on all of E. For some $c \geqslant 0$, $\Delta f = cf$ for all $f \in F$. Now $0 = \Delta\bar{1}(0) = c\bar{1}(0) = c$, and thus the elements of F are harmonic functions. For $\delta > 0$, there exists $c = N(\delta)$ such that $f \in F$, $x \in \operatorname{dom} f$, $\bar{U}_x(\delta) \subseteq \operatorname{dom} f$ implies

$$cf(x) = \delta^{-p} \int_{U_x(\delta)} f dm$$

and hence

$$c = c\bar{1}(0) = \delta^{-p} \int_{U(\delta)} \bar{1} dm = 1.$$

Thus the elements of F are volume mean functions in the strong, i.e. classical, sense. Similarly they are surface mean functions in the strong sense.

Further developments along this line, including full radius of convergence of power series, the solution of the Dirichlet, Neumann, and Robin problems for the sphere, etc. may be found in [2, 3].

References

[1] K. O. Leland, *A characterization of analyticity*, Duke Math. J. 33 (1966), p. 551-566.

[2] — *A characterization of analyticity, II*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[3] — *A characterization of harmonic functions*, unpublished.

UNIVERSITY OF VIRGINIA

Reçu par la Rédaction le 25. 10. 1966

STUDIA MATHEMATICA, T. XXIX. (1968)

Sur les solutions généralisées des équations quasi-linéaires

par

T. LEŻAŃSKI (Lublin)

Nous considérons dans ce travail les équations différentielles aux dérivées partielles quasi-linéaires elliptiques; nous y démontrons l'existence d'une solution faible, et donnons une méthode de solutions numérique. Soit

$$\Psi(u, h) = \int_{\Omega} f\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}, \frac{\partial h}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial \xi_n}\right) d\Omega$$

une fonctionnelle de deux variables u et h, linéaire par rapport à h; supposons qu'une fonction fixée $\bar{u}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de classe C_2 sur Ω satisfait à l'équation $\Psi(\bar{u}, h) = 0$ pour toutes les fonctions $h(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de classe C_2 sur Ω, remplissant la condition $\mathring{h}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ sur le bord S de Ω. Une intégration par parties donne

$$\int_{\Omega} \mathfrak{R}(u) \cdot h d\Omega = 0$$

pour tout h de la classe mentionnée, où $\mathfrak{R}$ est une opération différentielle (en général non-linéaire) d'ordre 2. Par suite (en vertu d'un lemme classique du calcul des variations) on a $\mathfrak{R}(\bar{u}) = 0$.

Or, si la fonction $\bar{u}$ n'est pas de classe C_2, mais seulement de classe $L_{1,\Omega}$ (c'est-à-dire si les dérivées $\partial u/\partial \xi_i$ sont de carrés intégrables sur Ω, au sens de Lebesgue), et $\bar{u}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ satisfait à la relation $\Psi(u, h) = 0$ pour toutes les fonctions h (d'une classe assez large) nous appellerons la fonction $\bar{u}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *solution généralisée* de l'équation $\mathfrak{R}(u) = 0$.

1. Soient H un espace réel de Hilbert, dont les éléments sont x, y, u, v, h, f etc., et le produit scalaire (x, y). Soient M un ensemble linéaire dense dans H, au sens de la norme $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $(x, y)_1$ un autre produit scalaire sur M tel que

$$(1) \qquad \|x\|_1 = \sqrt{(x, x)_1} \geqslant \gamma \|x\|, \qquad (x, y)_1 \leqslant m(x) \|y\| \qquad \text{pour } x, y \in M.$$

Désignons par H_1 le complément de M en norme $\| \ \|_1$, par A l'opération linéaire, définie sur M par l'identité $(Ax, y) = (x, y)_1$; A étant, grâce à (1), symétrique et positivement définie sur M, on obtient de la théorie de Friedrichs ([3], N° 124) que $H_1 \subset H$.

