$$|x(t+h)-x(t)| \leqslant |w(t+h)-w(t)| + |g(t+h)-g(t)|$$
$$\leqslant c|h|^\alpha + (1-c)|h|^\alpha = |h|^\alpha,$$

und wegen 2°

$$\left|\frac{x(t+h_t)-x(t)}{h_t^{\beta_M}}\right| \geqslant \left|\frac{g(t+h_t)-g(t)}{h_t^{\beta_M}}\right| - A > N.$$

D. h., x ist ein Element von H^α, welches in E_N^M nicht enthalten ist, trotzdem nach 3° $\|x-w\|<r$ gilt.

Es bezeichne wieder $\varphi(t)$ die im Beweise von Satz 1 benutzte stückweise lineare Funktion. Für $|h| \leqslant 1$ ist offenbar

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leqslant |h| \leqslant |h|^\alpha.$$

Wegen $|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leqslant 1/2$ gilt diese Ungleichung auch für $|h|>1$.

Wählt man eine der Ungleichung $\alpha<\gamma<\beta_M$ genügende Zahl γ und setzt $g(t)=\frac{1}{n^\gamma}\varphi(nt)$, so erfüllt diese Funktion $g(t)$ die Forderungen 1°, 2°, 3°, wenn n eine hinreichend große natürliche Zahl ist.

Denn man hat

$$|g(t+h)-g(t)| = \frac{\varphi(nt+nh)-\varphi(nt)}{n^\gamma} \leqslant \frac{n^\alpha|h|^\alpha}{n^\gamma} = \frac{1}{n^{\gamma-\alpha}}|h|^\alpha.$$

Zu einem jeden t gibt es, wie wir schon wissen, ein h^t $(0<h_t<1/n)$ derart, daß $|\varphi(nt+nh_t)-\varphi(nt)| \geqslant 1/4$, also

$$\left|\frac{g(t+h_t)-g(t)}{h_t^{\beta_M}}\right| \geqslant \frac{1}{4n^\gamma|h_t|^{\beta_M}} > \frac{1}{4n^\gamma\frac{1}{n^{\beta_M}}} = \frac{1}{4}n^{\beta_M-\gamma}$$

ist.

Endlich ist

$$\|g(t)\| = \frac{1}{n^\gamma}\|\varphi(nt)\| = \frac{1}{2n^\gamma}.$$

Es genügt also n so groß zu wählen, daß $\frac{1}{n^{\gamma-\alpha}} \leqslant 1-c$, $\frac{1}{4}n^{\beta_M-\gamma} > N+A$ und $\frac{1}{2n^\gamma} < r$ ist.

(Reçu par la Rédaction le 7. 5. 1931).

Ein Beispiel zur Hölderschen Bedingung

von

S. RUZIEWICZ (Lwów).

Sei $\varphi(h)$ eine innerhalb eines Intervalls $(0, h_0)$ $(h_0>0)$ erklärte und von Null verschiedene Funktion von der Eigenschaft, daß

$$\lim_{h\to+0}\varphi(h)=0 \tag{1}$$

ist. Über ihre Stetigkeit setzen wir nichts voraus.

Wir werden in dieser Note eine stetige Funktion $f(x)$ definieren, welche für alle x die Bedingung

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}\right| = \infty \tag{2}$$

erfüllt [1]).

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, dürfen wir annehmen, daß $\varphi(h)$ eine in $(0, h_0)$ positive nichtabnehmende Funktion ist. Bezeichnet man nämlich mit $\psi(h)$ die obere Grenze von $\varphi(t)$ für $0<t\leqslant h$ $(0<h<h_0)$, so ist $\psi(t)$ eine derartige, zugleich mit h nach Null strebende Funktion. Eine Funktion $f(x)$, für welche bei beliebigem x

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\psi(h)}\right| = \infty$$

stattfindet, genügt offenbar auch der Bedingung (2).

[1]) Das erste Beispiel einer derartigen Funktion wurde von Herrn G. Faber angegeben (Math. Ann. 66 (1909) p. 81—94); vgl. auch H. Auerbach und S. Banach, Über die Höldersche Bedingung, Stud. Math. 3 (1931) p. 180. Das hier mitgeteilte Beispiel ist wohl einfacher.

