Uber die Höldersche Bedingung

von

H. AUERBACH und S. BANACH (Lwów).

Wir beweisen in dieser Arbeit als Anwendung einer von Herrn S. Banach gleichzeitig veröffentlichten Methode [1]) folgende zwei Sätze:

S a t z 1. *Sei $\omega(h)$ eine für $h>0$ erklärte Funktion von der Eigenschaft, daß $\omega(h)>0$ und $\lim_{h\to 0}\omega(h)=0$ ist. Ferner bezeichne E den Raum aller stetigen Funktionen $x(t)$ von der Periode 1. Abgesehen von gewissen $x(t)$, welche eine Menge erster Kategorie bilden, besitzt jedes x aus E die folgende Eigenschaft:*

Es ist

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\omega(h)}\right|=+\infty$$

für alle t.

S a t z 2. *Es bezeichne H^α $(0<\alpha\leqslant 1)$ den Raum aller Funktionen $x(t)$ von der Periode 1, welche der Hölderschen Bedingung*

$$|x(t+h)-x(t)|\leqslant|h|^\alpha$$

genügen. Abgesehen von gewissen $x(t)$, welche eine Menge erster Kategorie bilden, besitzt jedes x aus H^α die folgende Eigenschaft:

Es ist

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{x(t+h-x(t)}{h^\beta}\right|=+\infty$$

für alle t und alle $\beta>\alpha$ [2]).

[1]) S. B a n a c h, Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Stud. Math. 3 (1931) p. 174—179.

[2]) Beispiele stetiger Funktionen, welche diese Eigenschaft für $\beta=1$ besitzen, findet man in: S. R u z i e w i c z, Sur les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée, Ann. de la Soc. Pol. de Math. 7 (1928) p. 68—74 und A. Z y g m u n d, Uwaga o funkcjach nieróżniczkowalnych, Mathesis Polska 4 (1929) p. 1—7.

Es wird hierbei vorausgesetzt, daß die Norm in E bzw. H^α als das Maximum von $|x(t)|$ erklärt ist.

Aus Satz 1 folgt, indem man $\omega(h)=\frac{1}{|\lg h|}$ annimmt, daß mit Ausnahme gewisser $x(t)$, welche eine Menge erster Kategorie bilden, für jedes x aus E die Beziehung

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h^\alpha}\right|=+\infty$$

für alle t und alle $\alpha>0$ stattfindet. In dieser Form wurde der Satz von uns ursprünglich bewiesen. Die obige allgemeine Fassung verdanken wir einer brieflichen Mitteilung des Herrn S. Saks [3]).

B e w e i s v o n S a t z 1. Wir nehmen zunächst an, daß für alle $h>0$ $\frac{h}{\omega(h)}<A<+\infty$ ist. In diesem Falle ergibt sichd er Beweis durch Anwendung des Satzes 2 der zitierten Arbeit.

In der Tat ist E ein vektorieller, normierter und vollständiger Raum. Die Funktionaloperation

$$U(x,t,h)=\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\omega(h)}\right|$$

erfüllt offenbar die dort verlangten Bedingungen 1) und 2). Bezeichnet H die Menge der trigonometrischen Polynome des Argumentes $2\pi t$, so ist H eine überall dichte Teilmenge von E und für ein beliebiges Element w aus H hat man

$$U(w,t,h)=\left|\frac{w(t+h)-w(t)}{\omega(h)}\right|=\left|\frac{w(t+h)-w(t)}{h}\right|\frac{h}{\omega(h)}\leqslant$$
$$\leqslant A\,.\,\mathrm{Max}\,|w'(t)|\,.$$

Um Funktionen $g(t)$ aus E zu bilden, welche den Bedingungen a), b) von Satz 2 a. a. O. genügen, kann man folgendermaßen verfahren:

[3]) Über Beispiele stetiger Funktionen, welche die in Satz 1 angegebene Eigenschaft besitzen, vgl. G. F a b e r, Math. Ann. 66 (1909) p. 81—94 und S. R u z i e w i c z, Stud. Math. 3 (1931) p. 185—188.

