STUDIA MATHEMATICA, T. XXIX. (1968)

Über lineare Differentialgleichungen im Mikusińskischen Operatorenkörper

von

PETER SCHATTE (Rostock)

Bekanntlich sind im Mikusińskischen Operatorenkörper (bezüglich der Terminologie vgl. Mikusiński [5]) die linearen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}x(\lambda)+wx(\lambda) = 0 \tag{1}$$

nichttrivial lösbar, wenn $w = as^{\alpha}$ mit beliebig komplexem a und $\alpha < 1$ ist. Man kann dies beispielsweise nach einem Satz von C. Ryll-Nardzewski in [8] über die Konvergenz von Operatorreihen durch Reihenentwicklung zeigen. Wir wollen hier den Konvergenzsatz von C. Ryll-Nardzewski verallgemeinern. Als Anwendung ergibt sich, daß (1) für eine größere Klasse von Operatoren w nichttrivial lösbar ist. Die Operatoren w können dabei noch von λ abhängen. Wir erhalten so in vereinfachter Weise ein Ergebnis von Stanković in [11]. Anschließend werden einige Folgerungen untersucht. Unter anderem wird gezeigt, daß (1) selbst dann nicht immer mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst werden kann, wenn w Quotient zweier transformierbarer Funktionen ist.

1. Vorgelegt sei die Operatorreihe

$$\gamma_0+\gamma_1(s^{\alpha+1}f)+\gamma_2(s^{\alpha+1}f)^2+\ldots \tag{2}$$

mit den komplexen Zahlen γ_n und $\alpha > 0$, dem Differentiationsoperator s und der für $t \geqslant 0$ stetigen Funktion $f = f(t)$. Über die Konvergenz von (2) beweisen wir folgenden

SATZ 1. *Gibt es eine Zahl $\delta > \alpha$ derart, daß*

$$\limsup n^{\delta n}|\gamma_n| < \infty,$$

so ist die Reihe (2) *im Sinne von Mikusiński* [5] (S. 132) *konvergent.*

Beim Beweis handelt es sich um eine leichte Modifikation des Beweises von Ryll-Nardzewski in [8]. Wir führen die Hilfsfunktion

$$\varphi(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(zt-z^{\beta})\,dz$$

mit $(a+1)/(\delta+1) < \beta < 1$ ein [1]. Der Operator

$$s^{\gamma}\varphi = \int_{-i\infty}^{i\infty} z^{\gamma}\exp(zt - z^{\beta})\,dz$$

ist für beliebig reelles γ eine stetige Funktion, und es gilt

$$|s^{\gamma}\varphi| \leqslant 2\int_{0}^{\infty} x^{\gamma}\exp\left(-x^{\beta}\cos\frac{\beta\pi}{2}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\beta}\left(\cos\frac{\beta\pi}{2}\right)^{-(\gamma+1)/\beta}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\beta}\right).$$

Aus der letzten Ungleichung und der bekannten in $0 \leqslant t \leqslant T$ für $n \geqslant 1$ gültigen Abschätzung

$$|\{f(t)\}^{n}| \leqslant \frac{T^{n-1}M^{n}}{(n-1)!},$$

wo M eine obere Schranke von $f(t)$ in $0 \leqslant t \leqslant T$ ist, folgt

$$|\varphi\gamma_{n}(s^{a+1}f)^{n}| \leqslant An^{-\delta n}\frac{2}{\beta}\left(\cos\frac{\beta\pi}{2}\right)^{-(an+n+1)/\beta}\Gamma\left(\frac{an+n+1}{\beta}\right)\frac{T^{n-1}M^{n}}{(n-1)!}$$

mit einem geeignetem $A > 0$. Nach Anwendung der Stirlingschen Formel auf $\Gamma\big((an+n+1)/\beta\big)$ erkennt man, daß die mit $\varphi(t)$ multiplizierte Reihe (2) in jedem endlichen Intervall $0 \leqslant t \leqslant T$ gleichmäßig konvergiert. Somit ist (2) konvergent im Sinne von Mikusiński.

