STUDIA MATHEMATICA, T. XXVIII. (1967)

Sur la convergence presque partout des séries de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0,1)$

par

P. BILLARD (Marseille)

Nous nous proposons ici d'étendre au système de Walsh un théorème récent de L. Carleson affirmant que la série de Fourier de toute fonction de l'espace $L^2(0,2\pi)$ est presque partout convergente (cf. [1]).

Les méthodes que nous utiliserons s'inspirent naturellement de celles de Carleson. Cependant des modifications sont nécessaires — ne fut-ce que parce que Carleson fait largement usage de la transformation de Hilbert, qui n'existe pas dans notre cas. C'est pourquoi une rédaction complète et détaillée nous a paru souhaitable. D'autre part, certains calculs, difficiles dans le cas du système trigonométrique, se trouvent simplifiés pour le système de Walsh. Il se peut donc que la présente rédaction facilite au lecteur l'étude ultérieure du mémoire de Carleson.

§ 1. Notations et préliminaires. $(r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots)$ et $(w_0, w_1, \ldots \ldots, w_n, \ldots)$ désigneront les systèmes classiques de Rademacher et de Walsh sur $(0,1)$. Pour un entier $n \geqslant 1$ nous définirons l'entier N_n par $2^{N_n} \leqslant n < 2^{N_n+1}$ et nous écrirons n dans le système à base 2

$$(1.1)\quad n = \zeta_0 + \zeta_1 2^1 + \ldots + \zeta_{N_n} 2^{N_n} \quad (\zeta_j = 0 \text{ ou } 1;\, j = 0, 1, \ldots, N_n;\, \zeta_{N_n} = 1).$$

Le noyau de Dirichlet-Walsh $W_n(t)$ est défini par

$$(1.2)\qquad W_n(t) = w_0(t) + w_1(t) + \ldots + w_{n-1}(t) \qquad (t \in (0,1)).$$

Désignons par $\zeta_{N_n}, \zeta_{n_1}, \ldots, \zeta_{n_k}$ avec $N_n > n_1 > \ldots > n_k$ les ζ_j de (1.1) qui sont égaux à 1; nous avons

$$(1.3)\qquad W_n(t) = \prod_{j=1}^{N_n} \big(1 + r_j(t)\big) + r_{N_n+1}(t) \prod_{j=1}^{n_1} \big(1 + r_j(t)\big) + \ldots + \\ + r_{N_n+1}(t) r_{n_1+1}(t) \ldots r_{n_{k-1}+1}(t) \prod_{j=1}^{n_k} \big(1 + r_j(t)\big)$$

en convenant de remplacer $\prod_{j=1}^{n_k} \big(1 + r_j(t)\big)$ par 1 si $n_k = 0$. Mais (1.3) s'écrit aussi sous la forme suivante qui sera celle utilisée par la suite:

$$(1.4)\qquad W_n(t) = w_n(t) [\delta^*_{N_n}(t) + \delta^*_{n_1}(t) + \ldots + \delta^*_{n_k}(t)],$$

où

$$\delta_j^*(t) = \begin{cases} 2^j & \text{pour} \quad 0 < t < 2^{-j-1}, \\ -2^j & \text{pour} \quad 2^{-j-1} < t < 2^{-j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{ailleurs}, \end{cases}$$

car $w_n(t) = r_{N_n+1}(t) r_{n_1+1}(t) \ldots r_{n_k+1}(t)$.

Notons que nous avons

$$(1.5) \qquad \delta_j^*(t) = \sum_{\nu=2^j}^{\nu=2^{j+1}-1} w_\nu(t) = r_{j+1}(t) \sum_{\nu=0}^{\nu=2^j-1} w_\nu(t)$$

$$= r_{j+1}(t) \prod_{\nu=1}^{\nu=j} \big(1+r_\nu(t)\big) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

et nous poserons

$$(1.6) \qquad \delta_n(t) = \delta_{N_n}^*(t) + \delta_{n_1}^*(t) + \ldots + \delta_{n_k}^*(t).$$

Par $\omega_{j,\nu}$ (j, ν entiers $\geqslant 0$, $0 \leqslant j < 2^\nu$) nous désignerons l'intervalle $\big(j\cdot 2^{-\nu}, (j+1)2^{-\nu}\big)$.

