STUDIA MATHEMATICA, T. XXIX. (1968)

Ein hinreichendes Kriterium für die Lösbarkeit der Dirichletschen Randwertaufgabe für quasilineare elliptische Differentialgleichungen

von

HANS TRIEBEL (Jena)

Die Arbeit befaßt sich mit dem Dirichletschen Randwertproblem für quasilineare elliptische Differentialgleichungen der Form

$$(1)\qquad (-1)^m \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ |\alpha|=|\beta|=m}} D^\beta\big(B^\alpha_\beta(x)D^\alpha u\big)+\sum_{\substack{\lambda \\ |\lambda|=0,\dots,m}}(-1)^{|\lambda|}D^\lambda\big(B^\lambda(x, D^\varrho u)\big)=0$$

in einem Gebiet Ω mit endlichem Maß, $\Omega\subset R_n$ (R_n ist der n-dimensionale reelle euklidische Raum), $|\varrho|\leqslant m-1$. Dabei wird die übliche Kurzschreibweise verwendet:

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\qquad \alpha_i\geqslant 0 \text{ und ganz},$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i=|\alpha|,\qquad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

entsprechend für die Multiindizes β, λ und ϱ. Das Ziel der Arbeit besteht in der Behandlung des Dirichletschen Problems unter möglichst schwachen Voraussetzungen bezüglich der Funktionen $B^\alpha_\beta(x)$ und $B^\lambda(x\zeta^{(\varrho)})$. Für die Anwendung der hier verwendeten Methode erweist es sich als ausreichend, $B^\alpha_\beta(x)$ als lokal integrierbar vorauszusetzen, die Funktionen $B^\lambda(x, \zeta^{(\varrho)})$ müssen der Carathéodory-Bedingung genügen und gewisse Abbildungseigenschaften besitzen (Abschnitt 4). Wachstumsbeschränkungen für die Funktionen $B^\lambda(x, \zeta^{(\varrho)})$ bezüglich $\zeta^{(\varrho)}$ im üblichen Sinne sind nicht nötig. Die bei derart schwachen Voraussetzungen notwendige Präzisierung der Aufgabenstellung erfolgt im Abschnitt 4. Das gewonnene Kriterium, Abschnitt 6, stellt eine wesentliche Vereinfachung gegenüber dem in [7], Satz 1, S. 357, angegebenen Kriterium dar. Dementsprechend ist auch das hier benutzte Verfahren einfacher als die in [7] verwendete Methode.

1. Einbettungssätze. Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es notwendig, die in den Sobelevschen Einbettungssätzen auftretenden Konstanten abzuschätzen.

Nach Levin [4] gilt

$$\int_0^\infty \varphi(r)\,dr \leqslant C\Big(\int_0^\infty r^{p-1-\lambda}\varphi^p(r)\,dr\Big)^s\Big(\int_0^\infty r^{q-1+\mu}\varphi^q(r)\,dr\Big)^t, \tag{2}$$

$$\varphi(r) \geqslant 0,\ p>1,\ q>1,\ \lambda>0,\ \mu>0,$$

$$s = \frac{\mu}{p\mu+q\lambda},\qquad t = \frac{\lambda}{p\mu+q\lambda}, \tag{3}$$

$$C = C^{p,q}_{\lambda,\mu} = \frac{1}{(ps)^s(qt)^t}\left\{\frac{\Gamma\left(\dfrac{s}{1-s-t}\right)\Gamma\left(\dfrac{t}{1-s-t}\right)}{(\lambda+\mu)\,\Gamma\left(\dfrac{s+t}{1-s-t}\right)}\right\}^{1-s-t}, \tag{4}$$

sofern die in (2) auftretenden Integrale existieren. Die Konstanten sind nicht verbesserungsfähig. Unter Verwendung der Levinschen Ungleichung kann man leicht folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 1. *Ist $\Omega \subset R_n$ ein Gebiet mit endlichem Maß, $|\Omega| < \infty$, so gilt für*

$$m - n/2 + n/\varkappa > 0,\qquad m \text{ nat. Zahl},\ \infty \geqslant \varkappa > 2, \tag{5}$$

die Ungleichung

$$\|f\|_{L_\varkappa(\Omega)} \leqslant K^m_\varkappa \|f\|_{\mathring{W}^m_2(\Omega)},\qquad f\in \mathring{W}^m_2(\Omega). \tag{6}$$

