Da die Glieder der letzten Summe nichtnegativ sind und wegen (4) $\cos \varrho_k \pi \geqslant 0$ ist, erhält man schließlich

$$|R_k| \geqslant \frac{1}{3^k \varphi(h)}. \tag{8}$$

Nach (6), (7), (8) und (5) gilt für $k \geqslant 10$ die Ungleichung

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}\right| \geqslant \frac{1}{2\,.\,3^k \varphi(h)} = \frac{1}{2\,.\,3^k \varphi\left(\frac{1-\varrho_k}{3^{\alpha_k}}\pi\right)}.$$

Auf Grund von (4), b) und der Voraussetzung, daß $\varphi(h)$ nicht abnimmt, folgt hieraus

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}\right| \geqslant \frac{1}{2\,.\,3^k\,.\,\varphi\left(\frac{5}{3^{\alpha_k}}\right)} > \frac{1}{2\,.\,3^k} k\,.\,3^k = \frac{k}{2}.$$

Da nach (5) für $h \to +0$ die Zahl k unendlich groß wird, folgt aus der letzten Ungleichung die Behauptung (2).

Ist $\varphi(h)$ eine in $(-h_0, +h_0)$ erklärte Funktion, welche für $h \neq 0$ von Null verschieden ist und zugleich mit h nach Null strebt, so kann man leicht eine stetige Funktion $f(x)$ bilden, für welche außer (2) auch noch

$$\overline{\lim_{h \to -0}} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}\right| = \infty$$

stattfindet. Es genügt unseren Beweis zu wiederholen, unter der Annahme, daß $\varphi(h)$ eine gerade, in $(0, h_0)$ nichtabnehmende positive Funktion ist und zuerst $h = \frac{1-\varrho_k}{3^{\alpha_k}}\pi \,(>0)$, dann $h = \frac{-1-\varrho_k}{3^{\alpha_k}}\pi$ (<0) zu setzen.

(Reçu par la Rédaction le 7. 5. 1931).

Integrale vom Dini'schen Typus

von

S. KACZMARZ (Lwów).

Es bezeichne $f(x)$ eine stetige periodische Funktion mit der Periode 1. Unter einem Integral vom DINIschen Typus verstehe ich ein Integral von einer der Gestalten

$$\text{a)} \int_0^1 \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| dt, \qquad \text{b)} \int_0^1 \left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right| dt,$$

$$\text{c)} \int_0^1 \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| dt$$

oder analoge Formen a_1), b_1), c_1) ohne Modulzeichen.

Die Existenz dieser Ausdrücke haben schon die Herren BESICOVITCH, HARDY, LICHTENSTEIN, PLESSNER und STEINHAUS untersucht, besonders der letztgenannte Verfasser hat diese Untersuchung allgemein und mit funktionaltheoretischen Methoden geführt[1]). Unter anderen hat Herr STEINHAUS gezeigt, daß die Ausdrücke a) und b) *fast überall* den Wert $+\infty$ annehmen können, und daß die Menge dieser Funktionen von der zweiten Kategorie im Raume aller stetigen Funktionen ist.

Es wurde von ihm auch die Frage aufgeworfen, ob man das Wort *fast überall* durch *überall* ersetzen darf. Eine positive Antwort darauf zu bringen, ist das Ziel dieser Note. Wir wollen also zeigen, daß es Funktionen gibt, für welche die Integrale a), b), bzw. c) *überall*, d. h. für jedes x, den Wert $+\infty$ annehmen[2]), —

[1]) H. Steinhaus, Studia Math. 1 (1929) p. 51—81.

[2]) Ein Beispiel für das Integral c) und c_1) wurde etwas früher von Herrn S. Mazurkiewicz gefunden.

noch mehr, daß die Menge dieser Funktionen von der zweiten Kategorie im Raume aller stetigen Funktionen ist.

Des weiteren zeigen wir, daß die Menge der Funktionen, für welche

$$\limsup_{h\to 0}\left|\int_h^1 \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt\right|, \quad \limsup_{h\to 0}\left|\int_h^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\,dt\right|$$

überall unendlich ist, von der zweiten Kategorie ist, während, wie bekannt, im Falle b_1) das Integral fast überall endlich bleibt.