Toute notre argumentation sera réelle, par exemple lorsque nous parlerons de l'espace $L^p(0,1)$ il sera toujours entendu qu'il s'agit de l'espace réel $L^p(0,1)$.

Etant donnée une fonction $f \in L^1(0,1)$ et si $S(f)$ est sa série de Fourier-Walsh

$$(1.7) \quad S(f) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(t) \qquad \Big(a_n = a_n(f) = \int_0^1 f(t) w_n(t)\,dt, \ n = 0, 1, 2, \ldots\Big)$$

nous poserons

$$(1.8) \qquad \begin{aligned} \Delta_k(t) &= \Delta_k(f,t) = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n w_n(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \\ \Delta_{-1}(t) &= \Delta_{-1}(f,t) = a_0 w_0(t) = a_0 \end{aligned}$$

et nous écrirons aussi (1.7) sous la forme

$$(1.9) \qquad S(f) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \Delta_k(t).$$

Nous utiliserons le théorème classique suivant de Paley (cf. [2]).

THÉORÈME (1.10). *Si nous prenons p tel que $1 < p < \infty$, il existe un nombre $K_p > 0$ ne dépendant que de p tel que pour toute $f \in L^p(0,1)$ dont la série de Fourier-Walsh est écrite sous la forme (1.9) et pour toute suite (η_k) $(k = -1, 0, 1, 2, \ldots)$ où η_k ne prend que les valeurs $1, 0, -1$ $(k = -1, 0, 1, 2, \ldots)$ la série*

$$(1.11) \qquad \sum_{k=-1}^{\infty} \eta_k \Delta_k(t) \qquad \big(\Delta_k(t) = \Delta_k(f,t)\big)$$

est la série de Fourier-Walsh d'une fonction $g \in L^p(0,1)$ vérifiant

$$(1.12) \qquad \|g\|_p \leqslant K_p \|f\|_p.$$

Il nous sera commode de modifier la conception usuelle de $(0,1)$ en remplaçant $(0,1)$ par l'ensemble $(0,1)^*$ des suites $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ où ξ_n ne prend que les valeurs 0 et 1, et nous mettons sur $(0,1)^*$ la structure usuelle de groupe abélien compact totalement discontinu, structure produit dénombrable de groupes discrets à deux éléments 0 et 1.

Les fonctions de Walsh deviennent les caractères de $(0,1)^*$ et $\omega_{j,\nu}$ est l'ensemble des points $t = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ pour lesquels les ν premières coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ ont certaines valeurs fixées $\xi_1^0, \ldots, \xi_\nu^0$.

Nous transporterons la structure de $(0,1)^*$ à $\omega_{j,\nu}$ au moyen de la fonction $\varphi_{\omega_{j,\nu}}: \omega_{j,\nu} \to (0,1)^*$ définie par

$$\varphi_{\omega_{j,\nu}}[(\xi_1^0, \ldots, \xi_\nu^0, \xi_{\nu+1}, \ldots)] = (\xi_{\nu+1}, \xi_{\nu+2}, \ldots),$$

la $n^{\text{ème}}$ fonction de Walsh sur $\omega_{j,\nu}$ étant ainsi

$$w_n(\omega_{j,\nu}, t) = w_n[\varphi_{\omega_{j,\nu}}(t)] \qquad (t \in \omega_{j,\nu})$$

et nous définissons de façon analogue $\delta_n(\omega_{j,\nu}, t)$, $\delta_n^*(\omega_{j,\nu}, t)$. Nous avons visiblement

$$(1.13) \qquad w_n(t) = \theta w_{n[\omega_{j,\nu}]}(\omega_{j,\nu}, t) \qquad (t \in \omega_{j,\nu}),$$

où $\theta = \pm 1$ est indépendant de $t \in \omega_{j,\nu}$ et où $n[\omega_{j,\nu}]$ = quotient de la division de n par 2^ν.

