STUDIA MATHEMATICA, T. XXIX. (1968)

Sur les ensembles d'interpolation de C. Ryll-Nardzewski et de S. Hartman

par

J. F. MÉLA (Paris)

Introduction. C. Ryll-Nardzewski (cf. [3] ou [16]) a introduit la notion suivante:

Définition 1. Un sous ensemble Λ d'un groupe abélien localement compact Γ est un *ensemble d'interpolation*, si toute fonction bornée sur Λ peut être prolongée sur Γ en une fonction presque périodique.

La présente étude trouve son maximum d'intérêt dans le cas où Γ n'est ni compact ni discret (ex.: $\Gamma = R$).

Suivant une notation de S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski, nous dirons aussi qu'un ensemble d'interpolation est *de type* (I_0). Pour les besoins de la présente étude, nous proposons d'étendre la définition des ensembles de type (I_0).

Définition 2. Soit E un sous-ensemble d'un groupe abélien localement compact Γ et $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une partition de $E(E_\lambda \neq \emptyset)$. E sera dit de type (I_0) relativement à $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, si toute fonction bornée sur E, constante sur chaque E_λ, est prolongeable sur Γ en une fonction presque-périodique. Nous dirons aussi que $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ constitue une *famille de type* (I_0).

Suivant cette terminologie, un ensemble d'interpolation est de type (I_0) relativement à sa partition triviale.

Nous supposerons dans la suite que *Γ est un groupe métrisable*. En effet, si certains résultats subsistent dans un cas plus général, comme nous pourrons le signaler, cette étude est basée, en grande partie, sur les résultats du § I qui sont établis dans l'hypothèse d'un groupe métrisable.

Les théorèmes du § I caractérisent la „répartition arithmétique" des ensembles d'interpolation ou des ensembles qui ont une partition (I_0) de cardinal au moins égal à 2. La méthode de démonstration est analogue à celle développée dans [6].

Comme conséquence des résultats du § I, nous démontrerons notamment (§ II), par une construction explicite des fonctions d'interpolation:

Tout ensemble uniformément borné de fonctions sur un ensemble d'interpolation est prolongeable dans un unsemble uniformément équicontinu de fonctions presque périodiques à série de Fourier absolument convergente.

J.-P. Kahane avait déjà montré [6] que toute fonction bornée peut être interpolée par une fonction presque-périodique à série absolument convergente.

Nous déduisons de ce résultat (§ III) quelques *propriétés de stabilité* des ensembles d'interpolation — certaines déjà énoncées par S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski dans le cas où Γ est un groupe séparable [2].

Des résultats analogues sont obtenus pour les ensembles qui ont une partition (I_0).

Les ensembles d'interpolation sont, en particulier, des *ensembles de Sidon*: toute fonction bornée sur Λ peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure sur le groupe G, dual de Γ. Dans le § IV nous préciserons *les ensembles de G sur lesquels ces mesures d'interpolation peuvent être concentrées.*

S. Hartman a introduit également la notion d'ensemble de type (I) [3]:

Définition 3. Un ensemble E de Γ est *de type* (I), si toute fonction bornée, uniformément continue sur E, est prolongeable par une fonction presque-périodique.

Dans le § VI nous étudions certaines propriétés des ensembles de type $(\mathrm{I})_0$, en relation avec le type (I). Nous retrouvons notamment un résultat énoncé dans [2] dans le cas les groupes séparables:

Tout ensemble d'interpolation possède un voisinage qui est un ensemble (I).

Nous introduisons, dans le § V, une *notion d'ordre* pour les ensembles (I_0) et nous établissons, dans le cas $\Gamma = R$, un résultat sur la décomposition d'un ensemble d'ordre donné en sous-ensembles d'ordres inférieurs.

Ce résultat nous permet notamment de montrer, dans le § VII: L'adhérence dans $\bar{R}$, groupe compactifié de Bohr de R, d'un ensemble de R qui admet une partition (I_0) en sous-ensembles relativement compacts est un *ensemble d'unicité de* $\bar{R}$.

En particulier, on en déduit:

L'adhérence dans $\bar{R}$ d'un *ensemble* (I) de R est un *ensemble d'unicité* (donc, est de mesure de Haar nulle dans $\bar{R}$, ainsi qu'il est établi en [4]).

Nota. Les notations qui ne seraient pas définies sont celles de [13].

I. Ensembles de type (I_0) dans les groupes métrisables

1. Ensembles d'interpolation. Soit Γ un groupe abélien localement compact métrisable. Il est équivalent de dire que son dual G est dénombrable à l'infini. Si $x \in G$, $\gamma \in \Gamma$, on notera (x, γ) la valeur du caractère γ au point x. Si $\bar{\Gamma}$ est le groupe compactifié de Bohr de Γ, $C(\bar{\Gamma})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Gamma}$, $PP(\Gamma)$ l'espace des fonctionspre sque-périodiques sur Γ, $PP(\Gamma)$ est restriction à Γ de $C(\bar{\Gamma})$.

Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble d'interpolation. Soit $\mathscr{B}(\Lambda)$ l'espace des fonctions bornées sur Λ. Par définition, $\mathscr{B}(\Lambda)$ est interpolable sur Γ par $PP(\Gamma)$, donc sur $\bar{\Gamma}$ par $C(\bar{\Gamma})$. A partir de là, on établit aisément la caractérisation [3]:

Λ est un ensemble d'interpolation si, et seulement si, pour toute partition de Λ en deux sous-ensembles Λ' et Λ'', les adhérences de Λ' et Λ'' dans $\bar{\Gamma}$ sont disjointes.

Il est intéressant de définir un ensemble de voisinages de 0 dans $\bar{\Gamma}$, aussi restreint que possible, soit $\mathscr{V}$, tel que, pour toute partition (Λ', Λ'') de Λ, il existe un $V \in \mathscr{V}$ pour lequel $\Lambda' + V$ et $\Lambda'' + V$ sont disjoints. Dans [6] il est montré que l'on peut choisir pour $\mathscr{V}$ l'ensemble des voisinages de 0 dont la mesure de Haar est un $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda) > 0$. Dans [4], les auteurs montrent qu'il est possible, en faisant une hypothèse de séparabilité sur le groupe Γ, de prendre $\mathscr{V}$ réduit à un seul V, voisinage de 0 dans Γ. La méthode développée dans le § I, nous permettra de définir, dans le cas général d'un groupe métrisable, un ensemble $\mathscr{V}$ ayant des propriétés plus fortes que dans [6], et tel que l'intersection des $V \in \mathscr{V}$ est un voisinage de 0 dans Γ. En fait, ce système de voisinages sera défini en relation avec les propriétés de „répartition arithmétique" des ensembles de type (I_0). La plupart des propriétés démontrées dans la suite, résultent de l'existence de ce système $\mathscr{V}$.

Pour k entier positif et ε réel, $\varepsilon \in]0, 2\pi]$, soit $\Delta(k, \varepsilon)$ le pavé carré ouvert de T^k de centre l'identité et de côté ε. Un élément $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ de G^k définit un homomorphisme continu de Γ dans T^k

$$\gamma \to [(\xi_1, \gamma), \ldots, (\xi_k, \gamma)] = \xi(\gamma)$$

qui se prolonge continuement à $\bar{\Gamma}$. Les images réciproques, par tous les tels homomorphismes, des pavés $\Delta(k, \varepsilon)$ engendrent, lorsque k et ε varient, un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans $\bar{\Gamma}$. Ceci demeure vrai si l'on astreint ε à ne prendre que des valeurs rationnelles. Les $\Delta(k, \varepsilon)$ décrivent alors une famille dénombrable $(\Delta_j)_{j=1}^{\infty}$ que nous noterons aussi $\mathscr{D}$.

Notation. Pour un couple de sous-ensembles disjoints de Γ, Λ' et Λ'', et pour un pavé ouvert Δ de T^k nous poserons:

$$H_{\Delta}^{(\Lambda', \Lambda'')} = \{\xi \mid \xi \in G^k / [\xi(\Lambda') + \Delta] \cap [\xi(\Lambda'') + \Delta] = \emptyset\}.$$

Alors nous pouvons énoncer

Proposition 1. *Il y a équivalence entre*:

(i) *Λ est une suite d'interpolation*;

(ii) *pour toute partition (Λ', Λ'') de Λ, il existe $\Delta \in \mathscr{D}$ tel que $H_{\Delta}^{(\Lambda', \Lambda'')} \neq \emptyset$.*

Nous omettrons la démonstration.

Nous dirons dans la suite que $\Delta \in \mathscr{D}$ est *d'ordre* k si $\Delta \subset T^k$. Naturellement, à priori, l'ordre de Δ, dans la proposition précédente, dépend de la partition (Λ', Λ'') considérée. Notre objet est de montrer que l'on peut choisir non seulement le même ordre, mais le même Δ pour toutes les partitions (Λ', Λ'').

Définitions. Soit $\Delta \in \mathcal{D}$. Nous dirons que Λ *a la propriété* $P(\Delta)$ si, dans le (ii) de la proposition 1, nous pouvons prendre ce même Δ pour toutes les partitions (Λ', Λ'').

Soit $\Delta \in \mathcal{D}$ d'ordre k et K un compact de G^k, nous dirons que Λ *a la propriété* $P(\Delta, K)$, si pour toute partition (Λ', Λ'') de Λ, $H_\Delta^{(\Lambda'\Lambda'')} \cap K \neq \emptyset$.

Remarque 1. Nous utiliserons dans la suite, le fait, tout à fait évident, qu'un semble fini a toujours la propriété $P(\Delta, K)$, pour un certain couple (Δ, K).

Pour tout entier $k > 0$, G^k est dénombrable à l'infini. Il existe donc une famille dénombrable de compacts $\mathcal{K}_k$, telle que, pour tout compact K de G^k, il existe $K' \in \mathcal{K}_k$ pour lequel $K \subset K'$. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble somme de $(\mathcal{K}_k)_{k\in N}$. Un élément de $\mathcal{K}$ sera dit *d'ordre* k, s'il est contenu dans $\mathcal{K}_k$. $\mathcal{K}$ est évidemment dénombrable. Nous poserons $\mathcal{K} = (K_p)_{p=1}^{\infty}$.

Nous commencerons par démontrer deux lemmes.

Lemme 1. *Supposons qu'un ensemble d'interpolation Λ admette une partition finie, $(\Lambda_n)_{n=1}^{n=N}$, telle que chaque Λ_n ait la propriété $P(\Delta_{j_n}, K_{p_n})$, pour un certain couple (Δ_{j_n}, K_{p_n}); alors il existe un couple (Δ, K) $(\Delta \in \mathcal{D}$, $K \in \mathcal{K})$ tel que Λ ait la propriété $P(\Delta, K)$.*

Nous raisonnerons, pour simplifier l'écriture, dans le cas $N = 2$. De plus nous supposerons que $p_n = n$, $j_n = n$.