Soit enfin $\Psi(x, h)$ une fonctionnelle de deux variables x et h parcourant l'ensemble M, satisfaisant aux conditions suivantes:

(A) $\Psi(x, h)$ est linéaire par rapport à h, et $|\Psi(0, h)| \leqslant C\|h\|_1 (h \in M)$.

Pour tout $x, h, f \in M$ il existe

$$\Psi'(x, h, f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}[\Psi(x+\varepsilon h, f) - \Psi(x, f)]$$

telle que

(B) $|\Psi'(x, h, f)| \leqslant m\|h\|_1\|f\|_1$,

(C) $\Psi'(x, h, h) \geqslant \alpha\|h\|_1 \ (0 < \alpha < m)$.

THÉORÈME 1. *La fonctionnelle $\Psi(x, h)$ admet un prolongement unique à l'espace H_1 tout entier; il existe un (et un seul) élément $\overline{u} \in H_1$ tel que $\Psi(\overline{u}, h) = 0$ pour tout $h \in M$.*

Démonstration. Prouvons d'abord les inégalités

$$|\Psi(x, h) - \Psi(y, h)| \leqslant m\|x-y\|_1\|h\|_1, \tag{2}$$

$$\Psi(x, x-y) - \Psi(y, x-y) \geqslant \alpha\|x-y\|_1^2. \tag{3}$$

En effet,

$$\begin{aligned} |\Psi(x, h) - \Psi(y, h)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\Psi\big(x+t(x-y), h\big)dt\right| \\ &= \left|\int_0^1 \Psi'\big(y+t(x-y), x-y, h\big)dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 m\|x-y\|_1\|h\|_1 dt \end{aligned}$$

en vertu de (B); tout pareillement, la condition (C) nous donne

$$\begin{aligned} \Psi(x, x-y) - \Psi(y, x-y) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Psi\big(y+t(x-y), x-y\big)dt \\ &= \int_0^1 \Psi'\big(y+t(x-y), x-y, x-y\big)dt \geqslant \int_0^1 \alpha\|x-y\|_1^2 dt, \end{aligned}$$

c.q.f.d.

La fonctionnelle $\Psi(x, h)$ remplit alors, grâce à (A) et (2), à la condition de Lipschitz par rapport aux x, et à la fois, au sens de la norme $\|x\|_1$; $\Psi(x, h)$ peut alors être prolongée à H (et d'une seule manière), de sorte que (2) et (3) restent valables, par continuité. En vertu de (A) et (2) on a $|\Psi(x, h)| \leqslant (C + m\|x\|_1)\|h\|_1$; $\Psi(x, h)$ est alors pour tout $x \in H_1$ fixé, une fonctionnelle linéaire bornée de h sur H_1. D'après un théorème connu

de F. Riesz, il existe dans H_1 un seul élément, que nous désignons par $F(x)$, tel que $\Psi(x, h) = \big(F(x), h\big)_1$ pour tout $h \in H_1$. De (2) et (3) il découle immédiatement:

$$\|F(x) - F(y)\|_1 \leqslant m\|x-y\|_1, \tag{4}$$

$$\big(F(x) - F(y), x-y\big)_1 \geqslant \alpha\|x-y\|_1^2, \tag{5}$$

$$\|F(x) - F(y)\|_1 \geqslant \alpha\|x-y\|_1. \tag{6}$$

(6) est une conséquence immédiate de (5).

