

Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen

von

S. BANACH (Lwów).

Einleitung.

Im § 1 wird eine Methode angegeben, welche die Existenz einer stetigen Funktion, für die in jedem Punkte eine der rechteitigen Derivierten unendlich groß ist, in einfacher Weise festzustellen gestattet. Diese Methode erlaubt zugleich zu zeigen, daß die Menge der Funktionen, welche die obige Eigenschaft besitzen, von der zweiten Kategorie ist. Sie ist verschieden von derjenigen des Herrn MAZURKIEWICZ¹⁾.

Im § 2 beweise ich einen allgemeinen Satz aus der Theorie der Funktionaloperationen, welcher das Ergebnis von § 1 als besonderen Fall enthält. Andere Anwendungen dieses Satzes findet man in einer Arbeit des Herrn KACZMARZ, sowie in einer Arbeit von mir und Herrn AUERBACH in demselben Bande dieser Zeitschrift.

§ 1.

Wir bezeichnen mit E den Raum der für $0 \leq t \leq 1$ erklärten und stetigen Funktionen $x = x(t)$ und setzen

$$\|x\| = \text{Max}_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \quad (x \in E).$$

Satz 1. Die Teilmenge A von E derjenigen Funktionen, für welche in keinem Punkte $t \neq 1$ die beiden rechteitigen Derivierten endlich sind, ist von der zweiten Kategorie, ihre Komplementärmenge \bar{A} ist von der ersten Kategorie.

¹⁾ S. Mazurkiewicz, Sur les fonctions sans dérivées, Stud. Math. 3 (1931) p. 92–94.

Beweis Wir bezeichnen mit E_n die Menge derjenigen Funktionen x aus E , deren jede für mindestens einen (von ihr abhängigen) Wert von t ($0 \leq t \leq 1 - 1/n$) die Ungleichung

$$\left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right| \leq n \quad (0 < h \leq 1-t)$$

erfüllt.

Die Mengen E_n ($n=2, 3, \dots$) sind offenbar abgeschlossen und man hat

$$\bar{A} = \sum_{n=2}^{\infty} E_n.$$

Die Menge \bar{A} ist also ein F_σ , daher A selbst ein G_δ .

Es genügt zu zeigen, daß jedes E_n nirgendsdicht ist.

Ist etwa E_N keine nirgendsdichte Menge, so muß es, als abgeschlossene Menge, eine Kugel K enthalten. Es gibt offenbar ein innerhalb dieser Kugel enthaltenes Polynom w und eine Zahl $r > 0$ derart, dass jedes x aus E , für welches $\|x - w\| < r$ ist, in K und damit in E_N enthalten ist.

Wir bezeichnen mit $g(t)$ irgend eine Funktion aus E , welche für $0 \leq t < 1$ eine rechteitige Ableitung $g'_+(t)$ besitzt und den Bedingungen

$$\|g\| < r, \quad |g'_+(t)| > \left\| \frac{dw}{dt} \right\| + N \quad (0 \leq t < 1)$$

genügt. (Man bildet leicht solche stückweise lineare Funktionen).

Die Funktion $z = w + g$ ist in E enthalten und man hat für $0 \leq t < 1$

$$|z'_+(t)| \geq g'_+(t) - \left\| \frac{dw}{dt} \right\| > \left\| \frac{dw}{dt} \right\| + N - \left\| \frac{dw}{dt} \right\| = N.$$

Daher gehört z nicht zu E_N .

Andererseits ist aber $\|w - z\| = \|g\| < r$ also $z \in K \subset E_N$, was einen Widerspruch ergibt.

Bemerkung. Man beweist ganz ähnlich den folgenden Satz:

Sei $\{h_p\}$ eine beliebige nach Null konvergente Folge positiver Zahlen. Mit Ausnahme gewisser Funktionen, welche eine Menge erster Kategorie bilden, besitzt jedes x aus E die folgende Eigenschaft:

Es ist

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{x(t+h_p) - x(t)}{h_p} \right| = +\infty$$

für alle $t < 1$.

§ 2.

Wir beweisen jetzt einen Satz, welcher denjenigen von § 1 als Spezialfall enthält.

Es sei E ein vektorieller normierter und vollständiger Raum und $U(x, t, h)$ eine für alle x aus E , sowie alle den Ungleichungen

$$0 \leq t < 1, \quad 0 < h \leq 1 - t$$

genügenden Werte von t, h erklärte Funktionaloperation, welche jedem dieser Wertsysteme (x, t, h) eine nichtnegative Zahl zuordnet, derart, daß:

1) bei festem h ist $U(x, t, h)$ eine stetige Funktionaloperation von x, t ,

2) für beliebige x, y aus E und beliebige, die angegebenen Ungleichungen erfüllende Werte von t, h ist

$$U(-x, t, h) = U(x, t, h)$$

und

$$U(x+y, t, h) \leq U(x, t, h) + U(y, t, h).$$

Wir setzen ferner voraus, daß eine überalldichte Teilmenge H von E existiert, von der Eigenschaft, daß jedem Elemente w von H eine positive Zahl M_w zugeordnet werden kann, für welche

$$U(w, t, h) \leq M_w \quad (0 \leq t < 1, 0 < h \leq 1 - t)$$

ist. Bezeichnet noch A die Menge derjenigen Elemente $x \in E$, für welche

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} U(x, t, h) = +\infty \quad (0 \leq t < 1)$$

ist, so kann man, unter den vorstehenden Voraussetzungen, den folgenden Satz aussprechen:

Satz 2. Wenn zu beliebig gegebenen Zahlen $r > 0$ und $M > 0$ stets ein Element g von E vorhanden ist von der Eigenschaft, daß:

a) $\|g\| < r$,

b) zu jedem $t \neq 1$ ein $h_t > 0$ existiert, wofür $U(g, t, h_t) > M$

ist, so ist die Menge A von der zweiten Kategorie und ihre Komplementärmenge \bar{A} von der ersten Kategorie.

