STUDIA MATHEMATICA, T. XXIX. (1968)

Об одном условии существования интеграла Петтиса [1]

Н. Н. ВАХАНИЯ (Тбилиси)

Пусть μ-мера (неотрицательная, счетно-аддитивная), определенная на σ-алгебре B подмножеств множества Ω и $x = x(\omega)$ — измеримое в слабом смысле отображение Ω в пространство Банаха X (комплексное или действительное). Интеграл Петтиса от x по мере μ и по множеству Ω определяется, как такой элемент $m \in X$, для которого при всяком $x^* \in X^*$ выполняется равенство

$$x^*(m) = \int_\Omega x^*\big(x(\omega)\big)\,\mu(d\omega), \tag{1}$$

где X^* обозначает банахово пространство, сопряженное к X и интеграл от числовых функций $x^*(\omega) \equiv x^*\big(x(\omega)\big)$ понимается в обычном смысле (как интеграл Лебега).

Известно (см., например, [1], стр. 91), что при выполнении естественного необходимого условия

$$x^*(\omega) \in L(\Omega, B, \mu) \quad \text{для всех } x^* \in X^* \tag{2}$$

интеграл (1), рассматриваемый как функционал от x^*, является непрерывным в норме пространства X^* и, следовательно, его можно считать элементом второго сопряженного пространства X^{**} (аддитивность очевидна). Таким образом, в случае рефлексивности пространства X необходимое условие (2) будет также и достаточным, а в общем случае нахождение условий существования интеграла Петтиса сводится к нахождению условий, обеспечивающих принадлежность интеграла, как элемента из X^{**}, образу пространства X при естественном вложении X в X^{**}. Поэтому для выяснения условий существования интеграла Петтиса естественно воспользоваться одной теоремой С. Банаха, в которой утверждается, что элемент $x^{**} \in X^{**}$ принадлежит образу пространства X при естественном вложении X в X^{**}, если функционал $x^{**}(x^*)$ непрерывен в X-топологии пространства X^*

[1] Результаты настоящей заметки были доложены на Международном конгрессе математиков в г. Москве летом 1966 года.

(достаточна, очевидно, непрерывность в нуле). Для случая, когда X сепарабельно, это условие означает, что из сходимости $x_n^*(x) \to 0$ при всех $x \in X$ вытекает сходимость $x^{**}(x_n^*) \to 0$ (теорему Банаха для этого случая см. в [2], стр. 131). Таким образом, теорема Банаха сводит вопрос по существу к нахождению условий допустимости предельного перехода под знаком интеграла (1) при поточечной сходимости подинтегральных функций. Однако, известные условия предельного перехода не приводят к содержательным формулировкам. Заметим, например, что теорема Лебега об ограниченной сходимости приводит к тривиальному условию существования интеграла Петтиса — к требованию интегрируемости нормы $\|x(\omega)\|$. Сформулированное ниже условие (3), являющееся по существу условием допустимости предельного перехода под знаком интеграла, дает нетривиальное и, как нам кажется, выраженное в естественных для существа дела терминах условие интегрируемости по Петтису. Мы предполагаем, что пространство X сепарабельно и мера μ конечна.

Теорема 1. *В принятых предположениях относительно пространства X и меры μ для существования интеграла Петтиса по Ω от слабо измеримой функции $x\colon \Omega \to X$ достаточно, помимо естественного необходимого условия* (2), *следующее условие: найдется такое число $\varepsilon > 0$, что*

$$\inf_{x^* \in X^*} \mu\Big\{\omega\colon \omega \in \Omega,\ |x^*(\omega)| \geqslant \varepsilon \Big|\int_\Omega x^*\big(x(\omega)\big)\mu(d\omega)\Big|\Big\} > 0. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим интеграл в правой части равенства (1) через $I(x^*)$. В силу указанных выше соображений, достаточно показать, что $I(x_n^*) \to 0$ для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $x_n^* \in X^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ линейных функционалов в X. Допуская обратное, придем к существованию числа $\delta > 0$ и подпоследовательности $\{x_{n_i}^*\}$, таких, что

$$|I(x_{n_i}^*)| \geqslant \delta, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Пусть далее

$$A_i = \{\omega\colon \omega \in \Omega,\ |x_{n_i}^*(\omega)| \geqslant \varepsilon |I(x_{n_i}^*)|\}$$