Posons $V(x) = x - \alpha m^{-2}F(x)$. Un calcul facile donne

$$\|V(x) - V(y)\|_1 \leqslant (1-\alpha^2 m^{-2})\|x-y\|_1.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} &\|V(x) - V(y)\|_1^2 \\ &\quad= \|x-y\|_1^2 - 2\alpha m^{-2}\big(F(x)-F(y), x-y\big)_1 + \alpha^2 m^{-4}\|F(x)-F(y)\|_1^2 \\ &\quad\leqslant \|x-y\|_1^2 - 2\alpha^2 m^{-2}\|x-y\|_1^2 + \alpha^2 m^{-2}\|x-y\|_1^2 = (1-\alpha^2 m^{-2})\|x-y\|_1^2. \end{aligned}$$

Il existe alors, d'après le théorème de Banach-Cacciopoli, un seul $\overline{u} \in H_1$ tel que $V(\overline{u}) = \overline{u}$, c'est-à-dire $F(\overline{u}) = 0$; cette dernière égalité équivaut à $\Psi(\overline{u}, h) = \big(F(\overline{u}), h\big)_1 = 0$ pour tout $h \in M$, c.q.f.d.

2. Méthode numérique. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'elements de M, orthonormale et complète dans H_1 au sens de $(x, y)_1$. Posons $Z_n = \text{lin}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ = ensemble de toutes les sommes $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, et désignons par $F_n(x)$ pour $x \in Z_n$, la projection orthogonale de $F(x)$ sur Z_n au sens de $(x, y)_1$. On a alors

$$\big(F_n(x) - F(x), h\big)_1 = O(x), \qquad x, h \in Z_n, \tag{7}$$

et par suite

$$\big(F_n(x), h\big)_1 = \big(F(x), h\big)_1 = \Psi(x, h) \quad \text{pour} \quad x, h \in Z_n. \tag{8}$$

THÉORÈME 2. *Pour tout n naturel il existe un seul élément $x_n \in Z_n$ tel que $F_n(x_n) = 0$. De plus, $\|x_n - \overline{u}\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Démonstration. Comme la fonctionnelle $\Psi(x, h)$ remplit les conditions (A), (B) et (C) sur tout M, elle les remplit, en particulier, pour $x, h, f \in Z_n$; on déduit la première partie de notre conclusion en vertu du théorème 1, en y posant Z_n et F_n au lieu de M et F respectivement, et en utilisant la relation (8). De plus, de (6) on obtient

$$\alpha\|x - x_n\|_1 \leqslant \|F_n(x)\|_1 \quad \text{pour} \quad x \in Z_n. \tag{9}$$

Montrons que $\|x_n - \overline{u}\|_1 \to 0$ (où $F(\overline{u}) = 0$). Or, la suite $a_1, a_2, \ldots$ étant complète dans H_1, il existe pour tout n un élément $z_n \in Z_n$ tel que $\|z_n - \overline{u}\|_1 \to 0$ (où $F(\overline{u}) = 0$) de sorte qu'on a, en vertu de (9), (8) et (6)

$$\alpha\|x_n - z_n\|_1 \leqslant \|F_n(z_n)\|_1 \leqslant \|F(z_n)\|_1 = \|F(z_n) - F(\overline{u})\|_1 \leqslant m\|z_n - \overline{u}\| \to 0.$$

Alors $\|x_n - u\|_1 \leqslant \|x_n - z_n\|_1 + \|z_n - \overline{u}\|_1 \to 0$, c.q.f.d.

Comme $\|x_n - \overline{u}\| \to 0$, il n'y a plus qu'à calculer x_n. Fixons n et désignons par R_n l'espace euclidien à n dimensions; ses éléments par $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, le produit scalaire par $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$ et la norme $|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle$. La correspondance entre les éléments de R_n et ceux de Z_n, définie par la formule

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_n a_n \tag{10}$$

est biunivoque et isométrique, grâce à l'orthonormalité de a_i. La transformation $\big(U(\xi)\big)_i$ de l'espace R_n en lui-même, définie par la formule

$$\big(U(\xi)\big)_i = \Psi\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k, a_i\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

vérifie évidemment l'identité

$$\langle U(\xi), \eta \rangle = \Psi(x, y) \quad \text{si} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i, \; y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i a_i \tag{12}$$

et l'on tire de (12)

$$U(\xi) = 0 \equiv F_n\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i\Big) = 0. \tag{13}$$

