begin{cases}\psi^*(\tau) \text{ in } T,\\ \psi(\sigma) \text{ auf } S,\end{cases}\quad F(\tau)=\begin{cases}f^*(\tau) \text{ in } T,\\ f(\sigma) \text{ auf } S,\end{cases} \tag{43}$$

und wie auf p. 218 $d\tau = d\tau$ in T, $= d\sigma$ auf S, so lassen sich die Gleichungen (40′) und (41′) zu einer einzigen Gleichung

$$\Psi(\tau') + \lambda \int_T \boldsymbol{K}(\tau, \tau')\, \Psi(\tau)\, d\tau = F(\tau') \tag{44}$$

zusammenziehen. Das Gleichungsystem (40′), (41′) oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Gleichung (44) ist als zu (4) adjungiert aufzufassen.

Die Lösung $\Psi(\tau')$ erweist sich, auch wenn $F(\tau')$ stetig ist, d. h. $f^*(\sigma') = f(\sigma')$ gilt, im Gegensatz zu $\varphi(\tau)$, der Lösung der Gleichung (4), als eine auf S sprungweise unstetige Funktion, $\Psi^*(\sigma') \neq \Psi(\sigma')$.

Ist freilich

$$\overset{1}{K}(\tau, \sigma') = \overset{2}{K}(\tau, \sigma'),\ f^*(\sigma') = f(\sigma'), \tag{45}$$

so ist zugleich $\psi^*(\sigma') = \psi(\sigma')$, d. h. $\Psi(\tau) = \psi^*(\tau)$ für alle τ in $T + S$, und (44) geht über in die Gleichung

$$\psi(\tau') + \lambda \int_T \overset{1}{K}(\tau, \tau')\, \psi(\tau)\, d\tau + \lambda \int_S \overset{2}{K}(\sigma, \tau')\, \psi(\sigma)\, d\sigma = f(\tau'), \tag{46}$$

die für alle τ' in $T + S$ gilt. Ist auch noch $\overset{1}{K}(\tau, \tau') = \overset{1}{K}(\tau', \tau)$, so fällt (46) mit (4) zusammen. Die „belastete" Integralgleichung (4) ist sich selbst adjungiert.

Es sei allgemeiner $\overset{2}{K}(\tau, \sigma') = p(\sigma')\, \overset{1}{K}(\tau, \sigma')$, und es möge $f(\sigma') = p(\sigma') f^*(\sigma')$ sein. Man überzeugt sich leicht, daß jetzt $\psi(\sigma') = p(\sigma')\, \psi^*(\sigma')$ gilt.

Wir haben vorhin (vgl. p. 221)

$$f_h(\tau) = h f_h^*,\ \psi_h(\tau) = h\, \psi_h^* \ \text{in}\ T_h$$

gesetzt und angenommen, daß $\psi_h^*(\tau')$ für $h \to 0$ für alle τ' in jedem ganz in T enthaltenen Bereiche gleichmäßig gegen eine in $T + S$ stetige Funktion $\psi^*(\tau')$ und zugleich $\psi_h(\tau')$ für alle τ' in $T - T_h$ gegen eine auf S stetige Funktion $\psi(\sigma')$ konvergiert.

Dies alles folgt leicht aus den Formeln (38) und (39), wenn man beachtet, daß nach (11) und (22)

$$H_h(\tau, \tau'; \lambda) = \frac{\overset{1}{D}_h(\tau, \tau'; \lambda)}{D_h(\lambda)} + \frac{1}{h}\, \frac{\overset{2}{D}_h(\tau, \tau'; \lambda)}{D_h(\lambda)} \tag{47}$$

gesetzt werden kann, und für $h \to 0$ gleichmäßig gilt

$$\frac{\overset{1}{D}_h(\tau, \tau'; \lambda)}{D_h(\lambda)} \to \frac{\overset{1}{D}(\tau, \tau'; \lambda)}{\boldsymbol{D}(\lambda)},\quad \frac{\overset{2}{D}_h(\tau, \sigma'; \lambda)}{D_h(\lambda)} \to \frac{\overset{2}{D}(\tau, \sigma'; \lambda)}{\boldsymbol{D}(\lambda)}. \tag{48}$$

Wir finden (für alle τ' in T)

$$\psi^*(\tau') = f^*(\tau') - \lambda \int_T \frac{\overset{1}{D}(\tau, \tau'; \lambda)}{\boldsymbol{D}(\lambda)} f^*(\tau)\, d\tau - \lambda \int_S \frac{\overset{1}{D}(\sigma, \tau'; \lambda)}{\boldsymbol{D}(\lambda)} f(\sigma)\, d\sigma \tag{49}$$

sowie

$$\psi(\sigma') = f(\sigma') - \lambda \int_T \frac{\overset{2}{D}(\tau, \sigma'; \lambda)}{\boldsymbol{D}(\lambda)} f^*(\tau)\, d\tau - \lambda \int_S \frac{\overset{2}{D}(\sigma, \sigma'; \lambda)}{\boldsymbol{D}(\lambda)} f(\sigma)\, d\sigma \tag{50}$$

und nach (33) und (43) kürzer

$$\Psi(\tau') = F(\tau') - \lambda \int_{T+S} \boldsymbol{H}(\tau, \tau'; \lambda)\, F(\tau)\, d\tau. \tag{51}$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Integralgleichungen (36) und (44) nur je eine Lösung haben (Unitätssatz). Hätte etwa (44) eine von (50) verschiedene Lösung, so gäbe es eine (auf S im allgemeinen sprungweise unstetige) Lösung $\Psi_0(\tau')$ der homogenen Integralgleichung

$$\Psi_0(\tau') + \lambda \int_{T+S} \boldsymbol{K}(\tau, \tau')\, \Psi_0(\tau)\, d\tau = 0. \tag{52}$$

Aus (36) und (52) folgt aber entsprechend durch Multiplikation mit $\Psi_0(\tau)\, d\tau$ und $\Phi(\tau')\, d\tau'$ und Integration in naheliegender Weise

$$\int_{T+S} F(\tau)\, \Psi_0(\tau)\, d\tau = 0. \tag{53}$$

Nur, wenn diese Integralbeziehung erfüllt ist, würde (36) eine Lösung haben können, was einen Widerspruch darstellt.