Satz 1 wurde von Ryll-Nardzewski in [8] für den Spezialfall $a = 1$, $f(t) \equiv 1$ und von Stanković in [10] für $a > 0$ beliebig, aber auch nur für $f(t) \equiv 1$ bewiesen.

Anstatt Stetigkeit von $f(t)$ zu fordern, genügt es offenbar vorauszusetzen, daß $f(t)$ meßbar und in jedem endlichen Intervall bis auf eine Menge vom Maße Null beschränkt ist. Dagegen reicht die Voraussetzung der Integrierbarkeit nicht aus, wie das Beispiel $f(t) = 1/\sqrt{t}$, $\gamma_n = 1/n!$ zeigt (vgl. Ryll-Nardzewski [8]).

Eine andere Verallgemeinerung von Satz 1 erhält man, wenn man komplexe α zuläßt und $\delta > \operatorname{Re}\alpha$ fordert. Ist nämlich $\alpha = a+bi$, $a < \delta$, so kann $s^{a+bi}f$ in der Form $s^{(a+\delta)/2}s^{(a-\delta)/2+bi}f$ mit $(a+\delta)/2 < \delta$ und der stetigen Funktion $s^{(a-\delta)/2+bi}f$ dargestellt werden. Weiterhin ergibt sich eine Verallgemeinerung, wenn $f(t)$ ein Faltungsprodukt von k stetigen Funktionen ist. In (2) kann dann $a+1$ durch $a+k$ ersetzt werden.

Hängt $f(t) = f(t, \lambda)$ noch von einem Parameter λ ab und existiert in jedem endlichen t-Intervall eine von λ unabhängige obere Schranke

[1] Die Potenzen von z sind als Hauptwert zu verstehen.

von $f(t, \lambda)$, so konvergiert (2) gleichmäßig bezüglich λ. *Ist $f(t, \lambda)$ nach λ differenzierbar und ist $f_{\lambda}(t, \lambda)$ zweidimensional stetig, so ist der Grenzwert von* (2) *im Sinne von Mikusiński* [5] (S. 169) *differenzierbar und seine Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation von* (2).

2. Wir wollen nun Satz 1 auf lineare Differentialgleichungen anwenden.

FOLGERUNG 1. *Ist $w = s^{a}g(\lambda)$, wo $a < 2$ und $g(\lambda) = g(t, \lambda)$ in jedem Rechteck $0 \leqslant t \leqslant T$, $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ mit beliebigem $T > 0$ zweidimensional stetig ist, so besitzt* (1) *für $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ genau eine Lösung, die der Anfangsbedingung $x(\lambda_1) = q$ (q ein beliebiger Operator) genügt.*

Der Eindeutigkeitsbeweis läßt sich genauso wie im Falle konstanter Koeffizienten erbringen (vgl. Mikusiński [5], S. 176). Zum Nachweis der Existenz bedeutet es offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $a > 1$ annehmen. Wir setzen

$$f(t, \lambda) = -\int_{\lambda_1}^{\lambda} g(t, \mu)\,d\mu \quad \text{und} \quad \gamma_n = 1/n!.$$

Dann konvergiert die Reihe (2) gegen eine Operatorfunktion $x(\lambda)$, deren Ableitung durch gliedweise Differentiation von (2) gewonnen werden kann. Man sieht sofort, daß $qx(\lambda)$ die Gleichung (1) und die Anfangsbedingung befriedigt.

Folgerung 1 findet sich bei Stanković in [11]. Für $g(t, \lambda) \equiv \text{const.}$ ergibt sich das eingangs zitierte Resultat als Spezialfall, für $a = 0$, $g(t, \lambda) = g(t)$ folgt die gleichfalls wohlbekannte Tatsache (vgl. Mikusiński [5], S. 179), daß (1) für jede stetige Funktion $w = w(t)$ eine nichttriviale Lösung besitzt.

Verallgemeinerungen auf komplexe a und auf den Fall, daß $g(t, \lambda)$ Faltungsprodukt von k zweidimensional stetigen Funktionen $g_i(t, \lambda)$ ist, ergeben sich wie im Anschluß an Satz 1. Ist $g(t, \lambda)$ nicht von λ abhängig, so kann man Folgerung 1 sofort auf eine Klasse von Differentialgleichungen höherer Ordnung verallgemeinern.