En effet,

$$\begin{aligned} U(\xi) = 0 &\equiv \langle U(\xi), \eta \rangle = 0 \quad (\text{pour tout } \eta \in R_n) \\ &\equiv \Psi\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i, \sum_{k=1}^{n} \eta_k a_k\Big) = 0 \quad (\eta \in R_n), \\ &\equiv \Psi\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i, h\Big) = 0 \quad (h \in Z_n) \\ &\equiv \Big(F_n\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i\Big), h\Big) = 0 \quad (h \in Z_n) \\ &\equiv F_n\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i\Big) = 0. \end{aligned}$$

Tout revient alors à résoudre l'équation $U(\xi) = 0$. Or, les inégalités

$$|U(\xi) - U(\eta)| \leqslant m|\xi - \eta|, \tag{14}$$

$$\langle U(\xi) - U(\eta), \xi - \eta \rangle \geqslant a|\xi - \eta|^2 \tag{15}$$

qui sont des simples conséquences de (12) et des conditions (B) et (C), nous permettent d'employer la méthode de l'itération: posons ξ^0 arbitraire, $\xi^{k+1} = \xi^k - am^{-2}U(\xi^k)$; les ξ^k ainsi définis tendent avec $k \to \infty$ vers un $\overline{\xi} \in R_n$ tel que $U(\overline{\xi}) = 0$.

3.1. Soient Ω un domaine borné de R_n, S le bord de Ω, M l'ensemble de toutes les fonctions de classe C_2 sur Ω prenant la valeur 0 sur le bord S. Posons

$$(x, y) = \int_\Omega x(\xi_1, \ldots, \xi_n) y(\xi_1, \ldots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n, \tag{16}$$

$$(x, y)_1 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n \tag{17}$$

et désignons par H et H_1 les compléments de l'ensemble M en norme $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, respectivement $\|x\|_1 = (x, x)_1^{1/2}$. On a $M \subset H_1 \subset H$, d'après l'inégalité connue de Friedrichs

$$\mu \|x\|_1 \geqslant \|x\|, \quad \mu \text{ étant une constante.} \tag{18}$$

Soient $F_i(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, des fonctions définies sur R_n, continues avec leurs premières dérivées $\partial F_i / \partial t_k$, qui satisfont aux inégalités

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial t_k} s_i r_k \leqslant m \Big[\sum_{i=1}^{n} s_i^2\Big]^{1/2} \Big[\sum_{k=1}^{n} r_k^2\Big]^{1/2}, \tag{19}$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial t_k} s_i s_k \geqslant a \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \quad (0 < a < m) \tag{20}$$

pour toutes les suites $t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots, s_n, r_1, r_2, \ldots, r_n$. Considérons l'équation (en écrivant u_{ξ_i} au lieu de $\partial u / \partial \xi_i$)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \big(F_i(u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_n}\big) = a, \quad u(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \text{ sur } S, \tag{21}$$

où $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ est une fonction de H. Montrons que (21) a une seule solution généralisée. Posons dans ce but, pour $u \in M$,

$$\Psi(u, h) = \int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^{n} F_i(u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_n}) h_{\xi_i} + ah\Big] d\Omega. \tag{22}$$

Vérifions les conditions (A), (B) et (C) pour Ψ. Or, la condition (A) est évidente, ayant égard à (18); ensuite, l'existence de $\Psi'(u, f, h)$ découle du fait que toutes les fonctions en question sont de classe C_1. On calcule facilement que

$$\begin{aligned} \Psi'(u, f, h) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} [\Psi(u + \varepsilon f, h) - \Psi(u, h)] \\ &= \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} F_i^k(u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_n}) f_{\xi_i} h_{\xi_k} d\Omega \end{aligned}$$

où l'on écrit F_i^k au lieu de $\partial F_i/\partial t_k$. Vérifions (B) et (C). En vertu de (19)