Puisque (Λ_1, Λ_2) est une partition de Λ, d'après la proposition (1), il existe $\Delta_{1,2} \in \mathcal{D}$ tel que $H_{\Delta_{1,2}}^{(\Lambda_1, \Lambda_2)} \neq \emptyset$. Il revient au même de dire que, pour un certain compact $K_{1,2} \in \mathcal{K}$, de même ordre que $\Delta_{1,2}$, on a

$$H_{\Delta_{1,2}}^{(\Lambda_1, \Lambda_2)} \cap K_{1,2} \neq \emptyset.$$

Soit (Λ', Λ'') une partition quelconque de Λ. Écrivons

$$\Lambda_1' = \Lambda_1 \cap \Lambda', \quad \Lambda_1'' = \Lambda_1 \cap \Lambda'', \quad \Lambda_2' = \Lambda_2 \cap \Lambda', \quad \Lambda_2'' = \Lambda_2 \cap \Lambda''.$$

Λ_1 a la propriété $P(\Delta_1, K_1)$:

$$H_{\Delta_1}^{(\Lambda_1', \Lambda_1'')} \cap K_1 \neq \emptyset.$$

Λ_2 a la propriété $P(\Delta_2, K_2)$:

$$H_{\Delta_2}^{(\Lambda_2', \Lambda_2'')} \cap K_2 \neq \emptyset.$$

Désignons par $k_1, k_2, k_{1,2}$, les ordres respectifs de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_{1,2}$. Soit $\Delta \in \mathcal{D}$ tel que

$$\Delta \subset \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_{1,2} \subset T^{k_1} \times T^{k_2} \times T^{k_{1,2}};$$

et soit $K \in \mathcal{K}$, tel que

$$K \supset K_1 \times K_2 \times K_{1,2} \subset G^{k_1} \times G^{k_2} \times G^{k_{1,2}};$$

alors

$$H_\Delta^{(\Lambda'\Lambda'')} \cap K \neq \emptyset.$$

En effet, choisissons $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{1,2}$, tels que

$$\zeta_1 \in H_{\Delta_1}^{(\Lambda_1'\Lambda_1'')} \cap K_1, \quad \zeta_2 \in H_{\Delta_2}^{(\Lambda_2'\Lambda_2'')} \cap K_2, \quad \zeta_{1,2} \in H_{\Delta_{1,2}}^{(\Lambda_1, \Lambda_2)} \cap K_{1,2}.$$

Considérons ζ, l'élément de K qui a pour projections $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{1,2}$, sur $G^{k_1}, G^{k_2}, G^{k_{1,2}}$, respectivement. Montrons que $\zeta \in H_\Delta^{(\Lambda'\Lambda'')}$. Il s'agit de vérifier que

$$[\zeta(\Lambda') + \Delta] \cap [\zeta(\Lambda'') + \Delta] = \emptyset.$$

Or

$$[\zeta(\Lambda') + \Delta] = [\zeta(\Lambda_1') + \Delta] \cup [\zeta(\Lambda_2') + \Delta],$$
$$[\zeta(\Lambda'') + \Delta] = [\zeta(\Lambda_1'') + \Delta] \cup [\zeta(\Lambda_2'') + \Delta].$$

Il suffit donc de montrer

$$(1) \qquad [\zeta(\Lambda_i') + \Delta] \cap [\zeta(\Lambda_j'') + \Delta] = \emptyset \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2).$$

Une relation (1) sera vraie si on peut la vérifier en projection sur un sous-espace de $T^{k_1+k_2+k_{1,2}}$. Or nous avons, par exemple,

$$Pr_{T^{k_{1,2}}}[\zeta(\Lambda_1') + \Delta] \subset [\zeta_{1,2}(\Lambda_1') + \Delta_{1,2}],$$
$$Pr_{T^{k_{1,2}}}[\zeta(\Lambda_2'') + \Delta] \subset [\zeta_{1,2}(\Lambda_2'') + \Delta_{1,2}]$$

et

$$[\zeta_{1,2}(\Lambda_1') + \Delta_{1,2}] \cap [\zeta_{1,2}(\Lambda_2'') + \Delta_{1,2}] = \emptyset,$$

ce qui démontre (1) pour $i = 1$, $j = 2$. On aurait de même

(1) pour $i = 2$, $j = 1$, en projetant sur $T^{k_{1,2}}$;
(1) pour $i = 1$, $j = 1$, en projetant sur T^{k_1};
(1) pour $i = 2$, $j = 2$, en projetant sur T^{k_2}.

Dans le cas général (N quelconque), il aurait fallu considérer tous les couples (Λ_n, Λ_p) d'ensembles de la partition $(\Lambda_n)_{n=1}^{N}$; mais le raisonnement aurait été le même.

Lemme 2. *Supposons que Λ ne possède pas la propriété $P(\Delta, K)$, pour un couple (Δ, K) donné. Alors Λ contient un sous-ensemble fini ne possédant pas la propriété $P(\Delta, K)$.*

Nous supposerons que Δ et K sont d'ordre k, de sorte que $K \subset G^k$. Si Λ ne possède pas la propriété $P(\Delta, K)$, c'est qu'il existe une partition (Λ', Λ'') de Λ telle que

$$H_\Delta^{(\Lambda', \Lambda'')} \cap K = \emptyset;$$

autrement dit, pour tout $\xi \in K$,

$$[\xi(\Lambda')+\Delta] \cap [\xi(\Lambda'')+\Delta] \neq \emptyset.$$

C'est donc qu'il existe $\lambda'_\xi \in \Lambda'$ et $\lambda''_\xi \in \Lambda''$ tels que

$$[\xi(\lambda'_\xi)+\Delta] \cap [\xi(\lambda''_\xi)+\Delta] \neq \emptyset;$$

λ'_ξ et λ''_ξ étant ainsi choisis, il existe un voisinage ouvert de ξ dans G^k, $V(\xi)$, tel que,

$$\forall \zeta \in V(\xi), \quad [\zeta(\lambda'_\xi)+\Delta] \cap [\zeta(\lambda''_\xi)+\Delta] \neq \emptyset.$$

La réunion des $V(\xi)$, lorsque ξ décrit K, constitue un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$V(\xi_1), \ldots, V(\xi_p),$$

auquel correspond une suite finie de couples (λ', λ''):

$$(\lambda'_1\lambda''_1), \ldots, (\lambda'_p, \lambda''_p).$$

Ainsi,

$$\forall \zeta \in K, \quad [\zeta(\lambda'_j)+\Delta] \cap [\zeta(\lambda''_j)+\Delta] \neq \emptyset$$

pour l'une au moins des valeurs $j = 1, \ldots, p$. Si nous notons

$$\Lambda_0 = \{\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p, \lambda''_1, \ldots, \lambda''_p\}$$
$$\Lambda'_0 = \{\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p\}, \quad \Lambda''_0 = \{\lambda''_1, \ldots, \lambda''_p\}$$

cela revient à dire que

$$\forall \zeta \in K, \quad [\zeta(\Lambda'_0)+\Delta] \cap [\zeta(\Lambda''_0)+\Delta] \neq \emptyset,$$

donc, que Λ_0 ne possède pas la propriété $P(\Delta, K)$.

THÉORÈME 1. *Si Λ est un ensemble d'interpolation, il existe $\Delta \in \mathcal{D}$, $K \in \mathcal{K}$, tels que Λ possède la propriété $P(\Delta, K)$* [1]

Nous avons posé

$$\mathcal{D} = (\Delta_j)_{j=1}^{\infty}, \quad \mathcal{K} = (K_p)_{p=1}^{\infty}.$$

Nous considérerons l'ensemble des couples (Δ_j, K_p), où Δ_j et K_p sont de même ordre. Cet ensemble est dénombrable. Nous raisonnerons par récurrence sur les couples d'indices (j, p) correspondants dont l'ensemble est supposé ordonné. Pour la concision de l'exposé nous ne formaliserons que la première étape.

Supposons que Λ ne possède la propriété $P(\Delta, K)$ pour aucun couple (Δ, K). Le couple (Δ_1, K_1) étant donné, Λ ne possède donc pas la propriété $P(\Delta_1, K_1)$; alors, en vertu du lemme 2, Λ contient un ensemble fini, $\Lambda_{1,1}$, qui ne possède pas la propriété $P(\Delta_1, K_1)$. C'est-à-dire qu'il existe une partition $(\Lambda'_{1,1}, \Lambda''_{1,1})$ de $\Lambda_{1,1}$, telle que

$$H_{\Delta_1}^{(\Lambda'_{1,1}, \Lambda''_{1,1})} \cap K_1 = \emptyset.$$

Considérons alors l'ensemble $\Lambda \setminus \Lambda_{1,1}$. Il ne peut avoir la propriété $P(\Delta, K)$ pour un certain couple (Δ, K): en effet, sinon, $(\Lambda \setminus \Lambda_{1,1}, \Lambda_{1,1})$ constituerait une partition finie de Λ qui satisferait aux hypothèses du lemme (1) (cf. remarque 1), et, en vertu de ce lemme, Λ lui-même aurait la propriété $P(\Delta', K')$ pour un couple (Δ', K'). Nous pouvons donc recommencer le raisonnement précédent en considérant, au lieu de Λ, l'ensemble $\Lambda \setminus \Lambda_{1,1}$ et, au lieu du couple (Δ_1, K_1), le couple suivant. Nous construirons ainsi une famille infinie $(\Lambda_{j,p})$. Posons

$$\Lambda^* = \bigcup \Lambda_{j,p}.$$

Λ^* est un ensemble d'interpolation dont (Λ_{jp}) constitue une partition infinie telle que Λ_{jp} ne possède pas la propriété $P(\Delta_j, K_p)$. Chaque Λ_{jp} admet une partition $(\Lambda'_{jp}, \Lambda''_{jp})$ telle que

$$H_{\Delta_j}^{(\Lambda'_{jp}, \Lambda''_{jp})} \cap K_p = \emptyset.$$

Posons alors

$$\Lambda^{*\prime} = \bigcup_{jp} \Lambda'_{jp}, \quad \Lambda^{*\prime\prime} = \bigcup_{jp} \Lambda''_{jp}.$$

$(\Lambda^{*\prime}, \Lambda^{*\prime\prime})$ constitue une partition de Λ^*. D'après la proposition (1), il existe un $\Delta_{j_0} \in \mathcal{D}$, tel que

$$H_{\Delta_{j_0}}^{(\Lambda^{*\prime}, \Lambda^{*\prime\prime})} \neq \emptyset.$$

Nous pouvons dire, de façon équivalente, qu'il existe $K_{p_0} \in \mathcal{K}$, de même ordre que Δ_{j_0}, tel que

$$H_{\Delta_{j_0}}^{(\Lambda^{*\prime}, \Lambda^{*\prime\prime})} \cap K_{p_0} \neq \emptyset.$$

Mais, puisque $\Lambda'_{j_0,p_0} \subset \Lambda^{*\prime}$ et $\Lambda''_{j_0,p_0} \subset \Lambda^{*\prime}$, ceci entraine que

$$H_{\Delta_{j_0}}^{(\Lambda'_{j_0p_0}, \Lambda''_{j_0p_0})} \cap K_{p_0} \neq \emptyset,$$

ce qui fournit une contradiction si l'on se réfère à la construction précédente.