Es bezeichne $\{\alpha_n\}$ eine Folge natürlicher Zahlen, welche die beiden Ungleichungen

$$\text{a)}\qquad \alpha_{n+1}-\alpha_n > n+1$$

$$\text{b)}\qquad \varphi\left(\frac{5}{3^{\alpha_n}}\right) < \frac{1}{n\,.\,3^n}$$

für alle n erfüllt.

Eine derartige Folge erhält man z. B. wie folgt: Wegen (1) gibt es eine natürliche Zahl α_1, so daß $\varphi\left(\frac{5}{3^{\alpha_1}}\right) < \frac{1}{3}$. Sind die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ schon definiert, so kann man für α_n die kleinste ganze Zahl nehmen, welche größer als $\alpha_{n-1}+n$ ist und der Bedingung b) genügt.

Wir behaupten, daß die nach der Art des bekannten Beispiels von Weierstrass gebildete Funktion

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3^{\alpha_n}x}{3^n},$$

welche offenbar für alle x definiert und stetig ist, die verlangte Eigenschaft besitzt.

Sei x eine gegebene reelle Zahl. Wir wählen eine ganze Zahl $k \geqslant 10$ und bezeichnen mit ξ_k die zu $\frac{3^{\alpha_k}x}{\pi}$ nächste ganze Zahl, bzw. die kleinere dieser Zahlen.

Wir setzen jetzt

$$\varrho_k=\frac{3^{\alpha_k}x}{\pi}-\xi_k. \tag{3}$$

Es ist also

$$|\varrho_k| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Die Zahl

$$h=\frac{1-\varrho_k}{3^{\alpha_k}}\pi \tag{5}$$

ist wegen (4) positiv.

Man hat

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}=S_k+R_k, \tag{6}$$

wo

$$S_k=\frac{1}{\varphi(h)}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\cos 3^{\alpha_n}(x+h)-\cos 3^{\alpha_n}x}{3^n},$$

$$R_k=\frac{1}{\varphi(h)}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\cos 3^{\alpha_n}(x+h)-\cos 3^{\alpha_n}x}{3^n}$$

ist. Für S_k erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$|S_k| \leqslant \frac{1}{\varphi(h)}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{|\cos 3^{\alpha_n}(x+h)-\cos 3^{\alpha_n}x|}{3^n}$$

$$=\frac{1}{\varphi(h)}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\left|2\sin 3^{\alpha_n}\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{1}{2}3^{\alpha_n}h\right|}{3^n}$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi(h)}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{2\left|\sin\frac{1}{2}3^{\alpha_n}h\right|}{3^n} \leqslant \frac{h}{\varphi(h)}\sum_{n=1}^{k-1}3^{\alpha_n-n},$$

daher wegen (5)

$$|S_k| \leqslant \frac{1-\varrho_k}{3^k\varphi(h)}\pi\sum_{n=1}^{k-1}\frac{3^{\alpha_n-n}}{3^{\alpha_k-k}} < \frac{1-\varrho_k}{3^k\varphi(h)}\pi\, k\,\frac{3^{\alpha_{k-1}-k+1}}{3^{\alpha_k-k}},$$

also nach (4)

$$|S_k| < \frac{3\pi}{2}\,\frac{1}{3^k\varphi(h)}\,\frac{3k}{3^{\alpha_k-\alpha_{k-1}}}.$$

Wegen a) ist $\frac{3k}{3^{\alpha_k-\alpha_{k-1}}} < \frac{3k}{3^k}$, daher hat man für $k \geqslant 10$ $\frac{3k}{3^{\alpha_k-\alpha_{k-1}}} < \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{10}$. Beachtet man noch, daß $3\pi < 10$ ist, so folgt

$$|S_k| < \frac{1}{2\,.\,3^k\varphi(h)}. \tag{7}$$

Für R_k erhält man nach (3) und (5)

$$R_k=\frac{1}{\varphi(h)}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left[\cos 3^{\alpha_n}(x+h)-\cos 3^{\alpha_n}x\right]$$

$$=\frac{1}{\varphi(h)}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left[\cos 3^{\alpha_n-\alpha_k}(\xi_k+1)\pi-\cos 3^{\alpha_n-\alpha_k}(\xi_k+\varrho_k)\pi\right].$$