Dabei ist

$$\|f\|^2_{\mathring{W}^m_2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i_1,\ldots,i_m}^{1,\ldots,n} \left|\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\right|^2 dx \tag{7}$$

und

$$K^m_\varkappa = \big[C^{2(1-1/\varkappa),2(1-1/\varkappa)}_{n(1-2/\varkappa),2m-n(1-2/\varkappa)}\big]^{(2m(\varkappa-1))/(\varkappa-2)}\left(\frac{\omega_n}{2\pi}\right)^m |\Omega|^{[m-n/2+n/\varkappa]/n}. \tag{8}$$

$C^{p,q}_{\lambda,\mu}$ ist die Levinsche Konstante aus Formel (4). ω_n ist die Oberfläche der Einheitskugel im R_n.

Bemerkung. (6) ist ein Sobolevscher Einbettungsatz, man vergl. z. B. [5], S. 64.

Beweis. Setzt man in (2)

$$p = q = \frac{2}{\varkappa'}\qquad \left(\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{\varkappa'} = 1\right),$$

$$\lambda = n\left(\frac{2}{\varkappa'}-1\right),\qquad \mu = 2m-n+\frac{2n}{\varkappa},$$

$$\varphi(r) = |f(r,\vartheta)|^{\varkappa'} r^{n-1},$$

(r,ϑ) Polarkoordinaten, $f(x) = f(r,\vartheta)\in C_0^\infty(R_n)$, $f(x)$ komplex, so folgt nach kurzer Rechnung

$$\int_{R_n} |f(x)|^{\varkappa'}dx \leqslant C^{2(1-1/\varkappa),2(1-1/\varkappa)}_{n(1-2/\varkappa),2m-n(1-2/\varkappa)}\Big(\int_{R_n}|f(x)|^2dx\Big)^s\Big(\int_{R_n}|f(x)|^2r^{2m}dx\Big)^t\omega_n^{1/p'}. \tag{9}$$

Denkt man sich (9) für die Fouriertransformierte $\widehat{f(x)}(\xi)$ von $f(x)$ aufgeschrieben, so erhält man den Satz mit der dort angegebenen Konstanten unter Verwendung der Ungleichung von Hausdorff und Young (vgl. [6])

$$\|f\|_{L_\varkappa} \leqslant (2\pi)^{-n(2-\varkappa')/2\varkappa'}\|\hat f\|_{L_{\varkappa'}},$$

der Identität

$$\|\hat f r^m\|^2_{L_2} = \|f\|^2_{\mathring{W}^m_2(\Omega)},$$

sowie der Abschätzung

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{(\varkappa-2)/2\varkappa}\|f\|_{L_\varkappa(\Omega)}.$$

2. Koordinierte Normen. In der gleichen Weise wie in [8], S. 328, beweist man den folgenden Hilfssatz, der für die weiteren Betrachtungen von Interesse ist:

Hilfssatz 2. *Sind die komplexen Funktionen $B^\alpha_\beta(x)$,*

$$B^\alpha_\beta(x) = \overline{B^\beta_\alpha(x)},$$

in Ω lokal integrierbar und genügt die Bilinearform

$$(\varphi,\psi)_{H_B} = \int_\Omega \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ |\alpha|=|\beta|=m}} B^\alpha_\beta(x)D^\alpha\varphi D^\beta\overline{\psi}\,dx,\qquad \varphi,\psi\in C_0^\infty(\Omega),\ |\Omega|<\infty,$$

der Bedingung

$$\|\varphi\|^2_{H_B} = (\varphi,\varphi)_{H_B} \geqslant \|\varphi\|^2_{\mathring{W}^m_2}, \tag{10}$$

so sind die Normen $\|\varphi\|_{H_B}$ und $\|\varphi\|_{\mathring{W}^m_2}$ koordiniert. Also kann man $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_{H_B}$ so zu einem Hilbertraum H_B vervollständigen, daß

$$H_B \subset \mathring{W}^m_2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$$

gilt.