2. Familles $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de type (I_0) $(\operatorname{card} \Lambda > 1)$. Tout ce qui a été dit dans ce paragraphe pour les ensembles d'interpolation se transcrit pour les familles $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de type (I_0), à condition que Λ possède au moins deux éléments distincts $(E_\lambda \neq \emptyset)$. Nous nous bornerons ici à transcrire les principales définitions et les principaux résultats.

[1] Une présentation plus élégante du théorème 1 nous a été suggérée par P. Malliavin; elle sera publiée ultérieurement ainsi qu'une réciproque du théorème.

Pour une partition (Λ', Λ'') de Λ, nous noterons (et ces notations seront utilisées constamment dans la suite):

$$E_{\Lambda'} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} E_\lambda, \quad E_{\Lambda''} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda''} E_\lambda,$$

$$\mathscr{H}_\Delta^{(\Lambda'\Lambda'')} = \{\xi \mid \xi \in G^k \mid [\xi(E_{\Lambda'}) + \Delta] \cap [\xi(E_{\Lambda''}) + \Delta] = \emptyset\}.$$

Nous avons alors, par le même raisonnement que pour la proposition 1:

PROPOSITION 2. *Il y a équivalence entre:*

(i) $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *est de type* (I_0),

(ii) *pour toute partition* (Λ', Λ'') *de* Λ, *il existe* $\Delta \in \mathscr{D}$, *tel que* $\mathscr{H}_\Delta^{(\Lambda'\Lambda'')} \neq \emptyset$.

Nous définirons de façon évidente les propriétés $P^*(\Delta)$ et $P^*(\Delta, K)$ correspondant aux propriétés $P(\Delta)$ et $P(\Delta, K)$:

La famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ possédera *la propriété* $P^*(\Delta, K)$ s'il existe un couple (Δ, K), $\Delta \in \mathscr{D}$, $K \in \mathscr{K}$, Δ et K de même ordre, tel que, pour toute partition (Λ', Λ'') de Λ,

$$\mathscr{H}_\Delta^{(\Lambda',\Lambda'')} \cap K \neq \emptyset.$$

Nous aurons alors, par le même raisonnement que pour le théorème 1:

THÉORÈME 2. *Si la famille* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *est de type* (I_0) *et si card* $(\Lambda) > 1$, *elle possède la propriété* $P^*(\Delta, K)$ *pour un certain couple* (Δ, K).

II. Classes de fonctions d'interpolation

1. Ensembles d'interpolation. Si Λ est un ensemble d'interpolation, $\mathscr{B}(\Lambda)$ peut être interpolé par $PP(\Gamma)$ sur Γ (ou encore, par $C(\bar{\Gamma})$ sur $\bar{\Gamma}$).

Il résulte de [6] que l'on peut prendre les fonctions presque-périodiques d'interpolation à série de Fourier absolument convergente. Autrement dit, $\mathscr{B}(\Lambda)$ peut être interpolé par $A(\bar{\Gamma})$. Ceci entraîne:

a) $\bar{\Lambda}$ *est un ensemble de Helson dans* $\bar{\Gamma}$, puisque $C(\bar{\Lambda}) = A(\bar{\Lambda})$. (Pour les propriétés des ensembles de Helson cf. [8] et [13]).

b) Λ *est un ensemble de Sidon dans* Γ, puisque $A(\bar{\Gamma})$ admet comme restriction à Γ, l'algèbre des transformées de Fourier des mesures atomiques bornées sur G.

(Λ est dit *ensemble de Sidon* dans Γ, si $\mathscr{B}(\Lambda)$ peut être interpolé par $B(\Gamma)$ (cf. [13] pour le cas Γ discret).)

Λ possède donc les propriétés arithmétiques classiques des ensembles de Helson et de Sidon, qui donnent une mesure de sa lacunarité (on trouvera ces propriétés établies pour T dans [8]).

Comme conséquence du théorème 1, § I, nous pouvons donner une construction explicite des fonctions d'interpolation et montrer:

THÉORÈME 1. *Si Λ est un ensemble d'interpolation, la boule unité de $\mathscr{B}(\Lambda)$ peut être interpolée par une famille de fonctions presque-périodiques, uniformément équicontinue sur Γ et bornée dans $A(\bar{\Gamma})$.*

Il suffit de montrer que la propriété est vraie pour les fonctions réelles $f(\lambda)$, $0 \leqslant f(\lambda) \leqslant 1$. Une telle fonction peut s'écrire

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} f_j(\lambda),$$

en utilisant le développement binaire des nombres réels. Les f_j sont des idempotents de l'algèbre $\mathscr{B}(\Lambda)$. Il suffit donc de montrer:

PROPOSITION. *Les idempotents de $\mathscr{B}(\Lambda)$ peuvent être interpolés par un sous-ensemble borné de $A(\bar{\Gamma})$, équicontinu sur Γ.*

D'après le théorème 1, § 1, Λ possède la propriété $P(\Delta, K)$ pour un certain couple (Δ, K) d'ordre k. Soit $e(\lambda)$ un idempotent de $\mathscr{B}(\lambda)$. Il lui correspond une partition (Λ', Λ'') de Λ:

$$\Lambda' = \{\lambda \mid \lambda \in \Lambda \mid e(\lambda) = 1\}, \quad \Lambda'' = \{\lambda \mid \lambda \in \Lambda \mid e(\lambda) = 0\}.$$

Soit $\xi_e \in H_\Delta^{(\Lambda'\Lambda'')} \cap K$. Par définition,

$$[\xi_e(\Lambda') + \Delta] \cap [\xi_e(\Lambda'') + \Delta] = \emptyset;$$

quitte à remplacer Δ par un pavé strictement plus petit, nous pouvons supposer que

$$\overline{\xi_e(\Lambda') + \Delta} \cap \overline{\xi_e(\Lambda'') + \Delta} = \emptyset.$$

Donc il existe une fonction réelle, continue sur T^k, Ψ_e, telle que $0 \leqslant \Psi_e \leqslant 1$,

$$\Psi_e = \begin{cases} 1 & \text{sur } \overline{\xi(\Lambda') + \Delta}, \\ 0 & \text{sur } \overline{\xi(\Lambda'') + \Delta}. \end{cases}$$

Soit alors χ une fonction positive de classe C^∞, à support dans Δ, et telle que

$$\|\chi\|_{L^1(T^k)} = \int_{T^k} \chi(t)\, dt = 1.$$

Considérons la régularisée de Ψ_e par χ, soit Φ_e:

$$\Phi_e = \Psi_e * \chi,$$

$$\Phi_e(t) = \Phi_e(t_1, \ldots t_k) = \sum_{(n_1,\ldots,n_k)\in Z^k} \hat{\Phi}_e(n_1, \ldots, n_k) e^{i(n_1t_1 + \ldots + n_kt_k)}.$$

a) $\Phi_e \in C^\infty(T^k)$ et, pour tout $p = (p_1, \ldots, p_k)$ indice multiple de dérivation,

$$\sup_{t\in T^k} \left| \frac{\partial^p \Phi_e}{\partial t^p} \right| \leqslant \sup_{t\in T^k} \left| \frac{\partial^p \chi}{\partial t^p} \right|.$$

Pour tout entier q, il existe une constante M_q, ne dépendant que de χ, telle que

$$\sum_{n\in Z^k} |n|^q |\hat{\Phi}_e(n)| < M_q$$

avec $n = (n_1, \ldots, n_k)$, $|n| = |n_1| + \ldots + |n_k|$.

b) On vérifie facilement que $0 \leqslant \Phi_e \leqslant 1$,

$$\Phi_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in \xi(\Lambda'), \\ 0 & \text{si} \quad t \in \xi(\Lambda''). \end{cases}$$

Pour chaque idempotent, nous pouvons effectuer la construction précédente avec la même fonction χ. Il en résulte notamment que la famille E des Φ_e est équicontinue sur T^k et bornée dans $A(T^k)$.

D'autre part, ξ_e appartient à K qui est une famille uniformément équicontinue d'homomorphismes de Γ dans T^k. Ecrivons

$$F_e(\gamma) = \Phi_e \circ \xi_e(\gamma).$$

F_e interpole e et

$$\|F_e\|_{A(\bar{\Gamma})} \leqslant \|\Phi_e\|_{A(T^k)}.$$

Par composition, la famille $\mathscr{F}$ des F_e est uniformément équicontinue et bornée dans $A(\bar{\Gamma})$.

Dans le cas $\Gamma = R$, nous pouvons préciser le résultat du théorème 1:

THÉORÈME 2. *Si $\Lambda \subset R$ est un ensemble d'interpolation, la boule unité de $\mathscr{B}(\Lambda)$ peut être interpolée par une famille de fonctions presque-périodiques de classe C^∞, bornée dans C^∞ ($\forall p$ les dérivées d'ordre p forment un ensemble uniformément borné).*

2. Ensembles de type (I_0) relativement à une partition $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (card $\Lambda > 1$). Soit $\mathscr{B}(E, (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ l'algèbre des fonctions bornées sur E, constantes sur chaque E_λ. La démonstration précédente se transcrit sans difficulté et nous avons:

THÉORÈME 3. *Si E est de type (I_0) relativement à $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, la boule unité de $\mathscr{B}(E, (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ peut être interpolée par une famille uniformément équicontinue de fonctions presque-périodiques à série de Fourier absolument convergente.*

On a aussi l'analogue du théorème 2.

III. Propriétés de stabilité

Les théorèmes 1 et 3 du § II nous permettent de démontrer certaines propriétés de stabilité des ensembles d'interpolation et des ensembles qui admettent une partition (I_0) de cardinal au moins égal à 2.