Der Beweis wird ähnlich wie in § 1 geführt. Anstatt des Ausdrucks $\left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right|$ betrachten wir $U(x, t, h)$. Mit E_n bezeichnen wir jetzt die Menge derjenigen Elemente x aus E , deren jedes für mindestens einen (von ihm abhängigen) Wert von t ($0 \leq t \leq 1 - 1/n$) die Ungleichung

$$U(x, t, h) \leq n \quad (0 < h \leq 1 - t)$$

erfüllt.

Die Mengen E_n sind abgeschlossen und es ist

$$\bar{A} = \sum_{n=2}^{\infty} E_n.$$

Es genügt wieder zu zeigen, daß alle E_n nirgends dicht sind.

Wir nehmen an, E_N sei nicht nirgendsdicht. Dann gibt es ein Element $w \in H$ und ein $r > 0$, so daß die durch die Ungleichung $\|x - w\| < r$ gegebene Kugel K in E_N enthalten ist.

Da w ein Element von H ist, gibt es ein $M > 0$, für welches die Ungleichung

$$U(w, t, h) < M - N \quad (0 \leq t < 1, 0 < h \leq 1 - t)$$

stattfindet.

Nach Voraussetzung gibt es ein Element g , welches bei unserer Wahl von r und M , den Bedingungen a), b) unseres Satzes entspricht.

Setzt man also $z = w + g$, so ist einerseits $\|z - w\| = \|g\| < r$, d. h., z ist in K enthalten.

Andererseits hat man für alle $t \neq 1$ und entsprechende h_t

$$\begin{aligned} U(z, t, h_t) &\geq U(g, t, h_t) - U(w, t, h_t) \\ &> M - (M - N) = N, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass z nicht in K enthalten sein kann.

Damit ist unser Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Man beweist ganz ähnlich den Satz, welcher aus dem obigen entsteht, wenn man für h nur diejenigen Werte zuläßt, welche einer gegebenen nach Null konvergenten Folge positiver Zahlen $\{h_p\}$ angehören.

Bemerkung 2. Bezeichnet man, wie in § 1, mit E den Raum der in $(0, 1)$ stetigen Funktionen $x(t)$, so genügt das Funktional

$$U(x, t, h) = \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right|$$

allen oben ausgesprochenen Bedingungen.

Wie leicht zu sehen, kann man für H die Menge aller Polynome nehmen.

Man erhält Funktionen $g(t)$, welche den Forderungen a), b) von Satz 2 entsprechen, indem man z. B. stückweise lineare Funktionen bildet, deren absoluter Betrag klein ist, deren rechtsseitige Ableitung aber überall größer als eine beliebig gegebene Zahl ist.

Daher ist Satz 1 in der Tat ein Spezialfall von Satz 2. Andere Anwendungen dieses letzteren Satzes findet man in einer Arbeit des Herrn KACZMARZ²⁾.

In der gemeinsam mit Herrn AUERBACH³⁾ veröffentlichten Arbeit wird der Satz 2 sowie die zu seinem Beweise angewandte Methode benützt.

Bemerkung 3. Es ist interessant, daß man unter den eingangs dieses § gemachten Voraussetzungen, jedoch ohne die außerdem in Satz 2 gemachte Annahme zu benützen, den folgenden Satz beweisen kann:

Satz 3. *Die Menge A ist entweder leer oder von der zweiten Kategorie. Im letzteren Falle ist ihre Komplementärmenge von der ersten Kategorie.*

Beweis. Bei dem Beweise von Satz 2 zeigten wir bereits, daß die Menge A ein G_δ ist. Wir nehmen an, daß sie nicht leer ist. Für ein beliebiges $x_0 \in A$ und jedes $w \in H$ hat man dann

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} U(x_0 + w, t, h) \geq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} U(x_0, t, h) - \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} U(w, t, h),$$

woraus nach Definition der Mengen A, H folgt, daß $x_0 + w$ in A enthalten ist. Da die Menge H überall dicht in E ist, gilt das Gleiche von der Menge aller $x_0 + w$, also auch von A .

²⁾ S. Kaczmarz, Integrale vom Dinischen Typus, Stud. Math. 3 (1931) p. 189—199.

³⁾ H. Auerbach und S. Banach, Über die Höldersche Bedingung, Stud. Math. 3 (1931) p. 180—184.

Da eine überall dichte Menge vom Typus G_δ bekanntlich von der zweiten Kategorie ist, ist damit gezeigt, daß A von der zweiten Kategorie ist. Da ferner jedes G_δ die BAIRESche Bedingung erfüllt, ist die Komplementärmenge \overline{A} von der ersten Kategorie.

(Reçu par la Rédaction le 7. 5. 1931).