Bemerkung. (10) ist eine Elliptizitätsbedingung.

3. Ein Fixpunktsatz. Ist $\mathfrak{B}$ ein (komplexer) Banachraum und $K = \{x \mid \|x\| \leqslant c\}$, so wird innerhalb der Kugel K eine Schar $A(x,\mu)$ vollstetiger (i.a. nichtlinearer) Operatoren betrachtet, $\mu\in[0,1]$, $x\in K$. Der nachstehende Hilfssatz ist dann eine Folgerung aus dem Fixpunktprinzip von Leray und Schauder [3].

Hilfssatz 3. (a) *Für alle* $\mu\in[0,1]$ *und für alle* x *mit* $\|x\|=c$ *sei* $x-A(x,\mu)\neq 0$.

(b) *Für alle* $x\in K$ *sei*

$$\|A(x,\mu_1)-A(x,\mu_2)\|\leqslant\varepsilon \quad \text{für} \quad |\mu_1-\mu_2|\leqslant\delta(\varepsilon).$$

(c) $A(x,0)$ *sei linear.*

Dann besitzt $x=A(x,\mu)$ *für jedes* $\mu\in[0,1]$ *mindestens eine Lösung mit* $x\in K$.

4. Voraussetzungen und Aufgabenstellung. Damit für $u\in H_B$ und $\eta\in H_B$ der Ausdruck

$$(11)\qquad F_u(\eta)=\int_\Omega\Big[\sum_{\substack{\alpha,\beta\\|\alpha|=|\beta|=m}}B_\beta^\alpha(x)D^\alpha u D^\beta\bar\eta+\sum_{\substack{\lambda\\|\lambda|=0,\dots,m}}B^\lambda(x,D^\varrho u)D^\lambda\bar\eta\Big]dx,$$
$$0\leqslant|\varrho|\leqslant m-1,$$

sinnvoll ist, muß $D^\lambda\bar\eta B^\lambda(x,D^\varrho u)$ integrierbar sein. H_B hat die Bedeutung aus Hilfssatz 2. Nach den Sobolevschen Einbettungssätzen [5], S. 64, folgt aus $\eta\in H_B\subset \mathring{W}_2^m$

$$D^\lambda\eta\in L_{p_{|\lambda|}}\quad\text{mit}\quad m-\frac{n}{2}\geqslant|\lambda|-\frac{n}{p_{|\lambda|}}.$$

(11) ist somit sinnvoll, wenn

$$B^\lambda(x,D^\varrho u)\in L_{p'_{|\lambda|}}\quad\left(\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p'_k}=1\right)$$

erfüllt ist. Diese Vorbetrachtungen lassen die nachfolgenden Voraussetzungen als natürlich erscheinen.

Voraussetzungen. (a) *Die komplexen Funktionen* $B_\beta^\alpha(x)$ *genügen den Voraussetzungen aus Hilfssatz* 2.

(b) *Die komplexen Funktionen* $B^\lambda(x,\zeta^{(\varrho)})$ *sind für* $x\in\Omega$, $\Omega\subset R_n$, $|\Omega|<\infty$, *und für beliebige komplexe Zahlen* $\zeta^{(\varrho)}$ *erklärt,* ($\zeta^{(\varrho)}$ *steht für* $D^\varrho u$ *in der Formel* (11)), λ *und* ϱ *sind Multiindizes wie in* (11), $0\leqslant|\lambda|\leqslant m$, $0\leqslant|\varrho|\leqslant m-1$. *Ferner existiere für jedes* ε, $\varepsilon>0$, *ein* $\delta=\delta(x,\varepsilon)$, so *daß*

$$|B^\lambda(x,\zeta_1^{(\varrho)})-B^\lambda(x,\zeta_2^{(\varrho)})|\leqslant\varepsilon\quad\text{für}\quad\sum_{\substack{\varrho\\|\varrho|=0,\dots,m-1}}|\zeta_1^{(\varrho)}-\zeta_2^{(\varrho)}|\leqslant\delta(x,\varepsilon)$$

ist. Bei fixierten Zahlen $\zeta^{(\varrho)}$ *sei* $B^\lambda(x,\zeta^{(\varrho)})$ *meßbar.*