Da für $n \geqslant k$ $\alpha_n \geqslant \alpha_k$ ist, so hat man weiter

$$R_k=\frac{1}{\varphi(h)}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left[(-1)^{\xi_k+1}+(-1)^{\xi_k+1}\cos 3^{\alpha_n-\alpha_k}\varrho_k\pi\right]$$

$$=\frac{(-1)^{\xi_k+1}}{\varphi(h)}\,\frac{1}{3^k}(1+\cos\varrho_k\pi)+\frac{(-1)^{\xi_k+1}}{\varphi(h)}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left[1+\cos 3^{\alpha_n-\alpha_k}\varrho_k\pi\right].$$

Da die Glieder der letzten Summe nichtnegativ sind und wegen (4) $\cos \varrho_k \pi \geqslant 0$ ist, erhält man schließlich

$$|R_k| \geqslant \frac{1}{3^k \varphi(h)}. \tag{8}$$

Nach (6), (7), (8) und (5) gilt für $k \geqslant 10$ die Ungleichung

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}\right| \geqslant \frac{1}{2 \cdot 3^k \varphi(h)} = \frac{1}{2 \cdot 3^k \varphi\left(\frac{1-\varrho_k}{3^{\alpha_k}}\pi\right)}.$$

Auf Grund von (4), b) und der Voraussetzung, daß $\varphi(h)$ nicht abnimmt, folgt hieraus

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}\right| \geqslant \frac{1}{2 \cdot 3^k \cdot \varphi\left(\frac{5}{3^{\alpha_k}}\right)} > \frac{1}{2 \cdot 3^k} k \cdot 3^k = \frac{k}{2}.$$

Da nach (5) für $h \to +0$ die Zahl k unendlich groß wird, folgt aus der letzten Ungleichung die Behauptung (2).

Ist $\varphi(h)$ eine in $(-h_0, +h_0)$ erklärte Funktion, welche für $h \neq 0$ von Null verschieden ist und zugleich mit h nach Null strebt, so kann man leicht eine stetige Funktion $f(x)$ bilden, für welche außer (2) auch noch

$$\overline{\lim_{h \to -0}} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}\right| = \infty$$

stattfindet. Es genügt unseren Beweis zu wiederholen, unter der Annahme, daß $\varphi(h)$ eine gerade, in $(0, h_0)$ nichtabnehmende positive Funktion ist und zuerst $h = \frac{1-\varrho_k}{3^{\alpha_k}}\pi \; (>0)$, dann $h = \frac{-1-\varrho_k}{3^{\alpha_k}}\pi$ (<0) zu setzen.

(Reçu par la Rédaction le 7. 5. 1931).

Integrale vom Dini'schen Typus

von

S. KACZMARZ (Lwów).

Es bezeichne $f(x)$ eine stetige periodische Funktion mit der Periode 1. Unter einem Integral vom DINIschen Typus verstehe ich ein Integral von einer der Gestalten

$$\text{a)} \int_0^1 \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| dt, \qquad \text{b)} \int_0^1 \left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right| dt,$$

$$\text{c)} \int_0^1 \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| dt$$

oder analoge Formen a_1), b_1), c_1) ohne Modulzeichen.

Die Existenz dieser Ausdrücke haben schon die Herren BESICOVITCH, HARDY, LICHTENSTEIN, PLESSNER und STEINHAUS untersucht, besonders der letztgenannte Verfasser hat diese Untersuchung allgemein und mit funktionaltheoretischen Methoden geführt[1]). Unter anderen hat Herr STEINHAUS gezeigt, daß die Ausdrücke a) und b) *fast überall* den Wert $+\infty$ annehmen können, und daß die Menge dieser Funktionen von der zweiten Kategorie im Raume aller stetigen Funktionen ist.

Es wurde von ihm auch die Frage aufgeworfen, ob man das Wort *fast überall* durch *überall* ersetzen darf. Eine positive Antwort darauf zu bringen, ist das Ziel dieser Note. Wir wollen also zeigen, daß es Funktionen gibt, für welche die Integrale a), b), bzw. c) *überall*, d. h. für jedes x, den Wert $+\infty$ annehmen[2]), —

[1]) H. Steinhaus, Studia Math. 1 (1929) p. 51—81.

[2]) Ein Beispiel für das Integral c) und c_1) wurde etwas früher von Herrn S. Mazurkiewicz gefunden.