1. Stabilité par translations. Soit E un ensemble admettant une partition de type (I_0), $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $(\mathrm{card}(\Lambda) > 1)$. Il existe, d'après le théorème 3, § II, une famille équicontinue $\mathscr{F}$ de fonctions presque-périodiques qui interpolent les idempotents de $\mathscr{B}(E, (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$. Pour δ donné $(0 < \delta < \frac{1}{2})$, il existe un voisinage de 0 dans Γ, Ω, tel que, si $\gamma' - \gamma'' \in \Omega$,

$$\forall f \in \mathscr{F}, \quad |f(\gamma') - f(\gamma'')| < \tfrac{1}{2} - \delta.$$

A tout idempotent de $\mathscr{B}(E, (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, défini par une partition (Λ', Λ'') de Λ, il correspond $f \in \mathscr{F}$ qui l'interpole sur E. Ω étant choisi comme indiqué,

$$f > \tfrac{1}{2} + \delta \quad \text{sur} \quad E_{\Lambda'} + \Omega,$$
$$f < \tfrac{1}{2} - \delta \quad \text{sur} \quad E_{\Lambda''} + \Omega.$$

Il en résulte que $E_{\Lambda'} + \Omega$ et $E_{\Lambda''} + \Omega$ ont des adhérences disjointes dans $\bar{\Gamma}$; et Ω est indépendant de la partition (Λ', Λ'').

THÉORÈME 1. *Si E est de type (I_0) relativement à la partition $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $(\mathrm{card}(\Lambda) > 1)$, il existe un voisinage de 0 dans Γ, Ω, tel que $E + \Omega$ est de type (I_0) relativement à la partition $(E_\lambda + \Omega)_{\lambda\in\Lambda}$.*

En particulier, appliquons ce théorème dans le cas où chaque E_λ est réduit à un élément, c'est-à-dire où nous avons un ensemble d'interpolation.

COROLLAIRE 1. *Si Λ est un ensemble d'interpolation, il existe un voisinage de 0 dans Γ, Ω, tel que $\Lambda + \Omega$ est de type (I_0) relativement à la partition $(\lambda + \Omega)_{\lambda\in\Lambda}$.*

Or, étant donné une famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de type (I_0), on obtient un ensemble d'interpolation $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en choisissant, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, un élément γ_λ de E_λ. Nous dirons que Λ et Λ' sont *Ω-voisins* s'il existe une bijection de Λ sur Λ' telle que, si λ' est l'image de λ, on a $\lambda - \lambda' \in \Omega$. Nous pouvons énoncer:

COROLLAIRE 2. *Si Λ est un ensemble d'interpolation, il existe un voisinage de 0 dans Γ, Ω, tel que tout ensemble Λ' Ω-voisin de Λ est un ensemble d'interpolation.*

On pourra comparer ces résultats avec [4].

2. Stabilité par réunion. Soit Λ un ensemble d'interpolation et Λ_1 un ensemble fini, $\Lambda \cup \Lambda_1$ est-il ensemble d'interpolation? La réponse est affirmative et résulte de la construction des fonctions d'interpolation faite au § II. (Cf. [14] pour une autre méthode, dans le cas $\Gamma = R$.)

Il suffit évidemment de démontrer la propriété pour Λ_1 réduit à un seul élément; et comme la propriété, pour un ensemble, d'être d'interpolation, est stable par translation globale, nous pouvons supposer que cet élément est 0.

Si $0 \notin \Lambda$, pour que $\Lambda \cup \{0\}$ soit d'interpolation, il est nécessaire et suffisant que 0 ne soit pas adhérent à Λ dans $\bar{\Gamma}$. Supposons que 0 soit adhérent à Λ infini (le cas fini est trivial). Si $f \in PP(\Gamma)$ et si $f(\lambda) = 1$ pour tout λ de Λ sauf peut-être un nombre fini, nous aurons $f(0) = 1$.

Revenant aux notations du § II, les idempotents de $\mathscr{B}(\Lambda)$ peuvent être interpolés dans une famille équicontinue $\mathscr{F}$. Par construction, tout F de $\mathscr{F}$ est de la forme:

$$F = \Phi \circ \xi \qquad (\Phi \in E;\ \xi \in K).$$

Nous rappelons que E est un ensemble équicontinu de fonctions sur T^k (cf. § II). Choisissons $\Delta \in \mathscr{D}$, $\Delta \subset T^k$, de façon que

$$\forall t \in \Delta, \forall \Phi \in E, \qquad |\Phi(t) - \Phi(0)| < \tfrac{1}{2}.$$

ξ étant donné, puisque 0 est adhérent à Λ, il existe λ_ξ tel que $\xi(\lambda_\xi) \in \Delta$ et il existe un voisinage ouvert de ξ dans G^k, $V(\xi)$, tel que $\forall \zeta \in V(\xi)$, $\zeta(\lambda_\xi) \in \Delta$. Lorsque ξ décrit K, les $V(\xi)$ engendrent un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $V(\xi_1), \ldots, V(\xi_p)$, auquel correspond la suite finie $\lambda_{\xi_1}, \ldots, \lambda_{\xi_p}$. Alors, $\forall \zeta \in K$,

$$\zeta(\{\lambda_{\xi_1}, \ldots, \lambda_{\xi_p}\}) \cap \Delta \neq \emptyset.$$

Il en résulte que, pour tout F de $\mathscr{F}$,

$$|F(\lambda_{\xi_i}) - F(0)| < \tfrac{1}{2}$$

pour au moins une valeur de $i \in (1, \ldots, p)$. En particulier, si F interpole l'idempotent

$$e(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \in \{\lambda_{\xi_1}, \ldots, \lambda_{\xi_p}\}, \\ 1 & \text{sinon}, \end{cases}$$

nous aurons $|F(0)| < \frac{1}{2}$, alors que nous avons vu d'autre part que $F(0) = 1$.

Théorème 2. *Si Λ est un ensemble d'interpolation et Λ_1 un ensemble fini, $\Lambda \cup \Lambda_1$ est ensemble d'interpolation.*

Rappelons que la réunion de deux ensembles d'interpolation quelconques n'est pas, en général, d'interpolation, comme on le vérifie facilement en considérant par exemple les suites réelles $(3^j)_{j=1}^{\infty}$ et $(3^j + j)_{j=1}^{\infty}$.

Nous pouvons, comme conséquence du théorème 2, démontrer une propriété analogue pour les ensembles E qui admettent une partition $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de type (I_0), avec les E_λ relativement compacts.

Soit K un compact de Γ disjoint de l'adhérence de E dans Γ. Une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $((E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, K)$ soit de type (I_0) est que l'on ait

$$\bar{K} \cap \bar{E} = \emptyset$$

si $\bar{K}$ et $\bar{E}$ sont les adhérences de K et E dans $\bar{\Gamma}$). Mais, K étant compact, $\bar{K} = K$. Si donc $K \cap \bar{E} \neq \emptyset$, il existerait un élément γ de Γ adhérent à E dans $\bar{\Gamma}$, ce qui est impossible d'après le théorème 2 (adapté de façon évidente au cas où Λ est remplacé par $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, d'après le § II).

Théorème 3. *Soit E un ensemble (I_0) relativement à la partition $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, où les E_λ sont relativement compacts. Soit K un compact de Γ disjoint de l'adhérence de E dans Γ. Alors $E \cup K$ est de type (I_0) relativement à la partition $((E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, K)$.*

IV. Mesures d'interpolation

Nous avons déjà noté, dans le § II, que tout ensemble d'interpolation est un ensemble de Sidon: toute fonction bornée sur Λ peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure bornée sur G. Une telle mesure sera dite *mesure d'interpolation*. La construction que nous avons faite dans le § II nous permet de préciser les ensembles sur lesquels peuvent être concentrées les mesures d'interpolation.

1. Mesures d'interpolation atomiques. Reprenant les notations du § II, soit $e(\lambda)$ un idempotent de $\mathscr{B}(\Lambda)$. Il existe $\xi \in K \subset G^k$ et $\Phi \in A(T^k)$ tels que

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad F(\lambda) = \Phi \circ \xi(\lambda) = e(\lambda).$$

Ecrivons

$$\Phi(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{(n_1, \ldots, n_k) \in Z^k} \hat{\Phi}(n_1, \ldots, n_k) e^{i(n_1 t_1 + \ldots + n_k t_k)},$$

$$F(\gamma) = \sum_{(n_1, \ldots, n_k) \in Z^k} \hat{\Phi}(n_1, \ldots, n_k)(n_1 \xi_1 + \ldots + n_k \xi_k, \gamma).$$

F est la transformée de Fourier d'une mesure atomique bornée sur G:

$$\mu = \sum_{(n_1, \ldots, n_k) \in Z^k} \hat{\Phi}(n_1, \ldots, n_k)\, \delta_{n_1 \xi_1 + \ldots + n_k \xi_k}, \qquad \|\mu\| \leqslant \|\Phi\|_{A(T^k)}.$$

μ est concentrée sur le sous groupe de G engendré par $\xi_1, \ldots, \xi_k$, que nous noterons G_ξ.

Proposition 1. *Les idempotents de $\mathscr{B}(\Lambda)$ admettent comme mesures d'interpolation des mesures atomiques concentrées sur des sous groupes dénombrables à k générateurs, lesquels peuvent être pris dans le même compact de G.*

Comme toute fonction réelle de la boule unité de $\mathscr{B}(\Lambda)$ peut s'écrire

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} f_j(\lambda),$$

où les f_j sont des idempotents, elle peut être interpolée par une mesure concentrée sur une réunion dénombrable de G_ξ, qui engendre un sous groupe dénombrable de G.

Remarque. *Il n'est pas possible d'avoir le même sous groupe dénombrable pour toutes les fonctions de $\mathscr{B}(\Lambda)$, si Λ est infini.*

En effet, supposons qu'il existe un tel sous groupe $G' \subset G$. Soit $M(G')$ l'espace des mesures atomiques concentrées sur G', muni de sa topologie habituelle d'espace de Banach. $\mathscr{B}(\Lambda)$ est également un espace de Banach pour la topologie uniforme. Considérons l'application:

$$\mu \to \hat{\mu}|_{\Lambda}, \qquad M(G') \to \mathscr{B}(\Lambda).$$

Elle est continue et nous supposons ici qu'elle est surjective. Il en résulte que $\mathscr{B}(\Lambda)$ est isomorphe, en tant qu'espace de Banach, à un quotient de $M(G')$, ce qui est impossible car $M(G')$ est séparable puisque G' est dénombrable, tandis que $\mathscr{B}(\Lambda)$ ne l'est pas (si Λ est infini).

On peut d'ailleurs refaire le raisonnement en remplaçant $\mathscr{B}(\Lambda)$ par un sous espace fermé non séparable. Il en résulte qu'on ne peut pas interpoler une famille non dénombrable d'idempotents par des mesures concentrées sur un même sous-groupe dénombrable.