(c) p_k, $k=1,\dots,m-1$, *sind Konstanten, die den Einschränkungen*

$$(12)\qquad 2<p_k<\infty,$$

$$(13)\qquad m-\frac{n}{2}>k-\frac{n}{p_k}$$

genügen; $p_m=2$.

Für $f^{(\varrho)}(x)\in L_{p_{|\varrho|}}(\Omega)$ *sei*

$$B^\lambda(x,f^{(\varrho)}(x))\in L_{p'_{|\lambda|}}(\Omega),\quad\left(\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p'_k}=1\right).$$

Nach einem Satz von Carathéodory [1], S. 665, folgt aus den Voraussetzungen (b), daß $B^\lambda(x,f^{(\varrho)}(x))$ meßbar ist, wenn die Funktionen $f^{(\varrho)}(x)$ meßbar sind. Die Einschränkung $p_k>2$, Formel (12), ist unwesentlich, sie erleichtert aber die nachstehenden Rechnungen, insbesondere können dann die Sobolevschen Einbettungssätze mit den im Hilfssatz 1 angegebenen Konstanten verwendet werden.

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist bei festem $u\in H_B$ $F_u(\eta)$, Formel (11), ein lineares stetiges Funktional zweiter Art bezüglich η.

Aufgabenstellung. *Gesucht sind Funktionen* $u(x)\in H_B$, *so daß für alle* $\eta\in H_B$

$$F_u(\eta)=0$$

ist.

Sind die in den Ausdruck $F_u(\eta)$ eingehenden Funktionen hinreichend oft differenzierbar (im klassischen oder verallgemeinerten Sinne), so bedeutet die Aufgabenstellung die Suche nach Lösungen des Dirichletschen Problems mit verschwindenden Randbedingungen für die Differentialgleichung (1).

5. Weitere Hilfssätze. Aus den Voraussetzungen (b) und (c) erhält man nach Krasnosel'skii [2], Theorem 2.1, S. 22, Theorem 2.2, S. 26, und Theorem 2.3, S. 27, den nachstehenden Hilfssatz (man vergleiche auch [7], Hilfssatz 2):

Hilfssatz 4. *Aus den Voraussetzungen* (b) *und* (c) *folgt die Existenz nicht negativer Konstanten* $a_1,\dots,a_m$ *und* $b_1,\dots,b_m$, *so daß*

$$(14)\qquad |B^\lambda(x,\zeta^{(\varrho)})|^{p'_{|\lambda|}}\leqslant a_{|\lambda|}\sum_{\substack{\varrho\\|\varrho|=0,\dots,m-1}}|\zeta^{(\varrho)}|^{p_{|\varrho|}}+g_\lambda(x),$$

$$0\leqslant|\lambda|\leqslant m,\quad g_\lambda(x)\geqslant 0,\quad g_\lambda(x)\in L_1(\Omega),\quad \|g_\lambda\|_{L_1}\leqslant b_{|\lambda|},$$

ist.