Der Beweis des zweiten Teiles der Behauptungen, d. i. daß die Menge dieser Funktionen von der zweiten Kategorie ist, beruht auf einem Satz aus der Theorie der Funktionaloperationen, welcher kürzlich von Herrn Banach bewiesen wurde. Daraus folgt schon der erste Teil der Behauptung, nämlich der reine Existenzsatz, außerdem aber führe ich auch effektive Beispiele von solchen Funktionen an. Die angewandte Methode ermöglicht auch das Studium von gewissen allgemeineren Ausdrücken.

§ 1.

Lemma 1. *Ist M positiv, sonst beliebig, so gibt es eine stetige Funktion $F(x)$ mit der Periode 1, für welche*

$$|F(x)|\leqslant 1,$$

$$\int_0^1\left|\frac{F(x+t)-F(x)}{t}\right|dt \geqslant M$$

für jedes x gilt; genauer: *es gibt eine stetige Funktion $f(x)$ mit der Periode 1 und eine Zahlenfolge M_n mit den Eigenschaften*

$$|f(x)|\leqslant 1, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty, \tag{2}$$

$$\int_{1/n}^1\left|\frac{f[n(x+t)]-f(nx)}{t}\right|dt \geqslant M_n \tag{3}$$

für jedes x.

Dieses Lemma ist speziell für den Fall a) formuliert. Für die beiden anderen Ausdrücke b) und c) genügt es die Eigenschaft (3) durch

$$\int_{1/n}^1\left|\frac{f[n(x+t)]-f[n(x-t)]}{t}\right|dt, \tag{3'}$$

bzw.

$$\int_{1/n}^1\left|\frac{f[n(x+t)]+f[n(x-t)]-2f(nx)}{t}\right|dt \tag{3''}$$

zu ersetzen [3]).

Beweis. Wir suchen eine Abschätzung von unten für das Integral in (3). Bezeichnen wir vorläufig mit $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion mit der Periode 1, $|f(x)|\leqslant 1$, und setzen

$$I_n=\int_{1/n}^1\left|\frac{f(nx+t)-f(nx)}{t}\right|dt,$$

$$nx=y, \qquad nt=u,$$

so haben wir

$$I_n=\int_1^n\frac{|f(y+u)-f(y)|}{u}\,du.$$

Da $f(x)$ die Periode 1 besitzt, so ist

$$I_n=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1\frac{|f(y+u)-f(y)|}{k+u}\,du \geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1\frac{|f(y+u)-f(y)|}{k+1}\,du,$$

also, wenn C eine absolute Konstante bezeichnet,

$$I_n\geqslant\int_0^1|f(y+u)-f(y)|\,du\,.\sum_2^n\frac{1}{k}\geqslant C.\lg n.\int_0^1|f(y+u)-f(y)|\,du.$$

Nehmen wir jetzt an, es sei für jedes y

$$\int_0^1|f(y+u)-f(y)|\,du>0\,; \tag{4}$$

es genügt zu diesem Zwecke vorauszusetzen:

$$f(y)\neq\text{Konstante}.$$

Da das Integral (4), als Funktion von y betrachtet, stetig ist, so besitzt es ein Minimum $g>0$,

[3]) Lemma und Satz im Falle b) wurden gleichzeitig von Herrn H. Steinhaus gefunden.

man hat also

$$I_n \geqslant C \cdot g \cdot \lg n \,,$$

w. z. b. w.

Im Falle b) genügt es statt (4) das Integral

$$\int_0^1 |f(y+u)-f(y-u)|\, du \tag{4'}$$

zu prüfen. Wir nehmen an, daß die Funktion $f(x)$ inbezug auf keine Gerade $x=a$ symmetrisch ist; dann ist das Integral (2′) positiv, also

$$I_n \geqslant C \cdot g' \cdot \lg n \,.$$

Im Falle c) betrachten wir das Integral

$$A=\int_0^1 |f(y+u)+f(y-u)-2f(y)|\, du \,. \tag{4''}$$

Unter der Voraussetzung, daß für keinen Wert von y die Gleichung

$$f(y+u)+f(y-u)=2f(y)$$

für jedes u erfüllt ist, erhält man

$$A \geqslant g'' > 0$$

und

$$I_n \geqslant C \cdot g'' \cdot \lg n \,.$$

Bemerkungen. 1. Wir sehen, daß die Funktionen, für welche das Lemma richtig ist, ziemlich beliebig sind.