Die im vorstehenden gewonnenen Formeln (vgl. namentlich die Beziehungen (36), (35′), (44), (51), (32), (29′), (31)) haben im Einklang mit der Bemerkung von Herrn E. Schmidt und von A. Kneser dieselbe Form wie die klassischen Formeln der Fredholmschen Theorie. Sie könnten natürlich durch sinngemäße Übertragung der bekannten Schlüsse auch ohne Benutzung des Kernes $K_h(\tau, \tau')$ abgeleitet werden. Es ist einleuchtend, daß sich alle weiteren Ergebnisse sowohl der Fredholmschen als auch der Schmidtschen Theorie für die betrachteten „belasteten" Integralgleichungen sinngemäß übertragen lassen.

Ist insbesondere im Gegensatz zu unseren bisherigen Annahmen $D(\lambda)=0$, so haben die homogenen Integralgleichungen

$$\Phi(\tau)+\lambda\int_{T+S} K(\tau,\tau')\,\Phi(\tau')\,d\tau'=0 \tag{54}$$

und

$$\Psi(\tau')+\lambda\int_{T+S} K(\tau,\tau')\,\Psi(\tau)\,d\tau=0 \tag{55}$$

nicht identisch verschwindende Lösungen. Augenscheinlich sind die Lösungen der Gleichung (54) in $T+S$ stetig, diejenigen der Gleichung (55) ändern sich, wenn τ' gegen S konvergiert, im allgemeinen sprungweise.

Es seien $\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(p)}$ gewisse in $T+S$ gelegene Punkte, und es mögen $\overset{3}{K}_1(\tau,\tau^{(1)}),\ldots,\overset{3}{K}_m(\tau,\tau^{(p)})$ in $T+S$ erklärte stetige Funktionen bezeichnen. Die Integralgleichung

$$\varphi(\tau)+\lambda\int_T \overset{1}{K}(\tau,\tau')\,\varphi(\tau')\,d\tau'+\lambda\int_S \overset{2}{K}(\tau,\sigma')\,\varphi(\sigma')\,d\sigma' \tag{56}$$
$$+\lambda\sum_{l=1}^{p}\overset{3}{K}(\tau,\tau^{(l)})\,\varphi(\tau^{(l)})=f(\tau)$$

läßt sich ganz ähnlich wie die Gleichung (36) behandeln. Wir setzen $\Phi(\tau)=\varphi(\tau)$, $F(\tau)=f(\tau)$ und für alle τ in $T+S$, sofern τ' von $\tau^{(l)}$ $(l=1,\ldots,p)$ verschieden ist

$$K(\tau,\tau')=\begin{cases}\overset{1}{K}(\tau,\tau') & \text{für } \tau' \text{ in } T,\\ \overset{2}{K}(\tau,\sigma') & \text{für } \tau'=\sigma',\end{cases}\qquad d\tau'=\begin{cases} d\tau' \text{ in } T,\\ d\sigma' \text{ auf } S,\end{cases} \tag{57}$$

für $\tau'=\tau^{(l)}$ $(l=1,\ldots,p)$ aber

$$K(\tau,\tau')=\overset{3}{K}(\tau,\tau'),\quad d\tau'=1 \tag{58}$$

und erhalten wieder

$$\Phi(\tau)+\lambda\int_{T+S} K(\tau,\tau')\,\Phi(\tau')\,d\tau'=F(\tau). \tag{59}$$

Es möge $D(\lambda)$ von Null verschieden sein. Die Lösung der adjungierten Integralgleichung

$$\Psi(\tau')+\lambda\int_{T+S} K(\tau,\tau')\,\Psi(\tau)\,d\tau=F(\tau) \tag{60}$$

ist, auch wenn sich $F(\tau)$ durchaus stetig verhält, im allgemeinen auf S sowie in den Punkten $\tau^{(l)}$ $(l=1,\ldots,m)$ sprungweise unstetig. Das gleiche ist für $D(\lambda)=0$ bezüglich der Nullösungen f der homogenen Integralgleichung

$$\Psi(\tau')+\lambda\int_{T+S} K(\tau,\tau')\,\Psi(\tau)\,d\tau=0 \tag{61}$$

zu sagen.

Die vorstehenden Ergebnisse gelten sinngemäß, wenn das Linienintegral in (4) sich allgemeiner über eine endliche Anzahl stetig gekrümmten Kurvenbögen[9]) erstreckt. Eine Übertragung auf Räume von drei oder mehr Dimensionen ist naheliegend.

---

[9]) Allgemeiner: Kurvenbögen mit stetiger Tangente oder rektifizierbarer Jordanscher Kurvenstücke.

(Reçu par la Rédaction le 7. 9. 1931).