Sei $\varphi(t)$ die den Bedingungen $\varphi(0)=(1)=0$, $\varphi(1/2)=1/2$ genügende, im übrigen stetige und lineare Funktion von der Periode 1. Bezeichnen dann r, M beliebige positive Zahlen, so kann man $g(t)=r\varphi(nt)$ setzen, wo n eine hinreichend große natürliche Zahl bedeutet [4]). Denn es ist $g(t)$ ein Element von E mit der Norm $\|g\|=r/2<r$. Wie leicht ersichtlich, gibt es ferner zu jedem t ein $h_t(0<h_t<1/n)$, wofür $|\varphi[n(t+h_t)]-\varphi(nt)|\geqslant 1/4$, also

$$U(g,t,h_t)=r\left|\frac{\varphi(nt+nh_t)-\varphi(nt)}{\omega(h_t)}\right|\geqslant\frac{r}{4\,\omega(h_t)}$$

ist. Es genügt also n so groß zu wählen, daß für $0<h<1/n$ $\omega(h)<4/rM$ gilt.

Damit ist der Satz bewiesen für den Fall, daß $\dfrac{h}{\omega(h)}$ beschränkt ist.

Wir nehmen jetzt an, daß $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\dfrac{h}{\omega(h)}=+\infty$ ist [5]). Dann gibt es eine nach Null konvergente Folge $\{h_p\}$ $(h_p>0)$, für welche $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{h_p}{\omega(h_p)}=+\infty$ ist. Nach § 1 a. a. O. hat man für jedes x aus E, welches nicht einer gewissen Menge erster Kategorie angehört,

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\left|\frac{x(t+h_p)-x(t)}{\omega(h_p)}\right|=+\infty\,,$$

also auch

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\left|\frac{x(t+h_p)-x(t)}{\omega(h_p)}\right|=\overline{\lim_{p\to\infty}}\left|\frac{x(t+h_p)-x(t)}{h_p}\right|\frac{h_p}{\omega(h_p)}=+\infty$$

und schließlich

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{\omega(h)}\right|=+\infty$$

für alle t.

Beweis von Satz 2. Wir setzen $\beta_m=\alpha+\dfrac{1}{m}$ und bezeichnen mit E_n^m die Menge aller $x(t)$ aus H^α, welche die folgende Eigenschaft haben:

[4]) Herr S. Kaczmarz hat zuerst derartige Funktionen $g(t)$ benutzt.

[5]) Da es nur auf das Verhalten für $h\to 0$ ankommt, sind damit alle Fälle erschöpft.

Für wenigstens ein (von x abhängiges) t und alle $h>0$ ist

$$\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h^{\beta_m}}\right|\leqslant n.$$

Wie leicht ersichtlich, sind die Mengen E_n^m $(m,n=1,2,\ldots)$ abgeschlossen. Es genügt offenbar zu zeigen, daß sie nirgends dicht sind.

Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß etwa die Menge E_N^M einen inneren Punkt enthält. D. h., es gibt eine Funktion $w(t)$ aus E_N^M und ein $r>0$ derart, daß jedes x aus H^α, welches für alle t der Ungleichung $|x(t)-w(t)|<r$ genügt, ebenfalls in E_N^M enthalten ist.

Da wir jedes x aus H^α durch ein ebenfalls in H^α enthaltenes trigonometrisches Polynom des Argumentes $2\pi t$ — etwa eines seiner Fejérschen Polynome — beliebig genau approximieren können, dürfen wir annehmen, daß $w(t)$ ein derartiges Polynom ist. Wir können weiter voraussetzen, daß $w(t)$ einer Ungleichung

$$|w(t+h)-w(t)|\leqslant c\,|h|^\alpha$$

mit $0<c<1$ genügt, da man dies durch Multiplikation mit einer hinreichend wenig von 1 kleineren Konstanten erreichen kann.

Man hat für jedes t und jedes $h>0$

$$\left|\frac{w(t+h)-w(t)}{h^{\beta_M}}\right|=\left|\frac{w(t+h)-w(t)}{h}\right|\,|h|^{1-\beta_M}\leqslant A,$$

wo A eine obere Schranke von $|w'(t)|$ und $|w(t+h)-w(t)|$ bedeutet.

Um zu einem Widerspruch zu gelangen, genügt es eine stetige Funktion $g(t)$ von der Periode 1 zu konstruieren, so daß

1° $|g(t+h)-g(t)|\leqslant(1-c)\,|h|^\alpha$,

2° zu jedem t gibt es ein $h_t>0$, wofür

$$\left|\frac{g(t+h_t)-g(t)}{h_t^{\beta_M}}\right|>N+A,$$

3° $\|g(t)\|<r$.