Si $f \in L^1(0,1)^*$ et si nous voulons étudier l'ordre de grandeur de ses sommes de Fourier-Walsh

$$(1.14) \qquad s_n\big((0,1)^*, x, f\big) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(f) w_j(x) = \int_0^1 f(t) w_n(x-t) \delta_n(x-t)\,dt$$

il nous suffira d'étudier les sommes modifiées

$$(1.15) \qquad s_n^*\big((0,1)^*, x, f\big) = \int_0^1 f(t) w_n(t) \delta_n(x-t)\,dt$$

puisque

$$(1.16) \qquad \big|s_n^*\big((0,1)^*, x, f\big)\big| = \big|s_n\big((0,1)^*, x, f\big)\big|.$$

Etant donnée une partition $\Omega = (\omega_l)$ de $(0,1)^*$ où $\omega_l = \omega_{j_l,\nu_l}$, et si $x \in (0,1)^*$, $\omega_l(x)$ désignera l'élément ω_l de la partition qui contient x. La formule (1.15) s'écrit

(1.17) $\quad s_n^*\big((0,1)^*, x, f\big)$

$$= \theta \frac{1}{|\omega_l(x)|} \int\limits_{\omega_l(x)} f(t)\, w_{n[\omega_l(x)]}\big(\omega_l(x), t\big)\, \delta_{n[\omega_l(x)]}\big(\omega_l(x), x-t\big)\, dt + R_n(x) + H_n(x)$$

$$(\theta = \pm 1)$$

avec (en posant $\delta_0 = 0$, $s_0 = s_0^* = 0$)

$$(1.18)\qquad \begin{cases} R_n(x) = R_n\big((0,1)^*, \Omega, x\big) = \int\limits_0^1 E_n(t)\, \delta_{n-n[\omega_l(x)]2^{\nu_l}}(x-t)\, dt, \\ H_n(x) = H_n\big((0,1)^*, \Omega, x\big) = \\ \qquad = \int\limits_0^1 [f(t) w_n(t) - E_n(t)]\, \delta_{n-n[\omega_l(x)]2^{\nu_l}}(x-t)\, dt, \\ E_n(t) = E_n\big((0,1)^*, \Omega, t\big) = \dfrac{1}{|\omega_l(t)|} \int\limits_{\omega_l(t)} f(u) w_n(u)\, du, \end{cases}$$

$x-t$ étant pris au sens de $\omega_l(x)$ dans l'intégrale (1.17).

En se reportant à la décomposition (1.1) de n, à (1.4) et (1.5), nous voyons que $R_n(x)$ n'est autre qu'une somme au point x (mais dont le rang dépend de x) de

$$(1.19)\qquad \sum_{j=0}^{N_n} \zeta_j \Delta_j(E_n, t).$$

Nous utiliserons le lemme élémentaire suivant:

LEMME (1.20). *Si pour $f \in L^1(0,1)^*$ nous posons*

$$(1.21)\qquad (Tf)(t) = \sup_n \Big| \sum_{j=-1}^{n} \Delta_j(f, t) \Big|,$$

alors l'application quasi linéaire $f \to T(f)$ est de type fort (p, p) pour chaque p vérifiant $1 < p < \infty$.

Démonstration. 1° T est de type faible $(1,1)$ car sinon, un raisonnement classique (cf. [3], t. II, (1.22), p. 165-166) montrerait l'existence d'une $f \in L^1(0,1)^*$ telle que (1.9) (sommée sur les Δ_j) serait presque partout divergente ce qui est impossible.

2° T est de type (∞, ∞) (évident).

Dans ces conditions, le théorème d'interpolation linéaire de Marcinkiewicz donne le lemme (cf. [3], t. II, p. 112).

Utilisant $\|E_n\|_p \leqslant \sup_t |E_n(t)|$, le lemme précédent et le théorème (1.10) nous voyons que

$$\|R_n\|_p \leqslant K_p' [\sup_t |E_n(t)|]$$

($K_p' > 0$ ne dépendant que de p, $1 < p < \infty$) et de là

$$(1.22)\qquad |\{x \in (0,1)^* \colon |R_n(x)| > \lambda > 0\}| \leqslant K_p'^p \frac{[\sup_t |E_n(t)|]^p}{\lambda^p}.$$

Etant donné un entier $n \geqslant 0$ et $\omega = \omega_{j,\nu}$ nous poserons

$$(1.23)\qquad A_n(\omega) = A_n(\omega, f) = \sum_{l=-n}^{\infty} |a_{l+n}(\omega, f)| \frac{1}{1+l^2},$$

où

$$a_l(\omega, f) = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{\omega} f(t) w_l(\omega, t)\, dt$$

et $A(c)$ désignera $A_n(\omega)$ si nous écrivons $c = (n, \omega)$.