2. Man kann ganz analog das Lemma für allgemeinere Ausdrücke, zum Beispiel im Falle a) für

$$\int_0^1 |f(x+t)-f(x)|\, w(t)\, dt$$

beweisen, wenn $w(t) \geqslant 0$, im Interwall $\langle \varepsilon, 1\rangle$ $(\varepsilon > 0)$ integrierbar und $\int_0^1 w(t)\, dt = +\infty$ ist. [Diese Voraussetzungen sind notwendig; vgl. die in Anmerkung [1]) zitierte Arbeit]. Ähnlich in beiden anderen Fällen.

Lemma 2. *Es gibt eine stetige Funktion $f(x)$ mit der Periode 1 und eine Zahlenfolge M_n mit den Eigenschaften:*

$$|f(x)| \leqslant 1 \,,$$

$$\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty \,,$$

zu jedem x gibt es ein $h=h(x)$, so daß

$$\left| \int_h^1 \frac{f[n(x+t)]-f(nx)}{t}\, dt \right| \geqslant M_n \,,$$

und analog im Falle c_1).

Beweis. Wir setzen $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|\lg x|}}$ für $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$, im Intervall $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\rangle$ symmetrisch inbezug auf die Gerade $x=\frac{1}{4}$, in $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$

$$f(x) = -f(x-\tfrac{1}{2}) \,,$$

sonst periodisch. Es sei

$$I=\int_{1/n}^1 \frac{f[n(x+t)]-f(nx)}{t}\, dt \,.$$

Wie im vorigen Lemma erhalten wir

$$I=\sum_1^n \int_0^1 \frac{f(y+u)-f(y)}{k+u}\, du \,.$$

Es ist aber

$$\int_0^1 \frac{f(y+u)-f(y)}{k+u}\, du = \frac{1}{k}\int_0^{\xi} [f(y+u)-f(y)]\, du$$

$$+\frac{1}{k+1}\int_{\xi}^1 [f(y+u)-f(y)]\, du = \frac{1}{k}\int_0^1 [f(y+u)-f(y)]\, du$$

$$+\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right]\int_{\xi}^1 [f(y+u)-f(y)]\, du \,,$$

der zweite Summand rechts ist absolut kleiner als

$$\frac{2}{k(k+1)} \,,$$

also ist das Integral links, absolut genommen, nicht kleiner als

$$\frac{|f(y)|}{k}-\frac{2}{k(k+1)}$$

und man erhält
$$|I| \geqslant |f(y)| \lg n - 2.$$
Es sei jetzt $x=0$. Es kommt
$$I' = \int_{1/n^2}^{1} \frac{f(nt)-f(0)}{t}\,dt = \int_{1/n}^{1} \frac{f(u)}{u}\,du + I.$$
Es ist aber
$$|I| < 2$$
und
$$\int_{1/n}^{1} \frac{f(u)}{u}\,du = \int_{1/n}^{1/4} + \int_{1/4}^{1}, \text{ wo } \left|\int_{1/4}^{1}\right| \leqslant 2,$$
$$\int_{1/n}^{1/4} \frac{f(u)}{u}\,du = \int_{1/n}^{1/4} \frac{1}{u\sqrt{|\lg u|}}\,du \geqslant \frac{1}{\sqrt{\lg n}} \int_{1/n}^{1} \frac{du}{u} > \sqrt{\lg n} - 1,$$
es ist also
$$|I'| > \sqrt{\lg n} - 5.$$
Da $f(x)$ stetig ist, so gibt es ein $\delta > 0$, z. B. $1/n^{64}$, so daß, für $|x-x'| < \delta$ die Ungleichung
$$|f(x)-f(x')| < \frac{1}{8\sqrt{\lg n}}$$
gilt. Wir haben also für $|y| < \delta$
$$|I'(y) - I'(0)| < 2\varepsilon \int_{1/n^2}^{1} \frac{dt}{t} = 4\varepsilon \lg n = \frac{\sqrt{\lg n}}{2},$$
und
$$|I'(y)| > 1/2 . \sqrt{\lg n} - 5.$$
Daraus folgt, wenn $|y| < \delta$, oder $|y - 1/2| < \delta$,
$$|I'(y)| > 1/2 . \sqrt{\lg n} - 5,$$
in anderen Fällen
$$|I(y)| > |f(y)| \lg n - 2 \geqslant 1/8 . \sqrt{\lg n} - 2.$$
Im Falle c_1) setzen wir $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|\lg x|}}$ in $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$, symmetrisch in $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$, $f(x) = a . f(x - \frac{2}{3})$ in $\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\rangle$ und symmetrisch in $\langle \frac{2}{3} + \frac{1}{6}, 1\rangle$, wo a der Bedingung
$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$
gemäß gewählt werden soll.