FOLGERUNG 2. *Ist $g = g(t)$ eine stetige Funktion, so gibt es im Falle $a < k+1$ genau eine Lösung von*

$$\frac{\partial^{k}}{\partial\lambda^{k}}x(\lambda) - s^{a}gx(\lambda) = 0 \tag{4}$$

unter den Anfangsbedingungen $x^{(i)}(0) = q_i$, $i = 0, \ldots, k-1$.

Zum Beweis betrachten wir die Funktionen

$$x_{\nu}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\nu+kn}}{(\nu+kn)!}(s^{a}g)^{n}$$

für $\nu = 0, \ldots, k-1$. Nach Satz 1 sind die Reihen konvergent. Die aus den $x_\nu(\lambda)$ gebildete Funktion

$$x(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} q_i x_i(\lambda)$$

genügt der Gleichung (4) und den Anfangsbedingungen.

Die in Folgerung 1 und 2 betrachteten Gleichungen sind somit logarithmisch. Nach einem Satz von Mikusiński in [5], S. 315, der sich auch wieder ohne weiteres auf Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten übertragen läßt, haben dann auch die entsprechenden inhomogenen Gleichungen bei stetiger rechter Seite genau eine Lösung unter vorgegebenen Anfangsbedingungen.

3. Wir können Folgerung 1 benutzen, um zu zeigen, daß (1) selbst dann nicht immer mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst werden kann, wenn w Quotient zweier transformierbarer Funktionen ist. Zu diesem Zweck setzen wir

$$g(t) = \left\{\frac{1}{t^{5/8}}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}\right\} = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/8}\int_0^1 \frac{\sin(1/t\tau)\,d\tau}{(1-\tau)^{5/8}\tau^{1/2}} \tag{5}$$

für $t \neq 0$ und $g(0) = 0$. Der Funktion $g(t)$ entspricht die Bildfunktion

$$G(s) = \Gamma(3/8)\sqrt{\pi}\, s^{-7/8} e^{-\sqrt{2s}} \sin\sqrt{2s}$$

(vgl. Doetsch [3], S. 121, die Potenzen von s sind als Hauptwerte zu verstehen). Wir zeigen, daß $g(t)$ stetig ist. Für $t \neq 0$ geht dies unmittelbar aus (5) hervor, für $t = 0$ benutzen wir die Zerlegung

$$g(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/8}\int_0^1 \frac{\sin(1/t\tau)\,d\tau}{(1-\tau)^{5/8}\tau^{11/8}} + t^{7/8}\int_0^1 (\tau^{3/2}-\tau^{5/8})\left(\frac{1}{t\tau^2}\sin\frac{1}{t\tau}\right)d\tau.$$

Im ersten Integral führen wir die Substitution $\tau = 1/(\varrho t+1)$ durch, im zweiten integrieren wir partiell und erhalten

$$g(t) = t^{1/4}\int_0^\infty \sin(\varrho+1/t)\frac{d\varrho}{\varrho^{5/8}} + $$
$$+ t^{7/8}\int_0^1 \left(\frac{5}{8}\tau^{-3/8} - \frac{3}{2}\tau^{1/2}\right)\left(\cos\frac{1}{t\tau}\right)d\tau = O(t^{1/4})$$

für $t \to 0$. Wegen der Stetigkeit von $g(t)$ besitzt nun (1) für

$$w = \frac{s^{15/8}}{\Gamma(3/8)\sqrt{\pi}}\{g(t)\} = s e^{-\sqrt{2s}}\sin\sqrt{2s}$$

nach Folgerung 1 eine nichttriviale Lösung $x(\lambda)$ mit $x(0) = 1$.