Ferner gibt es für jedes ε, $\varepsilon > 0$, *und für jedes Funktionensystem* $\{f_1^{(\varrho)}(x)\}$ *ein* $\delta = \delta(\varepsilon, f_1^{(\varrho)})$, *so daß*

$$\|B^\lambda(x, f_1^{(\varrho)}(x)) - B^\lambda(x, f_2^{(\varrho)}(x))\|_{L_{p'_{|\lambda|}}} \leq \varepsilon \quad \textit{ist für} \tag{15}$$

$$\sum_{\substack{\varrho \\ |\varrho|=0,\ldots,m-1}} \|f_1^{(\varrho)}(x) - f_2^{(\varrho)}(x)\|_{L_{p_{|\varrho|}}} \leq \delta(\varepsilon, f_1^{(\varrho)}).$$

Ferner ist

$$\|B^\lambda(x, f^{(\varrho)}(x))\|_{L_{p_{|\lambda|}}} \leq c, \tag{16}$$

falls

$$\sum_{\substack{\varrho \\ |\varrho|=0,\ldots,m-1}} \|f^{(\varrho)}(x)\|_{L_{p_{|\varrho|}}} \leq c'(c)$$

gilt.

Die Formeln (15) und (16) besagen, daß die durch $B^\lambda(x, f^{(\varrho)}(x))$ vermittelte Abbildung von $f^{(\varrho)}(x) \in L_{p_{|\varrho|}}(\Omega)$ in $L_{p'_{|\lambda|}}$ stets stetig und beschränkt ist. Die Konstanten $a_1, \ldots, a_m$ und $b_1, \ldots, b_m$ spielen später eine entscheidende Rolle.

Hilfssatz 5. *Die durch* $B^\lambda(x, D^\varrho u)$ *vermittelte Abbildung von* H_B *in* $L_{p'_{|\lambda|}}$ *ist vollstetig.*

H_B hat die im Hilfssatz 2 angegebene Bedeutung.

Beweis. Nach (13) existiert eine Zahl q, $1 \leq q \leq \infty$, so daß

$$k - \frac{n}{p_k} < m - 1 - \frac{n}{q} < m - \frac{n}{2}, \qquad k = 1, \ldots, m-1,$$

ist. Daraus folgt, daß der Einbettungsoperator $I_{\mathring{W}_2^m \to \mathring{W}_q^{m-1}}$ von $\mathring{W}_2^m$ in $\mathring{W}_q^{m-1}$ vollstetig ist, da $|\Omega| < \infty$ gilt ([5], S. 94; ist Ω unbeschränkt, so sind einige Zusatzüberlegungen notwendig, auf die hier nicht eingegangen werden soll). Die durch $B^\lambda(x, D^\varrho u)$ vermittelte Abbildung von $\mathring{W}_q^{m-1}$ in $L_{p'_{|\lambda|}}$ ist nach Hilfssatz 4 stetig und beschränkt. Aus

$$\underbrace{B^\lambda(x, D^\varrho u)}_{\substack{\text{Abbildung von} \\ \mathring{W}_2^m \text{ in } L_{p'_{|\lambda|}}}} = \underbrace{B^\lambda(x, D^\varrho u)}_{\substack{\text{Abbildung von} \\ \mathring{W}_q^{m-1} \text{ in } L_{p'_{|\lambda|}}}} \cdot I_{\mathring{W}_2^m \to \mathring{W}_q^{m-1}}$$

und $H_B \subset \mathring{W}_2^m$ folgt dann der Hilfssatz.

Bei fixiertem $u \in H_B$ ist

$$\sum_{\substack{\lambda \\ |\lambda|=0,\ldots,m}} \int_\Omega B^\lambda(x, D^\varrho u) D^\lambda \bar{\eta}\, dx = (Su, \eta)_{H_B}, \tag{17}$$

wobei S ein (i. a. nichtlinearer) Operator ist, dessen Definitionsgebiet H_B ist und dessen Wertevorrat im Raum H_B liegt. Es gilt

Hilfssatz 6. *S ist ein im Raum H_B wirkender vollstetiger Operator.*

Beweis. Die Richtigkeit der Behauptung folgt aus Hilfssatz 5 und der Abschätzung

$$\|Su_1 - Su_2\|_{H_B} \leq c \sum_{\substack{\lambda \\ |\lambda|=0,\ldots,m}} \|B^\lambda(x, D^\varrho u_1) - B^\lambda(x, D^\varrho u_2)\|_{L_{p'_{|\lambda|}}}.$$

6. Der Existenzsatz. Aus (11), (17) und der im Abschnitt 4 formulierten Aufgabenstellung folgt, daß das gestellte Problem genau dann eine Lösung besitzt, wenn es eine Funktion $u \in H_B$ mit $u + Su = 0$ gibt.