$$\Psi'(u,f,h) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^n F_i^k(u_{\xi_1},\ldots,u_{\xi_n}) f_{\xi_i} h_{\xi_k} d\Omega$$

$$\leqslant \int_\Omega m \Big[\sum_{i=1}^n |f_{\xi_i}|^2\Big]^{1/2}\Big[\sum_{k=1}^n |h_{\xi_k}|^2\Big]^{1/2} d\Omega$$

$$\leqslant m\Big[\int_\Omega \sum_{i=1}^n |h_{\xi_i}|^2 d\Omega\Big]^{1/2}\Big[\int_\Omega \sum_{k=1}^n |f_{\xi_k}|^2 d\Omega\Big]^{1/2} = m\|f\|_1\|h\|_1$$

et d'une manière tout à fait analogue

$$\Psi'(u,f,f) = \int_\Omega \sum_{i,k=1} F_i^k(u_{\xi_1},\ldots,u_{\xi_n}) f_{\xi_i}^2 d\Omega$$

$$\geqslant \alpha \int_\Omega \sum_{i=1}^n |f_{\xi_i}|^2 d\Omega = \alpha\|f\|_1^2$$

de sorte que les conditions (A), (B) et (C) sont vérifiées. Il existe alors, d'après le théorème 1, un élément unique $\bar{u}\in H_1$ tel que $\Psi(\bar{u},h)=0$ pour tout $h\in M$. Il reste à vérifier que dans le cas $\bar{u}\in C_2$, $\bar{u}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ est une solution de (21). Mais on peut le constater en intégrant par parties l'égalité

$$\Psi(\bar{u},h) = \int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^n F_i(u_{\xi_1},\ldots,u_{\xi_n}) h_{\xi_i} + uh\Big] d\Omega = 0,$$

et en tenant compte du fait que $\int_{S'} uv dS = 0$ pour toute fonction $u\in H_1$ et toute fonction $v(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ continue sur S.

3.2. Nous indiquerons maintenant application de notre méthode à la théorie non linéaire de l'élasticité.

Soient Ω un domaine de R_3, dont le bord S est composé de parties non vides $S_1+S_2=S$; les déplacements des points $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ de Ω seront désignés par $u(\xi)=u_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $i=1,2,3$. Admettons que les déplacements sont si petits qu'on peut considérer les déformations e_i et les tensions σ_i comme des fonctions définies sur le même domaine Ω. Pour la même raison nous omettrons les termes carrés dans les formules des déformations, de sorte qu'elles prendront les formes

$$(23)\qquad e_i(h) = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \quad (i=1,2,3),$$
$$e_4(h) = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}+\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2},\quad e_5(h) = \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}+\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3},\quad e_6(h) = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}+\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}.$$

Définissons la matrice $a_{ik}(i,k=1,\ldots,6)$ comme il suit:

$$(24)\qquad a_{ik} = \left|\begin{matrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{matrix}\right| \qquad (\lambda,\mu>0)$$

et admettons, au lieu de la loi de Hooke linéaire, les relations suivantes entre les tensions σ_i et les déformations e_k

$$(25)\qquad \sigma_i = F_i(e_1,e_2,\ldots,e_6),\quad i=1,2,\ldots,6,$$

où les fonctions $F_i(t_1,t_2,\ldots,t_6)$ sont de classe C_1 sur R_6 et, de plus, satisfont aux inégalités suivantes:

$$(26)\qquad \Big[\sum_{i,k=1}^6 F_i^k s_i r_k\Big]^2 \leqslant m \sum_{i,k=1}^6 a_{ik} s_i S_k \sum_{i,k=1}^6 a_{ik} r_i r_k,$$

$$(27)\qquad \sum_{i,k=1}^6 F_i^k s_i S_k \geqslant \alpha \sum_{i,k=1}^6 a_{ik} s_i s_k,$$

où $F_i^k(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \partial F_i/\partial t_k (i,k=1,2,\ldots,6)$.