Wir nehmen an, $x(\lambda)$ ist in einer Umgebung I von $\lambda = 0$ als Quotient $x(\lambda) = \{u(t,\lambda)\}/\{v(t,\lambda)\}$ zweier transformierbarer Funktionen $u(t,\lambda)$ und $v(t,\lambda)$ mit den entsprechenden Laplace-Transformierten $U(s,\lambda)$ und $V(s,\lambda)$ darstellbar. Außerdem mögen $U_\lambda(s,\lambda)$ und $V_\lambda(s,\lambda)$ für alle $\lambda \in I$ in einer rechten Halbebene $\operatorname{Re} s > x$ zweidimensional stetig und beschränkt sein. Nach Berg [1] kann man den Operatoren $x(\lambda)$ für alle λ eine Restklasse von Folgen meromorpher Funktionen $\{U_n(s,\lambda)/V_n(s,\lambda)\}$ zuordnen. Auf Grund unserer Annahme besitzen diese Restklassen für jedes λ die von n unabhängigen Vertreter $U(s,\lambda)/V(s,\lambda)$. Ebenso kann man den Operatoren $x'(\lambda)$ Restklassen mit den von n unabhängigen Vertretern

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[U(s,\lambda)/V(s,\lambda)]$$

zuordnen (vgl. Berg [1], S. 224). Wegen der Differentialgleichung für $x(\lambda)$ besitzen die Operatoren $x'(\lambda)$ ebenfalls die von n unabhängigen Vertreter

$$-se^{-\sqrt{2s}}\sin\sqrt{2s}[U(s,\lambda)/V(s,\lambda)].$$

Da die von n unabhängigen Vertreter eindeutig bestimmt sind (vgl. Berg [1], S. 219), erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[U(s,\lambda)/V(s,\lambda)] + se^{-\sqrt{2s}}\sin\sqrt{2s}[U(s,\lambda)/V(s,\lambda)] = 0$$

und hieraus

$$U(s,\lambda)/V(s,\lambda) = \exp\{-\lambda s e^{-\sqrt{2s}}\sin\sqrt{2s}\} = f(s,\lambda).$$

Also ist $f(s,\lambda)$ für jedes λ aus I in einer rechten Halbebene $\operatorname{Re} s > x$ beschränktartig, d. h. als Quotient zweier beschränkter Funktionen darstellbar. Wir können offenbar $x > 0$ annehmen. Setzen wir $s = x + (1-z)/(1+z)$, so geht $f(s,\lambda)$ über in $g(z,\lambda) = f\big(x+(1-z)/(1+z),\lambda\big)$. Die Funktion $g(z,\lambda)$ ist im Innern des Einheitskreises $|z| < 1$ holomorph und beschränktartig und auf dem Rande mit Ausnahme des Punktes $z = -1$ noch stetig. Nach einem Kriterium von Nevanlinna [7], S. 190, muß dann

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|g(e^{i\vartheta},\lambda)|\,d\vartheta < \infty$$

sein ([2]). Wegen $g(e^{i\vartheta},\lambda) = f\big(x - i\tan(\vartheta/2),\lambda\big)$ folgt hieraus nach der Substitution $\tan(\vartheta/2) = -y$ die Bedingung

$$\int_0^\infty \frac{\log^+|f(x+iy,\lambda)|}{1+y^2}\,dy < \infty. \tag{6}$$

([2]) $\log^+ a = \begin{cases} \log a & \text{für } a \geqslant 1, \\ 0 & \text{für } a \leqslant 1. \end{cases}$

Mit der Abkürzung

$$A = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}+\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x} = 2\sqrt{y}+O(1/\sqrt{y}) \qquad (y \to \infty)$$

erhält man für $\lambda, y > 0$

$$\log|f(x+iy, \lambda)| = \frac{\lambda}{2}\left[e^{-2x/A}(y\cos A + x\sin A) + e^{-A}\left(y\cos\frac{2x}{A} - x\sin\frac{2x}{A}\right)\right].$$

Nun ist $\log|f(x+iy, \lambda)| \geqslant \lambda y/8$ für $(2k-1/8)^2 \leqslant y/\pi^2 \leqslant (2k+1/8)^2$, wenn die natürliche Zahl k hinreichend groß ist, und man erkennt, daß (6) für alle $\lambda > 0$ verletzt ist. Wir sind damit auf einen Widerspruch gestoßen.