Nous utiliserons ces remarques plus loin.

2. Mesures d'interpolation à support compact. Ensembles propres pour Λ. Dans le cas où G est non compact, les mesures atomiques d'interpolation ne sont pas en général à support compact. Cependant toute fonction bornée peut être interpolée par une transformée de Fourier de mesure à support compact.

Rappelons que H. Helson et J.-P. Kahane [5] ont introduit la notion de *compact propre pour un ensemble de Sidon.*

Définition. Si Λ est un ensemble de Sidon ($\Lambda \subset \Gamma$), un compact L de G est dit *propre pour* Λ, s'il existe $\Lambda' \subset \Lambda$ ($\Lambda \setminus \Lambda'$ fini) tel que toute fonction de $\mathscr{B}(\Lambda')$ peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure à support dans L.

On peut démontrer le critère suivant [5].

Une condition nécessaire et suffisante pour que L soit propre pour Λ est qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout idempotent $e(\lambda)$ de $\mathscr{B}(\Lambda)$, il existe une mesure σ, à support dans L, satisfaisant à

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |e(\lambda) - \hat{\sigma}(\lambda)| < \tfrac{1}{2} - \delta.$$

Si Λ est un ensemble d'interpolation qui possède la propriété $P(\Delta, K)$, nous allons voir que Λ possède un compact propre directement lié à K.

Soit $e(\lambda)$ un idempotent de $\mathscr{B}(\Lambda)$ et μ une mesure atomique d'interpolation construite comme précédemment; on a, en utilisant les mêmes notations,

$$\mu = \sum_{(n_1, \ldots, n_k) \in Z^k} \hat{\Phi}(n_1, \ldots, n_k)\, \delta_{n_1\xi_1 + \ldots + n_k\xi_k}$$

où $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ est un élément de K.

Nous avons montré (cf. § II) que l'on pouvait choisir Φ de manière que

$$\sum_{n \in Z^k} |n|\, |\hat{\Phi}(n)| < C$$

où $n = (n_1, \ldots n_k)$, $|n| = |n_1| + \ldots + |n_k|$, et C est une constante qui ne dépend que de Λ. Alors

$$N \sum_{|n| \geqslant N} |\hat{\Phi}(n)| \leqslant \sum_{|n| \geqslant N} |n|\, |\hat{\Phi}(n)| < C.$$

Choisissons N de façon que l'on ait $C/N < \frac{1}{2} - \delta$. Il en résulte que

$$\sum_{|n| \geqslant N} |\hat{\Phi}(n)| < \tfrac{1}{2} - \delta.$$

Considérons la mesure

$$\sigma = \sum_{|n| < N} \hat{\Phi}(n_1, \ldots, n_k)\, \delta_{n_1\xi_1 + \ldots + n_k\xi_k}.$$

Nous avons

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |e(\lambda) - \hat{\sigma}(\lambda)| < \tfrac{1}{2} - \delta.$$

Soit Π_n l'application continue:

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \to n_1\xi_1 + \ldots + n_k\xi_k, \qquad G^k \to G.$$

Le support de σ est contenu dans $L = \bigcup_{|n| < N} \Pi_n(K)$.

Proposition 2. *Si un ensemble d'interpolation Λ possède la propriété $P(\Delta, K)$ il existe un entier N tel que $L = \bigcup_{|n| < N} \Pi_n(K)$ est un compact propre pour Λ.*

V. Ensembles séparants. Ordre d'un ensemble de type (I_0)

1. Introduisons une notion qui nous sera utile:

Soit $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de type (I_0).

Définition 1. Un ensemble X de G^k sera dit *séparant d'ordre k pour* $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, s'il existe $\Delta \in \mathscr{D}$ ($\Delta \subset T^k$) tel que

(i) pour toute partition (Λ', Λ'') de Λ,

$$X \cap \mathscr{H}_{\Delta}^{(\Lambda', \Lambda'')} \neq \emptyset,$$

(ii) pour tout élément ξ de X, il existe une partition (Λ', Λ'') de Λ telle que $\xi \in \mathscr{H}_{\Delta}^{(\Lambda', \Lambda'')}$.

Le théorème 2 § I peut alors se reformuler ainsi:

Il existe un ensemble séparant relativement compact.

Proposition 1. *Si Λ est infini, tout ensemble séparant est non dénombrable.*

Soit $E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. La construction faite dans le § IV des mesures atomiques d'interpolation pour $\mathscr{B}(\Lambda)$, lorsque Λ est ensemble d'interpolation, peut se transcrire sans difficulté dans le cas de $\mathscr{B}\big(E, (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big)$. Si donc il existait un ensemble séparant dénombrable pour $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, les fonctions de $\mathscr{B}\big(E, (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big)$ admettraient, comme mesures d'interpolation, des mesures concentrées sur un même sous-groupe dénombrable. Nous verrions, comme dans la remarque prop. 1 § IV, que ceci est impossible si Λ est infini.

2. Ordre d'un ensemble de type (I_0).

Définition 2. Nous appellerons *ordre de la famille* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la borne inférieure des entiers $k > 0$ tels qu'il existe $\Delta \in \mathscr{D}$, d'ordre k, pour lequel $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ possède la propriété $P^*(\Delta)$. (Notons qu'il existe alors un $K \in \mathscr{K}$, d'ordre k, pour lequel $P^*(\Delta, K)$ est vraie.)

Si un ensemble E est de type (I_0) relativement à sa partition $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, *l'ordre de* E *sera l'ordre de la partition.*

Remarquons que, si un ensemble d'interpolation Λ est d'ordre 1, les idempotents de $\mathscr{B}(\Lambda)$ peuvent être interpolés par des fonctions périodiques. Inversement, si cette propriété est vérifiée, la démonstration du théorème 1, § I, convenablement adaptée, permet d'affirmer que Λ a la propriété $P(\Delta)$, pour un Δ d'ordre 1.

La même remarque peut être faite à propos des ensembles de type (I_0).

Exemples. a) Si $\Gamma = R$, une suite lacunaire à la Hadamard $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ $(\lambda_{j+1}/\lambda_j > q > 1)$ est un ensemble d'interpolation (cf. [12], [16] et [17]).

Dans le cas $q \geqslant 3$, on démontre en fait qu'il existe $\Delta \subset T$ tel que $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ a la propriété $P(\Delta)$ ([12], [17]). C'est donc un ensemble d'interpolation d'ordre 1. Dans le cas général, on décompose la suite en n_q sous-suites d'ordre 1 $(n_q \geqslant \log 3/\log q)$, d'adhérences disjointes deux à deux, dans $\bar{R}$ [16]. Si l'on se reporte précisément à la démonstration de [16], on peut donner une borne supérieure de l'ordre: $n_q + \binom{n_q}{2}$.

En sens inverse, par une méthode qui généralise celle de [15], il est possible de voir que, si $\lambda_j \leqslant C\cdot 2^{j/N}$, pour une constante C et un entier N, alors l'ordre de $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ est strictement minoré par N.

De la même manière il est possible de montrer que si les fonctions de $\mathscr{B}(\Lambda)$, à k valeurs, sont prolongeables en fonctions périodiques, Λ ne peut vérifier aucune condition du type $\lambda_j \leqslant Ck^j$.

Rappelons enfin que Lipiński [11] a mis en évidence l'existence de suites ayant la propriété que toute fonction de $\mathscr{B}(\Lambda)$ peut être prolongée en fonction périodique. Pour une telle suite λ_{j+1}/λ_j ne peut pas être borné. Si l'on se refère à [10], il existe de telles suites Λ ayant la propriété: pour toute fonction de $\mathscr{B}(\Lambda)$, l'ensemble des périodes des fonctions périodiques interpolantes, est non dénombrable. Ce résultat peut être rapproché de la proposition 1 dont l'énoncé, dans ce cas particulier, se trouve donc renforcé.

b) *Nombres anormaux pour une suite* $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ *de type* (I_0) *d'ordre* 1. J.-P. Kahane définit la notion de nombre réel *M-anormal* [7] pour un procédé de sommation régulier de matrice M, relativement à une suite infinie $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ de nombres réels. En particulier, si I est la matrice identité, un nombre x est I-anormal si, et seulement si, il existe un intervalle U tel que, pour tout j, $x\lambda_j \notin U$, modulo 1.

Il est évident que, si $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ est un ensemble de type (I_0) d'ordre 1, pour une certaine partition, un ensemble séparant X d'ordre 1 est un ensemble de nombres I-anormaux pour $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$. Par suite, nous avons:

Proposition. *Si* $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ *est un ensemble de type* (I_0) *d'ordre* 1 *dans* R, *l'ensemble des nombres I-anormaux relativement à* $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ *est non dénombrable.*

Il résulte de [7] et [9] que X est de mesure nulle pour toute mesure positive à support compact dont la transformée de Fourier tend vers zéro à l'infini.

Si $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ est un ensemble de type (I_0) d'ordre > 1, nous pourrons généraliser ces propriétés en définissant une notion d'élément M-anormal dans R^k, de façon analogue à [7].

On peut se demander si tout ensemble d'interpolation n'est pas une réunion finie d'ensembles d'interpolation d'ordre 1; et de même pour les ensembles de type (I_0).

3. Décomposition d'un ensemble (I_0) $(\Gamma = R)$. Nous allons voir que, dans certains cas, la structure particulière d'un ensemble séparant d'ordre k entraîne qu'un ensemble (I_0) est décomposable en une réunion finie d'ensembles d'ordre $\leqslant k-1$.

Démontrons auparavant le lemme suivant (Γ métrique quelconque):

Lemme. *Soit* X *un ensemble séparant d'ordre* k. *Considérons une application de* X *sur un ensemble* X' *de* G^k; *supposons qu'il existe* N *entier tel que, si* ξ' *est l'image d'un point* ξ, *il existe* $n_1, \ldots, n_k$ *entiers* $(|n_1|, \ldots, |n_k| < N)$ *pour lesquels* $\xi_1 = n_1\xi_1' \ldots \xi_k = n_k\xi_k'$; *alors* X' *est séparant d'ordre* k.

En effet, soit $\Delta \in \mathscr{D}$, d'ordre k, tel que, pour toute partition (Λ', Λ'') de Λ, il existe $\xi \in X$ satisfaisant à

$$[\xi(E_{\Lambda'}) + \Delta] \cap [\xi(E_{\Lambda''}) + \Delta] = \emptyset.$$

Choisissons $\Delta' \in \mathscr{D}$ assez petit pour que $N\Delta' \subset \Delta$. Si ξ' est l'image de ξ par l'application considérée, on vérifie facilement que

$$[\xi'(E_{\Lambda'}) + \Delta'] \cap [\xi'(E_{\Lambda''}) + \Delta'] = \emptyset,$$

ce qui démontre le lemme.