и

$$A = \overline{\lim_{i\to\infty}} A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i \geqslant n} A_i$$

верхний предел последовательности множеств A_i. Ожидаемое противоречие будет получено, если покажем, что множество A не является пустым. В самом деле, если $\omega_0 \in A$ и $x_0 = x(\omega_0)$, то согласно определению верхнего предела последовательности множеств и в силу неравенства (4), имели бы

$$|x_{n_i}^*(x_0)| \geqslant \varepsilon |I(x_{n_i}^*)| \geqslant \varepsilon\delta$$

для бесконечного множества номеров i. Но это противоречит слабой сходимости к нулю исходной последовательности линейных функционалов x_n^*. Таким образом, нужно гарантировать непустоту множества A. Этой цели служит как раз условие (3), в силу которого имеем даже $\mu(A) > 0$, так как очевидно, что для любой конечной меры μ справедливо неравенство

$$\mu(\overline{\lim_{i\to\infty}} A_i) \geqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} \mu(A_i).$$

После этого предложения естественно ожидать, что условие (3), достаточность которого мы сейчас доказали, не будет необходимым для существования интеграла Петтиса. Пример 1, который приводится ниже, оправдывает это ожидание. Пример 2 показывает однако, что условие (3) является естественным для интегрируемости по Петтису „условием в слабой форме" — из него не вытекает сильная интегрируемость (интегрируемость по Бохнеру), равносильная интегрируемости нормы $\|x(\omega)\|$.

Пример 1. Пусть $\Omega = \{\omega_n, n = 1, 2, \ldots\}$, B — σ-алгебра всех подмножеств Ω и мера μ определяется условиями

$$\mu(\omega_n) = \mu_n = \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Возьмем в качестве X гильбертово пространство l_2 суммируемых в квадрате вещественных числовых последовательностей $x = \{x_k\}$ и определим функцию $x\colon \Omega \to l_2$ следующим образом: $x(\omega_n) = x^{(n)}$, где $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}$, $x_k^{(n)} = 0$ при $k \neq n$ и $x_n^{(n)} = n$. Пусть далее $e^{(n)}$ — линейный функционал в l_2, определяемый условиями $e^{(n)} = \{e_k^{(n)}\}$, $e_k^{(n)} = 0$ при $k \neq n$ и $e_n^{(n)} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, что при каждом n функция $e^{(n)}(\omega) \equiv e^{(n)}\big(x(\omega)\big)$ принимает всего два значения: $e^{(n)}(\omega_k) = 0$, если $k \neq n$ и $e^{(n)}(\omega_n) = n$. Поэтому

$$\int_\Omega e^{(n)}(\omega)\mu(d\omega) = n\mu_n$$

и, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$,

$$\mu\{\omega\colon \omega \in \Omega,\ |e^{(n)}(\omega)| \geqslant \varepsilon n\mu_n\} = \mu\{\omega\colon \omega \in \Omega,\ e^{(n)}(\omega) = n\} = \mu_n \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, условие (3) не выполнено. Однако, как легко проверить непосредственно, интеграл Петтиса в данном случае существует (и равняется элементу $\{m_k\}$, где $m_k = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$).

Пример 2. Пусть Ω и B определяются также, как в примере 1. Возьмем в качестве X банахово пространство c_0 сходящихся к нулю вещественных числовых последовательностей $x = \{x_k\}$ с нормой

$$\|x\| = \sup_k |x_k|,$$

и определим функцию $x\colon \Omega \to c_0$ следующим образом: $x(\omega_n) = x^{(n)}$, $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}$, где для $n = 2p-1$ имеем $x_k^{(2p-1)} = 0$ при $k \neq p$, $x_p^{(2p-1)} = p^2$ и для $n = 2p$ имеем $x_k^{(2p)} = 0$ при $k \neq p$, $x_p^{(2p)} = -p^2$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Меру μ определим равенствами $\mu(\omega_n) = \mu_n$, где $\mu_{2p-1} = \mu_{2p} = 1/p^2$, $p = 1, 2, \ldots$ Каждый линейный функционал в c_0 имеет вид

$$x^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* x_k, \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^*| < +\infty.$$