Denn setzt man $x(t)=w(t)+g(t)$, so ist wegen 1°

$$|x(t+h)-x(t)| \leqslant |w(t+h)-w(t)|+|g(t+h)-g(t)|$$
$$\leqslant c|h|^{\alpha}+(1-c)|h|^{\alpha}=|h|^{\alpha},$$

und wegen 2°

$$\left|\frac{x(t+h_t)-x(t)}{h_t^{\beta_M}}\right| \geqslant \left|\frac{g(t+h_t)-g(t)}{h_t^{\beta_M}}\right|-A>N.$$

D. h., x ist ein Element von H^{α}, welches in E_N^M nicht enthalten ist, trotzdem nach 3° $\|x-w\|<r$ gilt.

Es bezeichne wieder $\varphi(t)$ die im Beweise von Satz 1 benutzte stückweise lineare Funktion. Für $|h| \leqslant 1$ ist offenbar

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leqslant |h| \leqslant |h|^{\alpha}.$$

Wegen $|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leqslant 1/2$ gilt diese Ungleichung auch für $|h|>1$.

Wählt man eine der Ungleichung $\alpha<\gamma<\beta_M$ genügende Zahl γ und setzt $g(t)=\frac{1}{n^{\gamma}}\varphi(nt)$, so erfüllt diese Funktion $g(t)$ die Forderungen 1°, 2°, 3°, wenn n eine hinreichend große natürliche Zahl ist.

Denn man hat

$$|g(t+h)-g(t)|=\frac{\varphi(nt+nh)-\varphi(nt)}{n^{\gamma}} \leqslant \frac{n^{\alpha}|h|^{\alpha}}{n^{\gamma}}=\frac{1}{n^{\gamma-\alpha}}|h|^{\alpha}.$$

Zu einem jeden t gibt es, wie wir schon wissen, ein h^t $(0<h_t<1/n)$ derart, daß $|\varphi(nt+nh_t)-\varphi(nt)| \geqslant 1/4$, also

$$\left|\frac{g(t+h_t)-g(t)}{h_t^{\beta_M}}\right| \geqslant \frac{1}{4n^{\gamma}|h_t|^{\beta_M}}>\frac{1}{4n^{\gamma}\frac{1}{n^{\beta_M}}}=\frac{1}{4}n^{\beta_M-\gamma}$$

ist.

Endlich ist

$$\|g(t)\|=\frac{1}{n^{\gamma}}\|\varphi(nt)\|=\frac{1}{2n^{\gamma}}.$$

Es genügt also n so groß zu wählen, daß $\frac{1}{n^{\gamma-\alpha}} \leqslant 1-c$, $\frac{1}{4}n^{\beta_M-\gamma}>N+A$ und $\frac{1}{2n^{\gamma}}<r$ ist.

(Reçu par la Rédaction le 7. 5. 1931).

Ein Beispiel zur Hölderschen Bedingung

von

S. RUZIEWICZ (Lwów).

Sei $\varphi(h)$ eine innerhalb eines Intervalls $(0, h_0)$ $(h_0>0)$ erklärte und von Null verschiedene Funktion von der Eigenschaft, daß

(1) $$\lim_{h \to +0} \varphi(h)=0$$

ist. Über ihre Stetigkeit setzen wir nichts voraus.

Wir werden in dieser Note eine stetige Funktion $f(x)$ definieren, welche für alle x die Bedingung

(2) $$\overline{\lim_{h \to +0}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}\right|=\infty$$

erfüllt [1].

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, dürfen wir annehmen, daß $\varphi(h)$ eine in $(0, h_0)$ positive nichtabnehmende Funktion ist. Bezeichnet man nämlich mit $\psi(h)$ die obere Grenze von $\varphi(t)$ für $0<t \leqslant h$ $(0<h<h_0)$, so ist $\psi(t)$ eine derartige, zugleich mit h nach Null strebende Funktion. Eine Funktion $f(x)$, für welche bei beliebigem x

$$\overline{\lim_{h \to +0}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{\psi(h)}\right|=\infty$$

stattfindet, genügt offenbar auch der Bedingung (2).

[1]) Das erste Beispiel einer derartigen Funktion wurde von Herrn G. Faber angegeben (Math. Ann. 66 (1909) p. 81—94); vgl. auch H. Auerbach und S. Banach, Über die Höldersche Bedingung, Stud. Math. 3 (1931) p. 180. Das hier mitgeteilte Beispiel ist wohl einfacher.