§ 2.

Wir können jetzt an den Beweis des Satzes treten.

Satz 1. *Die Menge stetiger Funktionen $f(x)$ mit der Periode 1, für welche das Integral a), b), bzw. c) für jedes x den Wert $+\infty$ annimmt, ist von der zweiten Kategorie im Raume aller stetigen Funktionen und ihre Komplementärmenge von der ersten Kategorie.*

Beweis. Der obige Satz ist eine fast unmittelbare Folgerung aus einem Satz von Herrn Banach[4]) und unserem Lemma.

Der erwähnte Satz lautet:

Es sei $U(f, t, h)$ eine Operation, definiert im Raume E der Funktionen f, im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ für die Veränderlichen t und h. Es sei weiter U symmetrisch in f und nicht negativ, stetig in f und t, und es sei für zu E gehörige f_1, f_2
$$U(f_1 + f_2, t, h) \leqslant U(f_1, t, h) + U(f_2, t, h).$$
Wenn es im Raume E eine überall dichte Menge H gibt und zu jedem f und $\varepsilon > 0$ ein $w \in H$ existiert, so daß für $\|f - w\| < \varepsilon$ die Ungleichung
$$U(w, t, h) < M$$
erfüllt ist, wenn es ferner zu jedem $r > 0$ und $M > 0$ eine Funktion $g(t)$ gibt, welche die Bedingungen erfüllt:

a) $\|g\| < r$,

b) zu jedem t gibt es ein $h_t > 0$ mit
$$U(g, t, h_t) > M,$$
dann ist die Menge der Funktionen $f(t)$, für welche
$$\lim_{h \to 0} \sup U(f, t, h) = +\infty$$
für jedes t gilt, von der *zweiten* Kategorie und ihre Komplementärmenge von der *ersten*.

Es sei E der Raum stetiger Funktionen $f(x)$ im Interwall $\langle 0, 1\rangle$ mit
$$\|f\| = \max |f(x)|$$

[4]) S. Banach, Über die Baire'sche Kategorie, Stud. Math. 3 (1931) p. 174—179, Satz 2.

und $U(f,t,h)$ das Funktional

$$U(f,t,h)=\int\limits_{h}^{1}\left|\frac{f(t+z)-f(t)}{z}\right|dz\,,$$

bzw. Ausdrücke von der Gestalt b) oder c).

Die Voraussetzungen des BANACHschen Satzes: Stetigkeit von U in f und t, Symmetrie in f und Dreiecksbedingung für f sind erfüllt. Als die Menge H des Satzes, welche überall dicht in E sein soll, kann man die trigonometrischen Polynome wählen. Dann genügt es nur folgendes zu zeigen:

Wenn $r>0$ und $M>0$ gegeben sind, so existiert eine Funktion $g(x)\in E$, für welche

a) $\|g\|<r$,

b) für jedes t in $\langle 0,1\rangle$ gibt es ein $h_t>0$ mit

$$U(g,t,h_t)>M\,.$$

Nach unserem Lemma können wir setzen

$$g(x)=rf(nx)\,,\ h_t=\frac{1}{n}\,,$$

wenn nur die Zahl n die Bedingung

$$M_n\,.\,r\geqslant M$$

erfüllt; somit ist unser Satz bewiesen.

Ganz ähnlich beweist man den

Satz 2. *Die Menge stetiger Funktionen $f(x)$ mit der Periode 1, für welche für jedes x*

$$\limsup_{h\to 0}\left|\int\limits_{1/h}^{1}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt\right|=+\infty\,,$$

bzw.

$$\limsup_{h\to 0}\left|\int\limits_{1/h}^{1}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\,dt\right|=+\infty$$

gilt, ist von der zweiten, und ihre Komplementärmenge von der ersten Kategorie.

§ 3.

Effektive Beispiele. Wenn wir bloß das Problem betrachten, ob es Funktionen gibt, für welche das Integral vom

DINIschen Typus überall unendlich ist, und nicht mehr nach der Menge dieser Funktionen fragen, so können wir die Antwort ohne Theorie der Funktionalanalysis erhalten, indem wir direkt Beispiele von Funktionen mit der verlangten Eigenschaft konstruieren. Da das Verfahren in allen Fällen dasselbe ist, beschränken wir uns nur auf den Fall c).