Obwohl also die Gleichung (1) *für* $w = se^{-\sqrt{2s}}\sin\sqrt{2s}$ *eine Lösung* $x(\lambda)$ *mit* $x(0) = 1$ *besitzt, kann diese nicht mit Hilfe der Laplace-Transformation ermittelt werden.*

4. Besitzt die Gleichung (1) für einen Operator w eine nichttriviale Lösung, so nennt Mikusiński [5], S. 257, diesen Operator w einen *Logarithmus*. Als Argument des Logarithmus kann man nach Boehme [2], S. 351, den Operator $q = x(1)$ auffassen, wo $x(\lambda)$ mit $x(0) = 1$ eine Lösung von (1) ist. Man schreibt $w = \mathrm{LOG}\, q$. Für einen vorgegebenen Operator q ist w bis auf einen Summanden der Form $2k\pi i$ (k ganz) eindeutig bestimmt. Gesztelyi [4] definiert für einen Operator q den Logarithmus $\mathrm{Log}\, q$ als algebraisches Integral von Dq/q, wo Dq die algebraische Ableitung von q bedeutet. Damit wird $\mathrm{Log}\, q$ nur bis auf eine willkürliche additive Zahlenkonstante definiert.

Satz 2. *Existiert* $w_1 = \mathrm{LOG}\, q$ *im Sinne von Boehme, so existiert auch* $w_2 = \mathrm{Log}\, q$ *im Sinne von Gesztelyi und es ist* $w_2 - w_1$ *gleich einer komplexen Zahl.*

Ist nämlich $w_1 = \mathrm{LOG}\, q$ im Sinne von Boehme, so muß (1) für $w = w_1$ eine Lösung $x(\lambda)$ mit $x(0) = 1$ und $x(1) = q$ besitzen. Nach einem Satz von Mikusiński in [6] ist dann $Dq = Dx(1) = Dw_1 x(1)$ und $Dq/q = Dw_1$. Folglich ist w_1 ein algebraisches Integral von Dq/q und der Logarithmus existiert auch im Sinne von Gesztelyi. Infolge einer bekannten Eigenschaft der algebraischen Ableitung (vgl. Mikusiński [6]) muß die Differenz beider Logarithmen eine komplexe Zahl sein.

Boehme hat in [2] bewiesen, daß $\mathrm{LOG}\, q$ existiert, wenn $q = 1+f$ und $f = f(t)$ eine lokal integrierbare Funktion ist. Für dieselben Operatoren existiert dann auch $\mathrm{Log}\, q$. Dagegen wird in der Arbeit [9] eine Klasse von Operatoren q angegeben, für die $\mathrm{Log}\, q$ nicht existiert. Für dieselben Operatoren kann dann auch $\mathrm{LOG}\, q$ nicht existieren. Beispielsweise *existiert* $\mathrm{LOG}\{t\sin\log t\}$ *nicht*. Bisher waren keine Operatoren q bekannt, für die $\mathrm{LOG}\, q$ nicht existiert.

Literaturnachweis

[1] L. Berg, *Asymptotische Auffassung der Operatorenrechnung*, Studia Math. 21 (1962), S. 215-229.

[2] T. K. Boehme, *Operational calculus and the finite part of divergent integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), S. 346-368.

[3] G. Doetsch, *Tabellen zur Laplace-Transformation*, Berlin 1947.

[4] E. Gesztelyi, *Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten*, Publ. Math. Debrecen 10 (1963), S. 215-243.

[5] J. Mikusiński, *Operatorenrechnung*, Berlin 1957.

[6] — *Remarks on the algebraic derivative in the Operational Calculus*, Studia Math. 19 (1960), S. 187-192.

[7] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin 1953.

[8] C. Ryll-Nardzewski, *Sur la convergence des séries d'opérateurs*, Studia Math. 13 (1953), S. 37-40.

[9] P. Schatte, *Funktionentheoretische Untersuchungen im Mikusińskischen Operatorenkörper*, Math. Nachr. 35 (1967), S. 19-56.

[10] B. Stanković, *Operatori J. Mikusińskog*, Annuaire de la Faculté des lettres et sciences à Novi Sad, 7 (1962).

[11] — *Solution de l'équation différentielle dans un sous-ensemble des opérateurs de J. Mikusiński*, Publications de l'Institut Mathematique Beograd, Nouvelle série, tome 5 (19) (1965), S. 89-95.

Reçu par la Rédaction le 21. 6. 1966