Betrachtet man die Schar $u + \mu Su$, $\mu \in [0, 1]$, so sieht man, daß mit $A(u, \mu) = -\mu Su$ die Bedingungen (b) und (c) des Hilfssatzes 3 für jede Kugel $K = \{u \mid \|u\|_{H_B} \leq c\}$ erfüllt sind. Um ein Kriterium anzugeben, wann auch die Bedingung (a) erfüllt ist, gehe ich von der Annahme aus, daß, für ein $\mu \in [0, 1]$, $u(x)$ eine Lösung von $u + \mu Su = 0$ ist. Daraus folgt

$$\|u\|_{H_B}^2 \leq |(Su, \mu)| \leq \sum_{\substack{\lambda \\ |\lambda|=0,\ldots,m}} \|B^\lambda(x, D^\varrho \mu)\|_{L_{p'_{|\lambda|}}} \|D^\lambda u\|_{L_{p'_{|\lambda|}}}.$$

Aus den Formeln (6) und (10) erhält man

$$\|D^\lambda u\|_{L_{p_{|\lambda|}}} \leq K_{p_{|\lambda|}}^{m-|\lambda|} \|u\|_{H_B} \qquad (K_2^0 = 1).$$

Hilfssatz 4, Formel (14), zeigt, daß

$$\|B^\lambda(x, D^\varrho u)\|_{L_{p'_{|\lambda|}}}^{p'_{|\lambda|}} \leq a_{|\lambda|} \sum_{\substack{\varrho \\ |\varrho|=0,\ldots,m-1}} \|D^\varrho u\|_{L_{p_{|\varrho|}}}^{p_{|\varrho|}} + b_{|\lambda|}$$

ist. Berücksichtigt man, daß es $\binom{n+k-1}{k}$ verschiedene Ableitungen der Ordnung k gibt, so folgt aus den beiden letzten Abschätzungen

$$\|u\|_{H_B}^2 \leq \sum_{r=0}^{m} \binom{n+r-1}{r} \Big[a_r \sum_{j=0}^{m-1} \binom{n+j-1}{j} (K_{p_j}^{m-j})^{p_j} \|u\|_{H_B}^{p_j} + b_r\Big]^{1/p'_r} K_{p_r}^{m-r} \|u\|_{H_B}.$$

Aus dieser Ungleichung, Hilfssatz 3 und den obigen Bemerkungen erhält man den

Existenzsatz. *Gibt es eine Zahl* e, $e > 0$, *so daß*

$$e > \sum_{r=0}^{m} \binom{n+r-1}{r} \Big[a_r \sum_{j=0}^{m-1} \binom{n+j-1}{j} (K_{p_j}^{m-j})^{p_j} e^{p_j} + b_r\Big]^{1/p'_r} K_{p_r}^{m-r} \tag{18}$$

ist, so besitzt die verallgemeinerte quasilineare elliptische Differentialgleichung

$$F_u(\eta) = 0 \quad \text{für alle } \eta \in H_B$$

mindestens eine Lösung $u \in H_B$, $\|u\|_{H_B} < e$.

Dabei haben a_r, b_r *und* p_r *die in den Voraussetzungen und im Hilfssatz 4 angegebene Bedeutung, während* K_p^k *die Einbettungskonstanten aus Hilfssatz 1 sind.*

FOLGERUNG 1. *Aus Formel* (18) *folgt, daß das Problem mindestens eine Lösung besitzt, wenn die Konstanten* a_r *hinreichend klein sind.*

FOLGERUNG 2. *Die explizite Angabe der Einbettungskonstanten, Formel* (8) *und Formel* (13) *zeigen, daß die Aufgabe bei gegebenen Konstanten* a_r *und* b_r *mindestens eine Lösung besitzt, wenn* $|\Omega|$ *hinreichend klein ist.*