Soient $\mathfrak{a}=a^i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $\mathfrak{b}=b^i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ les champs de forces, définies et continues sur Ω resp. S_2.

L'état d'équilibre du corps Ω sous l'influence de forces $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, sous la condition que les points de la partie S_1 du bord S restent fixes (immobiles), s'exprime par l'équation

$$(28)\qquad \Psi(u,h) = \int_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^6 F_i(e_1(u),\ldots,e_6(u))\, e_i(h) + \sum_{i=1}^3 a^i h_i^i\Big\} d\Omega +$$
$$+ \int_{S_2} \sum_{i=1}^3 b^i h_i dS = 0 \quad \text{pour tout déplacement } h,$$

égal à 0 sur S_1.

Le premier membre de (28) constitue le travail virtuel, effectué par les forces $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ dans le déplacement h ([1], p. 660 ss.). Montrons que (28) a une solution unique dans un espace H_1 convenablement défini.

Dans ce but désignons par M l'ensemble de toutes les vecteur-fonctions $u=u_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $h=h_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ définies et de classe C_2 dans $\Omega+S$, égales à 0 sur S_1. Posons pour $u,v\in M$

$$(29)\qquad (u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^3 u_i v_i d\Omega,$$

$$(30)\qquad (u,v)_1 = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} e_i(u) e_k(v)\, d\Omega,$$

$$(31)\qquad (u,v)_* = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}\, d\Omega,$$

$$(32)\qquad \|u\|^2 = (u,u), \qquad \|u\|_1^2 = (u,u)_1, \qquad \|u\|_*^2 = (u,u)_*$$

et désignons par H (resp. H_1) le complément de M au sens de la norme $\|u\|$ (resp. $\|u\|_1$). Notons les inégalités

$$(33)\qquad \int_S \sum_{i=1}^{3} |u_i|^2\, dS \leqslant C_1[\|u\|^2 + \|u\|_*^2],$$

$$(34)\qquad C_2\|u\|_* \leqslant \|u\|_1 \leqslant C_3\|u\|_*,$$

$$(35)\qquad \|u\| \leqslant C_4\|u\|_1 \leqslant C_5\|u\|_*,$$

où C_i sont certaines constantes. Pour le démonstration remarquons que (33) est une simple conséquence de l'inégalité de Poincaré (voir [2], p. 101); le second membre de (34) est évident; le premier constitue l'inégalité de Korn; pour la démonstration voir [2], §§ 41 et 42, où se trouve aussi la démonstration de (35). On tire de (33), (34) et (35) que la fonctionnelle

$$\varphi(h) = \int_{S_2} \sum_{i=1}^{3} b^i h_i\, dS$$

est linéaire et bornée au sens de la norme $\|h\|_1$ (resp. $\|h\|_*$). En vertu de (35), il en est de même de

$$\psi(h) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} a^i h_i\, d\Omega.$$

Les fonctionnelles $\varphi(h)$ et $\psi(h)$ satisfont alors à la condition (A); pour vérifier que $\psi(u,h)$ remplit (A), (B) et (C), il suffit de le prouver pour

$$\Phi(u,h) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{6} F_i\big(e_1(u), e_2(u), \ldots, e_6(u)\big) e_i(h)\, d\Omega$$

vu que $\Psi(u,h) = \Phi(u,h) + \varphi(h) + \psi(h)$ et que $\Psi'(u,f,h) = \Phi'(u,f,h)$ $(u,f,h\in M)$. Or, en posant

$$F_i^k(t_1,\ldots,t_n) = \frac{\partial}{\partial t_k} F_i(t_1,\ldots,t_n),$$

on prouve facilement que

$$\Psi'(u,f,h) = \Phi'(u,f,h) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{6} F_i^k\big(e_1(u),\ldots,e_n(u)\big) e_i(f) e_k(h)\, d\Omega,$$