Wir wollen also eine stetige Funktion $F(x)$ mit der Periode 1 angeben, für welche überall die Beziehung gilt:

$$\int\limits_{0}^{1}\left|\frac{F(x+t)+F(x-t)-2F(x)}{t}\right|dt=+\infty\,.$$

Auf Grund des Lemmas wissen wir, daß für eine gewisse Funktion $f(x)$, zum Beispiel

$$f(x)=x \qquad (0\leqslant x\leqslant \tfrac{2}{3}),$$
$$f(x)=-2x+2 \qquad (\tfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1),$$

das Integral

$$I_n\geqslant M_n$$

ist. Wir definieren

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(n_k x)}{2^{k^2}}\,,$$

wo die Zahlen n_k durch folgende Bedingungen bestimmt sind:

a) $A+\sum\limits_{i=1}^{k-1}\dfrac{4\lg n_i}{2^{i^2}}\leqslant\dfrac{1}{2}\,\dfrac{M_{n_k}}{2^{k^2}}$,

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{M_{n_k}}{2^{k^2}}=+\infty$ (es genügt $\lg n_k=2^{k^3}$ zu setzen), wobei A die Ungleichung

$$\int\limits_{0}^{1}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|dt\leqslant A$$

für jedes x erfüllt.

Die Funktion $F(x)$ ist stetig mit der Periode 1.

Es bleibt zu zeigen:

$$\lim_{p\to\infty}K_p(x)=\lim_{p\to\infty}\int\limits_{1/p}^{1}\left|\frac{F(+t)+F(x-t)-F(x)}{t}\right|dt=+\infty\,.$$

Es ist

$$K_p(x)=\int\limits_{1/p}^{1}\frac{1}{t}\left|\sum_{1}^{\infty}\frac{f[n_k(x+t)]+f[n_k(x-t)]-f(n_k x)}{2^{k^2}}\right|dt,$$

also, wenn $p=n_s$,

$$K_p(x)\geqslant\frac{1}{2^{s^2}}\int\limits_{1/p}^{1}\left|f[n_s(x+t)]+f[n_s(x-t)]-2f(n_s x)\right|\frac{1}{t}\,dt$$

$$-\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{2^{k^2}}\int\limits_{1/p}^{1}\frac{1}{t}\left|\ldots\right|dt-\sum_{k=s+1}^{\infty}.$$

Der erste Summand rechts ist nicht kleiner als $\frac{1}{2^{s^2}}\cdot M_{n_s}$, der Ausdruck $\sum\limits_{k=1}^{s-1}$ ist, auf Grund analoger Abschätzung wie im Beweis von § 1, nicht größer als

$$A+\sum_{1}^{s-1}\frac{4\lg n_i}{2^{i^2}}\leqslant\frac{1}{2}\frac{M_{n_s}}{2^{s^2}},$$

und endlich

$$\sum_{k=s+1}^{\infty}\leqslant\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{1}{2^{k^2}}4\,.\lg p\leqslant 4\lg p\,.\frac{1}{2^{s^2+2s}}\leqslant\frac{M_{n_s}}{2^{s^2+2s}}\cdot\frac{4}{C\,.g''}\,.$$

Daraus folgt, daß

$$K_p(x)\geqslant\frac{1}{2}\frac{M_{n_s}}{2^{s^2}}-\frac{4}{G\,.g''.\,2^s}\cdot\frac{M_{n_s}}{2^{s^2}}$$

und

$$\lim_{p\to\infty}K_p(x)=+\infty$$

ist.

§ 4.

S c h l u ß b e m e r k u n g e n. 1. Aus der Bemerkung 2 des § 1 folgt die Existenz von Funktionen, für welche die Dinischen Integrale mit $w(t)$ statt $1/t$ überall unendlich sind. Efektive Beispiele lassen sich ganz analog konstruieren.

2. Wenn für die Funktion $f(x)$ überall

$$\int\limits_0^1\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt=+\infty$$

ist, so folgt daraus, daß $f(x)$ nirgends eine endliche rechte Ableitung besitzt, ja sogar *nirgends die rechten oberen und unteren Derivierten endlich sind;* somit ist die Menge der nichtlipschitzschen Funktionen von der zweiten Kategorie.

Es sei weiter überall

$$\int\limits_0^1\left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right|dt=+\infty\,.$$

Dann besitzt $f(x)$ im keinen Punkte eine *endliche verallgemeinerte Derivierte* d. h. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, und wiederum ist die Menge dieser Funktionen von der zweiten Kategorie.

Analoge Bemerkung betrifft auch das dritte Integral.

(Reçu par la Rédaction le 9. 6. 1931).