Поэтому имеем

$$\int_{\Omega} x^*(x(\omega))\,\mu(d\omega) = \sum_{p=1}^{\infty} x^*(x(\omega_{2p-1}))\,\mu_{2p-1} + \sum_{p=1}^{\infty} x^*(x(\omega_{2p}))\,\mu_{2p} =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} x^*(x^{(2p-1)})\frac{1}{p^2} + \sum_{p=1}^{\infty} x^*(x^{(2p)})\frac{1}{p^2} =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} x_p^* - \sum_{p=1}^{\infty} x_p^* = 0$$

и выполнение условия (3) очевидно. Однако интеграл Бохнера не существует, так как

$$\int_{\Omega} \|x(\omega)\|\,\mu(d\omega) =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \|x(\omega_{2p-1})\|\mu_{2p-1} + \sum_{p=1}^{\infty} \|x(\omega_{2p})\|\mu_{2p} = \sum_{p=1}^{\infty} 1 + \sum_{p=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Применяя идею примера 2, аналогичный пример легко построить также и в пространстве l_2. Таким образом, из условия (3) не вытекает интегрируемость по Бонхеру даже в случае сепарабельного гильбертова пространства.

Замечание. Определение интеграла Петтиса было приведено нами для случая интегрирования по всему множеству Ω. Совершенно аналогично определяется интеграл Петтиса и по произвольному измеримому множеству $E \subset \Omega$. Легко видеть что теорема 1 остается в силе и для этого случая. При этом, конечно, в условии (3) надо заменить Ω на E. Следует заметить, что из выполнения условия (3) для всего Ω не следует выполнение этого условия для $E \subset \Omega$. Это вытекает из следующего утверждения, имеющего самостоятельный интерес: в отличие от случая рефлексивного пространства X, в нерефлексивном случае из интегрируемости в смысле Петтиса по Ω **не** вытекает интегрируемость по произвольному измеримому множеству $E \subset \Omega$. Это утверждение можно продемонстрировать на приведенном выше примере 2. В самом деле, пусть $E = \{\omega_{2p-1}, p = 1, 2, \ldots\}$ и $x^* = \{x_k^*\} \in l_1$ — произвольный линейный функционал в c_0. Вспоминая обозначения примера 2, имеем

$$\int_{E} x^*(x(\omega))\,\mu(d\omega) = \sum_{p=1}^{\infty} x^*(x(\omega_{2p-1}))\,\mu_{2p-1} = \sum_{p=1}^{\infty} x^*(x^{(2p-1)})\frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{\infty} x_p^*.$$

Отсюда вытекает, что интеграл

$$\int_{E} x^*(x(\omega))\,\mu(d\omega),$$

рассматриваемый как линейный функционал в $c_0^* = l_1$, определяется элементом $\{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ из c_0^{**}, не принадлежащим c_0. Следовательно, интеграл Петтиса по множеству E не существует, в то время как по Ω интеграл существует (и равняется нулевому элементу пространства c_0).

Понятие интеграла Петтиса встречается в различных областях анализа. Укажем здесь одно применение полученного результата в теории вероятностных процессов. С точки зрения этой теории функция $x\colon \Omega \to X$ представляет собой случайный элемент со значениями в X, определенный в вероятностном пространстве (Ω, B, μ) (мы сейчас предполагаем, что мера нормирована условием $\mu(\Omega) = 1$). С каждым таким случайным элементом естественно связывается семейство обычных (комплексных или вещественных) случайных величин $x^*(\omega) = x^*(x(\omega))$, $x^* \in X^*$, и многие свойства случайного элемента выражаются в терминах соответствующего семейства $\{F^{x^*}\}$ распределений вероятностей случайных величин $x^*(\omega)$. Заметим, например, что случайный элемент x (или индуцированное случайным элементом x распределение вероятностей на борелевских множествах пространства X) называется *нормальным* (*гауссовским*), если F^{x^*} является для каждого $x^* \in X^*$ гауссовским распределением (на комплексной плоскости или вещественной оси).