Plaçons nous dans le cas $\Gamma = R$ (²).

Soit E un ensemble de type (I_0) relativement à la partition $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Soit X un ensemble séparant d'ordre k pour la famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Supposons qu'il existe un nombre fini d'ensembles $D_i (i = 1, \ldots, p)$ de la forme

$$D_i = \{\xi \mid \xi \in R^k \mid n_1^i \xi_1 + \ldots + n_k^i \xi_k = a_i\}$$

(n_j^i entiers non tous nuls, a_i réels), tels que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{p} D_i.$$

Soit $X_i = X \cap D_i$. Alors $X = \bigcup_{i=1}^{p} X_i$.

On peut supposer que $n_1^i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, p$, puisque, si un ensemble est séparant, tout ensemble obtenu par permutation des coordonnées est séparant.

Considérons les applications $(i = 1, \ldots, p)$:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \xi \xrightarrow[X_i \to X_i']{} \xi' = (\xi_1, \xi_2/n_1^i, \ldots, \xi_k/n_1^i).$$

Il résulte du lemme que $X' = \bigcup_{i=1}^{p} X_i'$ est un ensemble séparant. De plus, si $b_i = a_i/n_1^i$,

$$X_i' \subset D_i' = \{\xi \mid \xi \in R^k \mid \xi_1 + n_2^i \xi_2 + \ldots + n_k^i \xi_k = b_i\}.$$

Nous allons montrer que $E = \bigcup_{q=1}^{Q} E_q$, où chaque E_q est de type (I_0) relativement à la partition $(E_q \cap E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et d'ordre $\leqslant k-1$.

Considérons un recouvrement de T par des intervalles de mesure ε:

$$T = \bigcup_{j=1}^{m} I_j \quad (|I_j| = \varepsilon).$$

Ecrivons

$$E^{j_1 \ldots j_p} = E \cap b_1^{-1}(I_{j_1}) \cap \ldots \cap b_p^{-1}(I_{j_p}),$$
$$E_\lambda^{j_1 \ldots j_p} = E^{j_1 \ldots j_p} \cap E_\lambda,$$

où $b_i^{-1}(I_j)$ est l'image réciproque de I_j par l'homomorphisme b_i. Alors

$$E = \bigcup_{1 \leqslant j_1 \ldots j_p \leqslant m} E^{j_1 \ldots j_p}.$$

Vérifions que, pour un choix convenable de ε, chaque $E^{j_1 \ldots j_p}$ est d'ordre $\leqslant k-1$ relativement à sa partition $(E_\lambda^{j_1 \ldots j_p})_{\lambda\in\Lambda}$.

(²) La démonstration est faite dans le cas $\Gamma = G = R$, mais elle s'étend à simple lecture, dans le cas où G est un groupe divisible sans torsion, et s'adapte facilement si G est divisible et si, pour tout entier n, les éléments de G d'ordre n sont en nombre fini (p.ex. $G = T$, $\Gamma = Z$).

Par hypothèse, il existe un $\Delta \in \mathcal{D}$, d'ordre k, ne dépendant que de (E_λ), avec la propriété: pour toute partition (Λ', Λ''), il existe $\xi \in X'$ tel que

$$[\xi(E_{\Lambda'}^{j_1 \ldots j_p}) + \Delta] \cap [\xi(E_{\Lambda''}^{j_1 \ldots j_p}) + \Delta] = \emptyset.$$

Soit $\xi^* = (\xi_2, \ldots, \xi_k)$. Montrons qu'il est possible de choisir $\Delta^* \in \mathcal{D}$, d'ordre $k-1$, indépendant de (Λ', Λ''), de façon que l'on ait

$$(1) \qquad [\xi^*(E_{\Lambda'}^{j_1 \ldots j_p}) + \Delta^*] \cap [\xi^*(E_{\Lambda''}^{j_1 \ldots j_p}) + \Delta^*] = \emptyset.$$

Supposons d'abord que $\xi \in X_1'$. S'il était impossible de choisir un Δ^* convenable, c'est que, pour tout $\Delta^* \in \mathcal{D}$, d'ordre $k-1$, il existerait $\gamma' \in E_{\Lambda'}^{j_1 \ldots j_p}$ et $\gamma'' \in E_{\Lambda''}^{j_1 \ldots j_p}$, pour une certaine partition (Λ', Λ''), tels que

$$(2) \qquad [\xi^*(\gamma') + \Delta^*] \cap [\xi^*(\gamma'') + \Delta^*] \neq \emptyset.$$

Soit ε' le côté du pavé Δ^*. Nous pouvons toujours supposer que ε' est inférieur au côté du pavé Δ. Puisque $\xi \in X_1'$ nous avons

$$\xi_1(\gamma) = b_1(\gamma) - [n_2^1 \xi_2(\gamma) + \ldots + n_k^1 \xi_k(\gamma)]$$

et, de plus, $b_1(\gamma)$ appartient à l'intervalle I_{j_1}. Par suite

$$(3) \qquad |\xi_1(\gamma') - \xi_1(\gamma'')| \leqslant 2\varepsilon + 2(|n_2^1| + \ldots + |n_k^1|)\varepsilon'.$$

Pour un choix de ε et ε' assez petits (indépendant de (Λ', Λ'')) nous aurions, en combinant (2) et (3),

$$[\xi(\gamma') + \Delta] \cap [\xi(\gamma'') + \Delta] \neq \emptyset;$$

c'est donc que, pour ce choix de ε et ε', (1) est vraie, moyennant toutefois l'hypothèse faite que ξ appartient à X_1'. Mais nous pouvons refaire le même raisonnement en supposant, successivement, que ξ appartient à $X_i' (i = 1, 2, \ldots, p)$. Il y aura finalement un choix possible de ε et de ε' (c'est-à-dire de Δ^*), pour lequel (1) est vraie.

PROPOSITION 2. *Soit $E \subset R$ un ensemble de type* (I_0) *relativement à une partition $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Si $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ admet un ensemble séparant d'ordre k de la forme*

$$(4) \qquad X \subset \bigcup_{i=1}^{p} \{\xi \mid \xi \in R^k \mid n_1^i \xi_1 + \ldots + n_k^i \xi_k = a_i\} \qquad (|n_1^i| + \ldots + |n_k^i| \neq 0),$$

alors $E = \bigcup_{q=1}^{Q} E_q$ (Q fini), où chaque E_q est de type (I_0) *relativement à la partition $(E_q \cap E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et d'ordre $\leqslant k-1$.*

Partant d'un ensemble d'ordre quelconque, nous pouvons effectuer la décomposition précédente autant de fois qu'il est possible, éventuellement jusqu'à l'ordre 1. Soit $E = \bigcup_{q=1}^{Q} E_q$ la décomposition finale.

Ou bien E_q n'est pas d'ordre 1; alors il existe un entier k_q tel que E_q est d'ordre k_q, aucun ensemble séparant d'ordre k_q pour E_q n'est de la forme (4);

ou bien E_q est d'ordre 1 et la partition $(E_q \cap E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est infinie; alors tout ensemble séparant d'ordre 1 est non dénombrable (proposition 1) et ne peut être de la forme (4);

ou bien E_q est d'ordre 1 et la partition $(E_q \cap E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est finie; autrement dit, E_q est contenu dans une réunion finie de E_λ; nous pouvons inclure ces E_λ dans le décomposition.

Corollaire. *Soit E un ensemble de type* (I_0) *relativement à une partition $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Alors il existe une décomposition finie*

$$E = \bigcup_{q=1}^{Q} E_q$$

avec: ou bien $E_q = E_\lambda$ pour un certain λ, ou bien E_q de type (I_0) *relativement à la partition infinie $(E_q \cap E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, d'ordre k_q, et tel qu'aucun ensemble séparant d'ordre k_q n'est de la forme* (4).

Il serait intéressant de savoir que l'on peut prendre tous les k_q égaux à 1.

VI. Ensembles de type (I_0) et ensembles de type (I)

Soit $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de type (I_0). Etant donné une famille $(F_\nu)_{\nu \in N}$ d'ensembles disjoints, telle que, pour tout $\nu \in N$, il existe $\lambda \in \Lambda$ pour lequel $F_\nu \subset E_\lambda$ (nous écrirons pour abréger $(F_\nu)_{\nu \in N} < (E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$), nous nous posons la question de savoir si $(F_\nu)_{\nu \in N}$ est de type (I_0). Désignons par N_λ l'ensemble des ν tels que $F_\nu \subset E_\lambda$. Il est évident que, si, pour tout λ, N_λ est réduit à un seul élément au plus, (F_ν) est de type (I_0). Mais nous allons démontrer un résultat plus général.

Proposition 1. *Si $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est de type* (I_0), *soit $(F_\nu)_{\nu \in N}$ vérifiant les conditions*:

(i) $(E_\nu)_{\nu \in N} < (F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$,

(ii) *il existe W, compact de Γ ne contenant pas 0, tel que, $\forall \lambda$, $\forall \nu, \nu' \in N_\lambda$ $(\nu \neq \nu')$, on a $F_\nu - F_{\nu'} \subset W$;*

alors $(F_\nu)_{\nu \in N}$ est de type (I_0).

Supposons que pour une partition (N', N'') de N, $F_{N'}$ et $F_{N''}$ aient un point adhérent commun dans $\bar{\Gamma}$, soit a. Si $\Omega(a)$ est un voisinage de a dans $\bar{\Gamma}$, $\Omega(a)$ rencontre $F_{N'}$ et $F_{N''}$. Posons

$$G_\nu = F_\nu \cap \Omega(a).$$

$G_{N'}$ et $G_{N''}$ admettent a comme point adhérent commun, ce qui signifie que (G_ν) n'est pas de type (I_0). Or, W étant compact dans Γ, donc dans $\bar{\Gamma}$, il existe $\mathcal{O}$ voisinage ouvert de 0 dans $\bar{\Gamma}$, disjoint de W. Choisissons $\Omega(a) = a + \Omega$ (avec $\Omega - \Omega \subset \mathcal{O}$). Alors, soit $\nu, \nu' \in N_\lambda$, $\nu \neq \nu'$. Il est impossible que l'on ait simultanément

$$G_\nu \neq \emptyset, \quad G_{\nu'} \neq \emptyset,$$

car sinon $G_\nu - G_{\nu'} \neq \emptyset$; or, d'autre part, $G_\nu - G_{\nu'} \subset W$, $G_\nu - G_{\nu'} \subset \Omega - \Omega \subset \mathcal{O}$, ce qui fournit une contradiction. Alors, pour tout λ,

$$\operatorname{card}\{\nu \mid \nu \in N \mid G_\nu \subset E_\lambda\} \leqslant 1$$

et suivant une remarque déjà faite, ceci entraine que (G_ν) est de type (I_0).