d'où

$$|\Psi'(u,f,h)| \leqslant m \int_\Omega \Big[\sum_{i,k} a_{i,k} e_i(f) e_k(f)\Big]^{1/2} \Big[\sum_{i,k} a_{i,k} e_i(h) e_k(h)\Big]^{1/2} d\Omega$$
$$\leqslant m \Big[\int_\Omega \sum_{i,k} a_{i,k} e_i(f) e_k(f)\, d\Omega\Big]^{1/2} \Big[\int_\Omega \sum_{i,k} a_{i,k} e_i(h) e_k(h)\, d\Omega\Big]^{1/2}$$
$$= m\|f\|_1\|h\|_1$$

en vertu de (26). D'une manière analogue on obtient de (27)

$$\Psi'(u,h,h) \geqslant a \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} e_i(h) e_k(h)\, d\Omega = m\|h\|_1^2.$$

Les conditions (A), (B) et (C) étant vérifiées, il existe en vertu du théorème 1, un élément unique $\bar{u}\in H_1$ tel que $\Psi(\bar{u},h) = 0$ pour tout $h\in M$, c'est-à-dire un élément remplissant la condition d'équilibre (28). Si $\bar{u}$ est de classe C, on peut montrer, en intégrant (28) par parties, que $u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ satisfait à

$$(36)\qquad \mathfrak{N}(u) = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{K}(u) = \mathfrak{b} \text{ sur } S_2, \qquad u = 0 \text{ sur } S_1,$$

où $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{K}$ sont certaines opérations différentielles non linéaires. Mais d'autre part, la forme (28) du problème d'équilibre nous assure l'existence unique d'une solution et permet même un calcul numérique de sorte que l'équation (36) ne joue qu'un rôle secondaire.

Remarque. Dans 3.1 on peut remplacer les hypothèses $F_i\in C_1$ et les inégalités (26) et (27) par les suivantes:

$$(37)\qquad |F_i(t_1,\ldots,t_n) - F_i(t_1',\ldots,t_n')| \leqslant \mu \max_i |t_i - t_i'|,$$

$$(38)\qquad \Big[\sum_{i,k} \Delta_k F_i s_i r_k\Big]^2 \leqslant m \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \sum_{k=1}^{n} r_k^2,$$

$$(39)\qquad \Delta_k F_i s_i s_k \geqslant a \sum_i s_i^2,$$

où

$$\Delta_k F_i(t_1,\ldots,t_n) = \frac{1}{\Delta}[F_i(t_1,\ldots,t_{k-1}, t_k+\Delta, t_{k+1},\ldots,t_n) - F_i(t_1,\ldots,t_n)].$$

En effet, faisons correspondre à chaque $\varepsilon > 0$, d'après [2], § 16, p. 69, une fonction $K_\varepsilon(t_1,\ldots,t_n)$ telle que:

1° K_ε est de classe C_∞ par rapport aux t_i;

2° $K_\varepsilon(t_1,\ldots,t_n)$ est positive, si $\sum_{i=1}^{n}|t_i|^2 < \varepsilon$, d'ailleurs égale à 0;

3° $\int\limits_{R_n}\!\!\ldots\!\int K_\varepsilon(t_1,\ldots,t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n = 1.$

Posons

(40) $$F_{i,\varepsilon}(t_1, \ldots, t_n) = \int_{R_n} \ldots \int K(t_1 - s_1, \ldots, t_n - s_n) F_i(s_1, \ldots, s_n) ds_1 ds_2 \ldots ds_n.$$

On tire de 1°, 2° et 3°

(41) $$\delta_\varepsilon = \sup_{t_k} |F_{i,\varepsilon}(t_1, \ldots, t_n) - F_i(t_1, \ldots, t_n)| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