Etant donné un couple $c = (n[\omega], \omega)$ (n entier $\geqslant 0$, $\omega = \omega_{j,\nu}$), nous poserons

$$(1.24)\qquad A^*(c) = \sup_{\omega_{j',\nu+2} \subset \omega_{j,\nu}} A_{n[\omega_{j',\nu+2}]}(\omega_{j',\nu+2}).$$

Quand $\omega' \subset \omega$, $n[\omega']$ est déterminé par la connaissance de $n[\omega]$, ainsi $A^*(c)$ est déterminé sans ambiguité dans (1.24).

Dans toute la suite, l'expression Cte signifiera une constante absolue > 0 qui n'est pas nécessairement toujours la même.

§ 2. Les polynomes $P_k(x, \omega)$. Nous désignons par b_k les nombres 2^{-2^k} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ et soit $f \in L^2(0,1)^*$ telle que

$$(2.1)\qquad \varepsilon^2 = \int\limits_{(0,1)^*} f^2(x)\, dx \leqslant 1 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Pour un $\omega = \omega_{j_\nu,\nu}$ donné nous formons la suite

$$(2.2)\qquad \omega_{j_\nu,\nu} \subset \omega_{j_{\nu-1},\nu-1} \subset \ldots \subset \omega_{j_1,1} \subset \omega_{0,0} = (0,1)^*.$$

Désignons par $a_{\mu,0,0}$ les coefficients de Fourier-Walsh de f sur $\omega_{0,0} = (0,1)^*$ dont la valeur absolue est $\geqslant b_k$ et définissons:

$$P_k(x, \omega_{0,0}) = \sum_{\mu} a_{\mu,0,0} w_\mu(x).$$

Désignons par $a_{\mu,j_1,1}$ les coefficients de Fourier-Walsh de $f(x) - P_k(x, \omega_{0,0})$ sur $\omega_{j_1,1}$ dont la valeur absolue est $\geqslant b_k$ et définissons

$$P_k(x, \omega_{j_1,1}) = P_k(x, \omega_{0,0}) + \sum_{\mu} a_{\mu,j_1,1} w_{2\mu}(x).$$

Un terme tel que $a_{\mu,j_1,1}w_{2\mu}(x)$, le coefficient $a_{\mu,j_1,1}$ ou l'indice 2μ seront dits *primitifs* pour $\omega_{j_1,1}$ pour rappeler que ce terme, ce coefficient ou cet indice ont été obtenus, dans la formation du polynôme $P_k(x,\omega)$, par la considération de $\omega_{j_1,1}$. Le procédé de construction apparait clairement et nous obtenons ainsi les polynomes $P_k(x,\omega)$ notés

$$P_k(x,\omega) = \sum_{(\omega)} a_\omega w_{\lambda_\omega}(x). \tag{2.3}$$

Pour un ω avec $|\omega| = 2^{-\nu}$, nous formons la suite (2.2) $\omega\subset\omega'\subset\omega''\subset\ldots$ $\ldots\subset\omega^{(\nu)} = (0,1)^*$ ($|\omega'| = 2^{-\nu+1}$, $|\omega''| = 2^{-\nu+2},\ldots$) et nous formons le polynôme

$$P_k(x,\omega) = \sum_0 (x,\omega^{(\nu)}) + \sum_1 (x,\omega^{(\nu-1)}) + \ldots + \sum_{\nu-1}(x,\omega') + \sum_\nu (x,\omega) \tag{2.4}$$

où $\sum\limits_0, \sum\limits_1, \ldots, \sum\limits_\nu$ sont les polynômes de Walsh obtenus successivement dans la construction de $P_k(x,\omega)$.

Remarque 2.5. Dans (2.4), même si $\sum\limits_j$ et $\sum\limits_{j'}$ $(j\neq j')$ ont des termes d'indice commun, aucune simplification n'est faite et $P_k(x,\omega)$ est écrit au moyen de $\sum\limits_0, \sum\limits_1, \ldots, \sum\limits_\nu$.