Remarque. Le résultat de la proposition 1 est vrai, que Γ soit métrisable ou non. Mais dans le cas où Γ est métrisable, soit d une distance invariante sur Γ. L'hypothèse (ii) de la proposition 1 est satisfaite si

(a) $\exists W$ compact tel que, $\forall \lambda$, $E_\lambda - E_\lambda \subset W$,

(b) $\exists \eta > 0$ tel que, $\forall \lambda$, $\forall \nu$, $\nu' \in N_\lambda (\nu \neq \nu')$,

$$d(F_\nu, F_{\nu'}) > \eta.$$

Revenons au résultat obtenu au théorème 1, § III. Reprenant les mêmes notations, le voisinage de 0, Ω, peut être pris relativement compact de sorte que $(E_\lambda + \Omega)_{\lambda \in \Lambda}$ satisfait à la condition (a).

Si Ω est infini (c'est le cas si Γ est non discret et dans le cas où Γ est discret le théorème 1, § III, est sans intérêt), pour tout entier n nous pouvons choisir, dans chaque $E_\lambda + \Omega$, n points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, de façon que $d(\lambda_j, \lambda_k) > \eta$, $j \neq k$, $1 \leqslant j$, $k \leqslant n$, pour un certain η indépendant de λ. Dans ces conditions, l'ensemble $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ est un ensemble d'interpolation.

Exemples $(\Gamma = R)$. Nous pouvons prendre, pour tout λ, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, en progression arithmétique. Ainsi, quoiqu'un ensemble d'interpolation ne puisse pas contenir de progression arithmétique arbitrairement longue (puisque c'est un ensemble de Sidon), pour tout n entier, il existe des ensembles d'interpolation qui sont réunion d'une infinité de progressions arithmétiques de n termes chacune.

Si $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ est un ensemble d'interpolation, considérons la suite $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \cup (\lambda_j + \varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$.

Si $\varepsilon_j \to 0$ $(j \to \infty)$, ce n'est pas un ensemble d'interpolation puisqu'un tel ensemble est régulier $(d(\lambda', \lambda'') > \eta)$.

Si $\eta_1 < \varepsilon_j < \eta_2$, pour η_1, η_2 assez petits, on a un ensemble d'interpolation ainsi qu'il a été démontré.

Si $\varepsilon_j \to \infty$ $(j \to \infty)$, on ne peut rien affirmer. En effet: $(2^j)_{j=1}^{\infty} \cup (2^j + j)_{j=1}^{\infty}$ n'est pas d'interpolation; $(2^{2j})_{j=1}^{\infty} \cup (2^{2j+1} = 2^{2j} + 2^{2j})_{j=1}^{\infty} = (2^j)_{j=1}^{\infty}$ est d'interpolation.

Il existe une étroite relation entre les ensembles qui admettent une partition de type (I_0) et les ensembles (I).

PROPOSITION 2. *Si E est de type* (I_0) *relativement à la partition* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, *si de plus il existe un compact W tel que,*

$$\forall\lambda, \quad E_\lambda - E_\lambda \subset W,$$

alors E est de type (I).

Soit f une fonction bornée uniformément continue sur E (pour la structure uniforme de Γ). Pour qu'elle soit prolongeable dans $PP(\Gamma)$, il faut et il suffit qu'elle soit uniformément continue sur E, pour la structure uniforme de $\bar{\Gamma}$. Il est aisé de vérifier que ceci est équivalent à la propriété: $\forall x_1, x_2 \in R (x_2 < x_1)$, les ensembles

$$E_1 = \{\gamma | \gamma \in E | f(\gamma) > x_1\}, \qquad E_2 = \{\gamma | \gamma \in E | f(\gamma) < x_2\}$$

sont d'adhérences disjointes dans $\bar{\Gamma}$.

Posons $E_{1,\lambda} = E_1 \cap E_\lambda$, $E_{2,\lambda} = E_2 \cap E_\lambda$.

La famille $(E_{i,\lambda})_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ i=1,2}}$ satisfait aux hypothèses de la proposition 1 (si Γ est métrisable, E_1 et E_2 sont à une distance positive); ceci entraîne que $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 = \emptyset$.

COROLLAIRE. *Si Λ est un ensemble d'interpolation d'un groupe Γ métrisable, il existe un voisinage relativement compact de 0 dans Γ, Ω, tel que $\Lambda + \Omega$ soit de type* (I).

(Ceci est un résultat de S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski [2], [4] dans le cas d'un groupe séparable.)

En général, le fait que $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ soit de type (I_0) n'entraine pas qu'il existe un compact W tel que $E_\lambda - E_\lambda \subset W$. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, si $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille (I_0) dans R, $(E_\lambda \times R)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille (I_0) dans R et ne vérifie pas cette propriété. Néanmoins, une famille de type (I_0) n'est pas quelconque.

Une conséquence faible du théorème 2, § 1, est que, si card $\Lambda > 1$ et si ξ est un élément séparant d'ordre k, il existe Δ, d'ordre k, tel que, $\forall\lambda$, $\xi(E_\lambda) + \Delta$ ne recouvre pas $\xi(\Gamma) \subset T^k$. Or il existe une suite finie de points de Γ, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, tels que

$$\xi(\Gamma) \subset \bigcup_{i=1}^{n} [\xi(\gamma_i) + \Delta].$$

Aucun translaté de E_λ ne peut contenir tous les $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

PROPOSITION 3. *Si $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille de type* (I_0) (card$(\Lambda) > 1$), *il existe une suite finie $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ qui ne peut être contenue dans aucun translaté d'un E_λ quelconque de la famille.*

COROLLAIRE. *Soit $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille infinie de type* (I_0) *constituée de boules E_λ (pour une distance invariante sur Γ). Alors le rayon de ces boules est borné.*

C'est le cas notamment si $\Gamma = R$ et si les E_λ sont des intervalles. Alors (proposition 2) $E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ *est un ensemble* (I) (de même si $\Gamma = R^n$).

En sens inverse nous pouvons montrer

PROPOSITION 4. *Un ensemble $E \subset R$ de type* (I) *admet une partition $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ de type* (I_0), *avec des E_j relativement compacts.*

On peut utiliser ici un résultat de [4] (théorème 3). Il est facile d'en déduire que, si $E \subset R$ est un ensemble de type (I), son complémentaire contient une infinité d'intervalles disjoints et de longueur 1. E peut donc s'écrire:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

avec $d(E_j, E_k) \geqslant 1$, $\forall j, k\ (j \neq k)$, et les E_j contenus dans des intervalles, donc relativement compacts.

La famille $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ est de type (I_0) puisque toute fonction bornée, constante sur chaque E_j, est uniformément continue sur E et donc prolongeable en une fonction presque-périodique.

Ce résultat entraîne, comme nous le verrons au § VII, que les propriétés „d'épaisseur'' des ensembles (I) sur R découlent de celles des ensembles (I_0).

VII. Ensembles (I_0) et ensembles d'unicité ($\Gamma = R$) (3)

Nous avons vu, dans le § V, que tout ensemble (I_0) relativement à une partition $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ admet une décomposition finie

$$E = \bigcup_{q=1}^{Q} E_q$$

dans laquelle

(a) ou bien $E_q = E_\lambda$ pour un certain λ,

(b) ou bien E_q est de type (I_0) relativement à la partition infinie $(E \cap E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, d'ordre k_q, et tel qu'aucun ensemble séparant d'ordre k_q n'est de la forme

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{p} \{\xi | \xi \in R^k | n_1^i \xi_1 + \ldots + n_k^i \xi_k = a_i\}, \qquad (|n_1^i| + \ldots + |n_k^i| \neq 0).$$

Nous allons voir que, *dans le cas* (b), $\bar{E}_q$, *adhérence de E_q dans $\bar{R}$, est ensemble d'unicité de $\bar{R}$* ($\bar{E}_q$ ne porte ni mesure ni pseudomesure dont la transformée de Fourier tend vers zéro à l'infini sur R_d, dual de $\bar{R}$).

En effet, soit X un ensemble séparant d'ordre $k = k_q$. Il résulte aisément de la définition des ensembles séparants que, pour un certain $\Delta \in \mathcal{D}$, $\Delta \subset T^k$, on a la propriété: pour tout élément ξ de X, il existe $a(\xi) \in T^k$ tel que

$$[\xi(E_q) - a(\xi)] \cap \Delta = \emptyset.$$

(3) Les résultats du § VII, établis dans le cas $\Gamma = R$, se généralisent comme ceux du § V (on se reportera à la note, p. 184).

Soit alors $f \in A(T^k)$ dont le support est contenu dans Δ:

$$f(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{(n_1,\ldots,n_k)\in Z^k} \hat{f}(n_1, \ldots, n_k)\, e^{i(n_1 t_1 + \ldots + n_k t_k)}$$

avec $\hat{f}(0) \neq 0$. Soit $\xi \in X$. Nous désignerons par F_ξ un élément de $A(\bar{\Gamma})$ défini par la relation:

$$F_\xi(\gamma) = f\big(\xi(\gamma) - a(\xi)\big),$$

$$F_\xi(\gamma) = \sum_{\zeta \in R_d} \hat{F}_\xi(\zeta)(\zeta, \gamma)$$

$$= \sum_{(n_1,\ldots,n_k)\in Z^k} \hat{f}(n_1, \ldots, n_k)\, e^{i[n_1 a_1(\xi) + \ldots + n_k a_k(\xi)]} (n_1 \xi_1 + \ldots + n_k \xi_k, \gamma).$$

Soit m une pseudomesure de norme 1, portée par $\bar{E}_q$, telle que $\hat{m}(\zeta) \to 0$ ($\zeta \to \infty$ sur R_d). Puisque R_d est discret, l'ensemble $\{\zeta \,|\, \zeta \in R_d | \hat{m}(\zeta) \neq 0\}$ est dénombrable. Nous désignerons par $(\zeta_p)_{p=1}^{\infty}$ les points de cet ensemble (de façon que tous les ζ_p soient distincts). Alors $\hat{m}(\zeta_p) \to 0$ $(p \to \infty)$. Le support de m et celui de F_ξ étant disjoints dans $\bar{R}$,

$$\langle m, F_\xi \rangle = \sum_{p=1}^{\infty} \hat{F}_\xi(\zeta_p)\, \hat{m}(\zeta_p) = 0.$$

