STUDIA MATHEMATICA, T. XXIX. (1967)

Une remarque concernant la formule de Poisson

par

Y. KATZNELSON (Jerusalem)

Il s'agit de la formule

$$\sum f(n) = \sum \hat{f}(n) \tag{1}$$

ou $\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx$ est la transformée de Fourier de $f(x)$. L'on connaît plusieurs conditions qui entraînent la validité de (1), et comme ces conditions sont toujours visiblement trop restrictives on a tendance à prendre la formule (1) comme valable, pourvu que les deux sommes qui y figurent aient un sens et que $f(x)$ soit „raisonnable". Cette tendance n'est pas sans risque.

THÉORÈME. *Il existe une fonction $f(x) \in L^1 \cap C_0$ telle que $\hat{f}(\xi) \in L^1$, tel que $f(0) = 1, f(n) = 0$ si n est un entier différent de zéro et $\hat{f}(n) = 0$ pour tout entier n.*

Démonstration. Notons par μ_n la mesure (de Fejer) portée par les entiers de l'interval $[-n, n]$ ayant la masse $(n+1-|j|)/(n+1)^2$ au point j. Notons par $\varphi(x)$ la fonction (de Fejer) definie par $\varphi(x) = \operatorname{Sup}(1-|x|, 0)$. Posons $\varphi_{n,\varepsilon} = \mu_n * \varphi(x/\varepsilon)$ et remarquons que, pour $\varepsilon < 1$,

(i) $\|\varphi_{n,\varepsilon}\|_{L^1} = \int \varphi_{n,\varepsilon}\, dx = \varepsilon$.

(ii) $\hat{\varphi}_{n,\varepsilon}(\xi) \geqslant 0$, donc $\|\hat{\varphi}\|_{L^1} = \varphi(0) = 1/(\mu+1)$.

Il s'ensuit que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\varphi_{2^j, 2^{-j-1}}(x-4^j) - \varphi_{2^j, 2^{-j}}(x-4^j)\right) \tag{2}$$

ainsi que la série des transformées de Fourier des termes de (2) convergent dans $L^1 \cap C_0$. Posant

$$f(x) = \varphi(2x) + \sum_{1}^{\infty} \left(\varphi_{2^j, 2^{-j-1}}(x-4^j) - \varphi_{2^j, 2^{-j}}(x-4^j)\right) \tag{3}$$

on a $f \in L^1 \cap C_0$ et $\hat{f} \in L^1 \cap C_0$. Comme les termes de (2) s'annulent sur les entiers et $\varphi(0) = 1$, $\varphi(n) = 0$ si $|n| \geqslant 1$, il résulte que $f(0) = 1, f(n) = 0$ sur les entiers différents de zéro. Reécrivant (3):

$$(4)\quad f(x) = \varphi(2x) - \varphi_{2,2^{-1}}(x-4) + \sum \left(\varphi_{2^j,2^{-j-1}}(x-4^j) - \varphi_{2^{j+1},2^{-j-1}}(x-4^{j+1})\right)$$

$$= \left(\mu_0(x) - \mu_2(x-4)\right) * \varphi(2x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mu_{2^j}(x-4^j) - \mu_{2^{j+1}}(x-4^{j+1})\right) * \varphi(2^{j+1}x)$$

l'on voit que la transformée de Fourier de $\mu_0(x) - \mu_2(x-4)$, ainsi que celles de $\mu_{2^j}(x-4^j) - \mu_{2^{j+1}}(x-4^{j+1})$, s'annulent sur les entiers et par conséquent $\hat{f}(n) = 0$ pour tout n.

Reçu par la Rédaction le 24. 12. 1966