Известно, что для определения математического ожидания случайного элемента $x\colon \Omega \to X$ наиболее подходящим понятием интеграла является интеграл Петтиса, который также определяется в терминах указанного выше семейства распределений $\{F^{x^*}\}$. В частности, интеграл в правой части равенства (1), который можно, например, в случае вещественного X переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dF^{x^*}(t),$$

является математическим ожиданием $E(x^*)$ распределения F^{x^*} (или случайной величины x^*). Ясно, что

$$\mu\{\omega: \omega\in\Omega, |x^*(\omega)| \geqslant |E(x^*)|\} = \sigma(x^*) > 0$$

для любого фиксированного линейного функционала $x^*\in X^*$. Однако, как показывает пример 1, условие $\sigma(x^*) > 0$ не выполняется, вообще говоря, равномерно в X^*. Именно в требовании этой равномерности и заключается достаточное для интегрируемости по Петтису условие (3), выраженное таким образом в тех терминах, в которых дается само определение интеграла Петтиса.

Пусть теперь x — нормальный случайный элемент со значениями в X. Имея в виду рассматриваемый сейчас вопрос, можно считать, не ограничивая общности, что пространство X вещественно. Тогда $x^*(\omega)$ будет при всех $x^*\in X^*$ действительной гауссовской случайной величиной и очевидно, что

$$\mu\{\omega: \omega\in\Omega, x^*(\omega) \geqslant E(x^*)\} = \mu\{\omega: \omega\in\Omega, x^*(\omega) \leqslant E(x^*)\} = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда получаем $\sigma(x^*) \geqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, простым следствием теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Существует математическое ожидание любого нормального случайного элемента со значениями в произвольном сепарабельном пространстве Банаха.*

Частные случаи этой теоремы были получены ранее непосредственными рассуждениями в работах Мурье [3] (случай сепарабельного пространства Гильберта) и автора [4], [5] (случай пространств l_p, $1 \leqslant p < \infty$).

Литература

[1] Э. Хилле и Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы* Москва 1962.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[3] E. Mourier, *Eléments aléatories dans un espace de Banach*, Ann. Inst. H. Poincaré 13 (1953), стр. 161-244.

[4] N. Vakhania, *Sur une propriété des répartitions normales de probabilités dans les espaces l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ et H*, Comptes Rend. Acad. Sc. Paris 260 (1965), стр. 1334-1336.

[5] Н. Н. Вахания, *О характеристических функционалах для случайных последовательностей*, Труды ВЦ АН Грузинской ССР, V: 1 (1965), стр. 5-32.

Reçu par la Rédaction le 17. 1. 1967

STUDIA MATHEMATICA, T. XXIX. (1968)

On the general form of subalgebras of codimension 1 of B-algebras with a unit

by

Z. SAWOŃ and A. WARZECHA (Warszawa)

Let X be a Banach algebra with unit e. It is known [1] that

0.1. *Every subalgebra X_0 of X of codimension 1 such that $e\notin X_0$ is a set of all zeros of a linear and multiplicative functional on X, and conversely.*

In this paper we shall give some theorems on the general form of subalgebras of X such that $e\in X_0$ and codim $X_0 = 1$. Their class for a given X will be denoted by $\mathfrak{K}(X)$.

1. It is easy to verify that

1.0.1. Lemma. *$X_0\in\mathfrak{K}(X)$ if and only if there exists an $x_0^*\in X^*$ such that*

1. $X_0 = \{x\in X: x_0^*(x) = 0\}$.
2. $x_0^*(e) = 0$, $x_0^* \neq 0$.
3. *If* $x_0^*(x) = 0$, *then* $x_0^*(x^2) = 0$.

Indeed, if $X_0\in\mathfrak{K}(X)$, then X_0 is a zero-set of linear functional such that $x_0^*\in X^*$ and since X_0 is a subalgebra with e of X, conditions 2 and 3 must hold.

Inversely, if $x_0^*\in X^*$, then the set

$$X_0 = \{x\in X: x_0^*(x) = 0\}$$

is a linear subspace of X, codim $X_0 = 1$ and $e\in X_0$ in view of 2, and if $x, y\in X$, then

$$x_0^*(xy) = \tfrac{1}{4}x_0[(x+y)^2]-\tfrac{1}{4}x_0^*[(x-y)^2] = 0,$$

whence $xy\in X$ and $X_0\in\mathfrak{K}(X)$.

It follows from Lemma 1.0.1 that every subalgebra of the class $\mathfrak{K}(X)$ is determined by a linear functional on X which has properties 2 and 3.

---

[1] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Москва 1956, p. 183.