Comme nous avons

$$\sum_{p=1}^{\infty} |\hat{F}_\xi(\zeta_p)| \leqslant \sum_{\zeta \in R_d} |\hat{F}(\zeta)| \leqslant \|f\|_{A(T^k)},$$

pour tout ε, il existe p_0, indépendant de ξ, tel que

$$\Big| \sum_{p > p_0} \hat{F}_\xi(\zeta_p)\, \hat{m}(\zeta_p) \Big| < \varepsilon.$$

Evaluons alors

$$\sum_{p \leqslant p_0} \hat{F}_\xi(\zeta_p)\, \hat{m}(\zeta_p)$$

où

$$\hat{F}_\xi(\zeta_p) = \sum_{\substack{(n_1 \ldots n_k)\in Z^k \\ n_1\xi_1 + \ldots + n_k \xi_k = \zeta_p}} \hat{f}(n_1, \ldots, n_k)\, e^{i(n_1 a_1(\xi) + \ldots + n_k a_k(\xi))}.$$

ε' étant donné, il existe N entier tel que

$$\sum_{|n| = |n_1| + \ldots + |n_k| > N} |\hat{f}(n_1, \ldots, n_k)| < \varepsilon';$$

alors,

$$|\hat{F}_\xi(\zeta_p)| \leqslant \sum_{\substack{|n| \leqslant N \\ n_1\xi_1 + \ldots + n_k\xi_k = \zeta_p}} |\hat{f}(n_1, \ldots, n_k)| + \varepsilon'.$$

Supposons que $\zeta_1 = 0$ (alors $\zeta_p \neq 0$ si $p > 1$). Par hypothèse, il est impossible que l'on ait

$$X \subset \bigcup_{\substack{1 \leqslant p \leqslant p_0 \\ 0 < |n| \leqslant N}} \{\xi \,|\, \xi \in R^k | n_1\xi_1 + \ldots + n_k \xi_k = \zeta_p\}.$$

Pour un choix de $\xi \in X$, appartenant au complémentaire de cette réunion d'ensembles, nous avons donc:

si $1 < p \leqslant p_0$,

$$\sum_{\substack{|n| \leqslant N \\ n_1\xi_1 + \ldots + n_k\xi_k = \zeta_p}} |\hat{f}(n_1, \ldots, n_k)| = 0;$$

si $p = 1$,

$$\sum_{\substack{|n| \leqslant N \\ n_1\xi_1 + \ldots + n_k\xi_k = 0}} \hat{f}(n_1, \ldots, n_k)\, e^{i(n_1 a_1(\xi) + \ldots + n_k a_k(\xi))} = \hat{f}(0).$$

Il résulte de là

$$|\hat{F}_\xi(0)\, \hat{m}(0) - \hat{f}(0)\, \hat{m}(0)| < \varepsilon',$$

et si $1 < p \leqslant p_0$,

$$|\hat{F}_\xi(\zeta_p)| < \varepsilon'.$$

Donc

$$|\hat{f}(0)\, \hat{m}(0)| \leqslant \Big| \sum_{p > p_0} \hat{F}_\xi(\zeta_p) \hat{m}(\zeta_p) \Big| + p_0 \varepsilon' \leqslant \varepsilon + p_0 \varepsilon'.$$

$\varepsilon + p_0 \varepsilon'$ peut être rendu arbitrairement petit par les choix successifs de ε et ε'. D'où

$$\hat{f}(0)\, \hat{m}(0) = 0,$$

et comme $\hat{f}(0) \neq 0$, $\hat{m}(0) = 0$.

Nous pouvons faire ce raisonnement pour les pseudomesures $m_p = (-\zeta_p, \gamma)\, m$ pour lesquelles $\hat{m}_p(0) = \hat{m}(\zeta_p)$. Nous obtiendrons ainsi $\forall p$, $\hat{m}(\zeta_p) = 0$, donc $m = 0$.

Revenons à la décomposition d'un ensemble E de type (I_0). E peut s'écrire:

$$E = E' \cup E_{\lambda_1} \cup \ldots \cup E_{\lambda_k},$$

où E' est une réunion finie d'ensembles E_q dont l'adhérence $\bar{E}_q$ est un ensemble d'unicité. Comme une réunion finie d'ensembles d'unicité compacts est un ensemble d'unicité (cf. [18]), il en résulte que $\bar{E}'$ est ensemble d'unicité dans $\bar{R}$.

Théorème. *Si $E \subset R$ admet une partition $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de type (I_0), il existe un ensemble Λ' tel que $\Lambda \setminus \Lambda'$ fini et $\bar{E}' = \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} E_\lambda}$ est un ensemble d'unicité dans $\bar{R}$.*

Remarque. Il y a des cas où effectivement $\Lambda' \neq \Lambda$. En effet, si E est de type (I_0) relativement à une partition $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, et si U est l'intersection de R avec un ouvert de $\bar{R}$ dont l'adhérence est disjointe de $\bar{E}$, il est évident que $E \cup U$ est de type (I_0) relativement à la partition $((E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, U)$; et $\bar{U}$ n'est pas d'unicité.

Si, en particulier, les E_λ sont relativement compacts, comme un ensemble compact de R est d'unicité pour $\bar{R}$ (comme il est facile de le vérifier), il en résulte:

COROLLAIRE 1. *Si $E \subset R$ admet une partition* (I_0) *d'ensembles relativement compacts, alors $\bar{E}$ est ensemble d'unicité de $\bar{R}$. En particulier, $\bar{E}$ est de mesure de Haar nulle dans $\bar{R}$.*

Nous avons vu (proposition 4, § VI) qu'un ensemble (I) de R admet une partition (I_0) d'ensembles relativement compacts. Il en résulte:

COROLLAIRE 2. *Si $E \subset R$ est un ensemble* (I), *$\bar{E}$ est ensemble d'unicité de $\bar{R}$. En particulier, $\bar{E}$ est de mesure de Haar nulle dans $\bar{R}$.*

(Ce dernier point du corollaire 2 est contenu dans un résultat plus général de Ryll-Nardzewski [2], [4].)

Dans le cas d'un ensemble d'interpolation Λ, nous savions déjà que $\bar{\Lambda}$ est ensemble de Helson, donc ensemble d'unicité au sens large (cf. [8]). Le théorème 1 nous apprend que c'est un ensemble d'unicité au sens strict (ce qui est un résultat plus fort dans la mesure où l'on ne sait pas si un ensemble de Helson peut supporter de vraies pseudomesures).

VIII. Remarques et problèmes

1. On peut se demander si les résultats du § I subsistent dans le cas où Γ est non métrisable. Remarquons que, si, par exemple, Γ est compact non métrisable, on ne peut pas avoir en général la propriété $P(\Delta, K)$. En effet, G est alors discret et tout compact K est un ensemble fini. Un ensemble d'interpolation qui possède la propriété $P(\Delta, K)$ est donc nécessairement fini. Or Γ peut contenir un ensemble d'interpolation infini (p. ex. un ensemble d'interpolation infini de R est aussi d'interpolation dans $\bar{R}$).

2. Les ensembles d'interpolation peuvent être considérés comme des ensembles de Sidon particuliers. Peut-on caractériser simplement les ensembles de Sidon qui sont d'interpolation?

Nous avons vu que l'on peut associer à tout ensemble de Sidon une classe d'ensembles compacts du groupe dual (ensembles propres cf. § IV). Dans le cas d'un ensemble d'interpolation, peut-on affirmer que cette classe contient un ensemble de mesure de Haar nulle? Pour un ensemble de Hadamard sur R c'est un résultat connu [5].

3. Tout ensemble d'interpolation est-il réunion finie d'ensembles d'interpolation d'ordre 1 (cf. § IV)?

4. Existe-t-il des ensembles d'interpolation d'ordre 1 sur R qui ne sont pas des ensembles de Hadamard? [4]

Travaux cités

[1] S. Hartman, *On interpolation by almost periodic functions*, Coll. Math. 8 (1961), p. 99-101.

[2] — J.-P. Kahane et C. Ryll-Nardzewski, *Sur les ensembles d'interpolation*, Bull. Acad. Pol. Sci. 13 (1965), p. 625-626.

[3] — et C. Ryll-Nardzewski, *Almost periodic extensions of functions*, Coll. Math. 12 (1964), p. 23-39.

[4] — et C. Ryll-Nardzewski, *Almost periodic extensions of functions, II*, ibidem 15 (1965), p. 79-86.

[5] H. Helson and J.-P. Kahane, *A Fourier method in a diophantine problem*, J. Anal. Math. 15 (1965), p. 245-262.

[6] J.-P. Kahane, *Ensembles de Ryll-Nardzewski et ensembles de H. Helson*, Coll. Math. 15 (1965), p. 87-92.

[7] — *Sur les mauvaises répartition modulo* 1, Annales de l'Institut Fourier 14 (1964), p. 519-526.

[8] — et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris 1963.

[9] — et R. Salem, *Distribution modulo* 1 *and sets of uniqueness*, Bull. Math. Amer. Soc. 70 (1964), p. 259-261.

[10] J. S. Lipiński, *On periodic extensions of functions*, Coll. Math. 13 (1964), p. 65-71.

[11] — *Sur un problème de E. Marczewski concernant des fonctions périodiques*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série math., astr. et phys., 8 (1960), p. 695-697.

[12] Jan Mycielski, *On a problem of interpolation by periodic functions*, Coll. Math. 8 (1961), p. 95-97.

[13] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, New York-London 1962.

[14] C. Ryll-Nardzewski, *Concerning almost periodic extensions of functions* Coll. Math. 12 (1964), p. 235-237.

[15] — *Remark on interpolation by periodic functions*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série math., astr. et phys., 11 (1963), p. 363-366.

[16] E. Strzelecki, *On a problem of interpolation by periodic and almost periodic functions*, Coll. Math. 11 (1963), p. 239-248.

[17] — *Some theorems of interpolation by periodic functions*, ibidem 12 (1964), p. 239-248.

[4] On peut répondre affirmativement au problème 4. En effet, si l'on pose $\Lambda_k = (10^j)_{j=k^2}^{j=(k+1)^2}$, l'ensemble $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda_k + 2\cdot 10^{(k+1)^2})$ est un ensemble d'interpolation d'ordre 1 et n'est pas réunion finie d'ensembles de Hadamard. C'est un ensemble d'interpolation d'ordre 1 car on vérifie aisément que l'ensemble

$$X = \left\{ x = 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{5\varepsilon_j}{10^j} \,\middle|\, \varepsilon_j = 0, 1 \right\}$$

est séparant d'ordre 1 pour Λ. D'autre part, il est impossible que Λ soit réunion finie d'ensembles de Hadamard, puisque le nombre de points de Λ compris entre $10^{(k+1)^2}$ et $10^{(k+1)^2+1}$ augmente indéfiniment avec k.

Reçu par la Rédaction le 14. 2. 1967