FOLGERUNG 3. *Aus der Herleitung des Existenzsatzes folgt auch der bekannte Sachverhalt, daß das Problem mindestens eine Lösung besitzt, wenn die Funktionen* $B^\lambda(x, \zeta^{(\varrho)})$ *einer Wachstumsbeschränkung der Form*

$$|B^\lambda(x), \zeta^{(\varrho)})| \leqslant c \sum_{\substack{\varrho \\ |\varrho|=0,\ldots,m-1}} |\zeta^{(\varrho)}|^\gamma + b(x),$$

$b(x) \geqslant 0$, $b(x) \in L_1(\Omega)$, $\gamma < 1$, *genügen. In diesem Fall kann man bekanntlich eine Apriori-Abschätzung für eventuelle Lösungen herleiten.*

Die Überlegungen dieser Arbeit kann man auf unbeschränkte Gebiete übertragen, die kein endliches Maß besitzen. Ferner ist eine Ausdehnung der Betrachtungen auf Systeme von Differentialgleichungen möglich, [7].

Literaturnachweis

[1] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, New York 1948.

[2] M. A. Krasnosel'skii, *Topological methods in the theory of non-linear integral equations*, Oxford-London-New York-Paris 1964.

[3] J. Leray et J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 51 (1934), S. 45-78.

[4] V. I. Levin, *Genaue Konstanten in Ungleichungen vom Carlsonschen Typ*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 59, Nr. 4 (1948), S. 635-638 (russisch).

[5] S. L. Sobolev, *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik*, Novosibirsk 1962 (russisch).

[6] E. C. Titchmarsh, *Introduction to theory of Fourier integrals*, Oxford 1937.

[7] H. Triebel, *Randwertprobleme quasilinearer elliptischer Differentialgleichungssysteme*, Math. Nachr. 31 (1966), S. 347-362.

[8] — *Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen elliptischer Differentialoperatoren*, Math. Zeitschrift 90 (1965), S. 325-338.

Reçu par la Rédaction le 2. 10. 1966

STUDIA MATHEMATICA, T. XXIX. (1968)

Characterizations of solutions of $\Delta f = cf$

by

KENNETH O. LELAND (Virginia)

1. In [1] the author gives a characterization of families of analytic mappings between infinite-dimensional real Banach spaces, making no requirement of differentiability; employing Lipschitz type conditions, and such algebraic and geometric properties as closure under addition and closure under linear translation. Differentiability and power series expansions are obtained directly by functional analysis arguments. In this paper we restrict our attention to functions on subsets of a Euclidean space E into the reals R.

If Δ is the elementary Laplacian operator and c an arbitrary constant, then the families of functions in question are solution spaces of equations of the form

$$\Delta f = cf.$$

THEOREM 1. *Let* f_0 *be an element of the collection* $\mathfrak{F}$ *of continuous functions on open subsets of the Euclidean space* E *into* R. *Then the following statements are equivalent:*

(1) (basic characterization) f_0 *is an element of a family* F *of functions of* $\mathfrak{F}$ *such that:*

(a) *For* $f, g \in F$, *the sum* $f+g$ *defined on the intersection of the domains of* f *and* g, *lies in* f.

(Note. we allow the notion of the „null" function whose domain is the empty set.)

(b) $rf \in F$ *for* $r \in R$, $f \in F$.

(c) *For* $f \in F$, *and* S *an open set in* E, *the restriction* $f|S$ *of* f *to* S *lies in* F.

(d) *For* $f \in F$, $x \in E$, *the translate* f_x *lies in* F, *where* $f_x(y) = f(y-x)$ *for all* $y \in E$ *such that* $y - x \in \operatorname{dom} f$.

(e) *For* $f \in F$, *and* g *a rotation of* E *into itself, the composition of* f *and* g, fg, *lies in* F.

(f) *If* $f_1, f_2, \ldots$ *is a sequence of elements of* F *with common domain* S, *which converges uniformly on* S *to a limit function* f, *then* $f \in F$.