En appliquant à (38) et (39) l'opération K_ε, définie par (40), on vérifie que les fonctions $F_{i,\varepsilon}$ satisfont aussi à (38) et (39); par conséquent, les $F_{i,\varepsilon}$ étant de classe C_1, elles satisfont à (26) et (27). Définissons $\Psi_\varepsilon(u, h)$ comme la fonctionnelle qui résulte de $\Psi(u, h)$, si l'on remplace dans la formule (22) les fonctions F_i par $F_{i,\varepsilon}$; définissons ensuite l'opération F_ε par l'identité $\big(F_\varepsilon(u), h\big)_1 = \Psi_\varepsilon(u, h)$, pour $\varepsilon > 0$. En vertu de (41) on a

(42) $$|\Psi(u, h) - \Psi_\varepsilon(u, h)| \leqslant \delta_\varepsilon \|h\|_1;$$

par conséquent, pour $u \in M$,

(43) $$\|F(u) - F_\varepsilon(u)\|_1 \leqslant \delta_\varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

vu que $\big(F_\varepsilon(u), h\big) = \Psi_\varepsilon(u, h)$, $\big(F(u), h\big) = \Psi(u, h)$. Or, les fonctions $F_{i,\varepsilon}$ satisfaisant aux hypothèses de 3.1, l'opération F_ε satisfait aux inégalités (4), (5) et (6) du moins pour $x, y \in M$; en vertu de (43) il en est de même de F pour $x, y \in M$, d'où l'on conclut, en suivant la démonstration du théorème 1, qu'il existe un seul $\overline{u} \in H_1$ tel que $F(\overline{u}) = 0$. Un remarque analogue sera vraie aussi pour 3.2.

Travaux cités

[1] L. Landau et E. Liwszyc, *Mechanika ośrodków ciągłych*, Warszawa 1958.

[2] С. Г. Михлин, *Проблема минимума квадратичного функционала*, Москва 1952.

[3] F. Riesz et Béla Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1952.

Reçu par la Rédaction le 12. 11. 1966

STUDIA MATHEMATICA, T. XXIX. (1968)

On the spectrum of finitely-generated locally m-convex algebras *

by

R. M. BROOKS (Minneapolis)

If A is a commutative complete locally m-convex algebra with identity, then there is a natural map $m \to (\hat{a}_1(m), \ldots, \hat{a}_N(m))$ of the spectrum M of A onto the joint spectrum of any generating family $\{a_1, \ldots, a_N\}$ for A. If A is a Banach algebra, then the mapping is topological. We shall show that for non-Banach algebras one can make only the obvious statement that the map is a continuous injection, even in the simplest case (an F-algebra with one generator). We demonstrate this with a series of examples and show (i) it may occur that one generating family yields a topological map, while a second fails to, (ii) it may be that no generating family induces a homeomorphism, (iii) the joint spectrum of a generating family need not be polynomially convex (contrary to the Banach algebra results).

We show that while $\sigma(a_1, \ldots, a_N)$ need not be polynomially convex, it is polynomially convex with respect to a certain family of compact subsets determined by the algebra, and we give conditions in terms of the family $\{a_1, \ldots, a_N\}$ and its action on the equicontinuous subsets of M in order that the natural map be topological. These conditions are necessary and sufficient in case A is an F-algebra, sufficient but not necessary for more general algebras.

If S is a compact subspace of C^N, then there exists an N-generated Banach algebra A such that S is the spectrum of A if, and only if, S is polynomially convex. We consider this question for locally m-convex algebras and show (i) if S is a subspace of C^N, then S is the spectrum of an N-generated F-algebra if, and only if, S is hemi-compact and polynomially convex, (ii) every subspace of C^N is the spectrum of an N-generated locally m-convex algebra.

1. The natural maps of the spectrum. In this paper we shall consider only commutative complete locally m-convex algebras with identity and shall write "locally m-convex algebra" rather than the longer, more complete, description. A locally m-convex algebra is a locally convex (Haus-

* The research for this paper was supported in part by NSF Grant 5707.