D'après la définition de $\sum\limits_\nu$, les fonctions $f-P_k$ et $\sum\limits_\nu$ sont orthogonales sur ω. Ainsi

$$\int_\omega \Big[f-\Big(\sum_0 +\ldots+ \sum_{\nu-1}\Big)\Big]^2 dx = \int_\omega \Big[(f-P_k)+\sum_\nu\Big]^2 dx = \int_\omega [f-P_k]^2 dx + \int_\omega \Big(\sum_\nu\Big)^2 dx$$

d'où, la sommation se faisant sur les ω tels que $|\omega| = 2^{-\nu}$,

$$\sum_\omega\int_\omega \Big[f-\Big(\sum_0 +\ldots+ \sum_{\nu-1}\Big)\Big]^2 dx = \sum_\omega\int_\omega [f-P_k]^2 dx + \sum_\omega\int_\omega \Big(\sum_\nu\Big)^2 dx$$

que nous pouvons écrire aussi avec les ω' tels que $|\omega'| = 2^{-\nu+1}$:

$$\sum_{\omega'}\int_{\omega'} \Big[f-\Big(\sum_0 +\ldots+ \sum_{\nu-1}\Big)\Big]^2 dx = \sum_\omega\int_\omega [f-P_k]^2 dx + \sum_\omega\int_\omega \Big(\sum_\nu\Big)^2 dx.$$

Mais les fonctions $f-\big(\sum\limits_0+\ldots+\sum\limits_{\nu-1}\big)$ et $\sum\limits_{\nu-1}$ sont orthogonales sur ω', d'où

$$\int_{\omega'} \Big[f-\Big(\sum_0 +\ldots+ \sum_{\nu-2}\Big)\Big]^2 dx = \int_{\omega'} \Big[f-\Big(\sum_0 +\ldots+ \sum_{\nu-1}\Big)\Big]^2 dx + \int_{\omega'} \Big(\sum_{\nu-1}\Big)^2 dx$$

et d'où

$$\sum_{\omega'}\int_{\omega'} \Big[f-\Big(\sum_0 +\ldots+ \sum_{\nu-2}\Big)\Big]^2 dx = \sum_\omega\int_\omega [f-P_k]^2 dx + \sum_\omega\int_\omega \Big(\sum_\nu\Big)^2 dx + \sum_{\omega'}\int_{\omega'} \Big(\sum_{\nu-1}\Big)^2 dx.$$

Nous écrivons maintenant

$$\sum_{\omega'}\int_{\omega'} \Big[f-\Big(\sum_0 +\ldots+ \sum_{\nu-2}\Big)\Big]^2 dx = \sum_{\omega''}\int_{\omega''} \Big[f-\Big(\sum_0 +\ldots+ \sum_{\nu-2}\Big)\Big]^2 dx$$

et nous poursuivrons pour arriver finalement à

$$\int_0^1 f^2 dx = \sum_\omega\int_\omega [f-P_k]^2 dx + \\ + \sum_\omega\int_\omega \Big(\sum_\nu\Big)^2 dx + \sum_{\omega'}\int_{\omega'} \Big(\sum_{\nu-1}\Big)^2 dx + \ldots + \sum_{\omega^{(\nu)}}\int_{\omega^{(\nu)}} \Big(\sum_0\Big)^2 dx$$

de sorte qu'en posant

$$B_k^{(\nu)}(x) = \sum_{a_\omega \,\Big|\, \substack{x\in\omega \\ |\omega|\geqslant 2^{-\nu} \\ a_\omega \text{ primitif pour } \omega}} (a_\omega)^2$$

nous obtenons

$$\int_0^1 B_k^{(\nu)}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,dx = \varepsilon^2 \leqslant 1$$

et en appliquant le théorème de Beppo Levi à la suite $B_k^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ qui est croissante vers

$$B_k(x) = \sum_{a_\omega \,\Big|\, \substack{x\in\omega \\ a_\omega \text{ primitif pour } \omega}} (a_\omega)^2 \tag{2.6}$$

nous avons

$$\int_0^1 B_k(x)\,dx \leqslant \varepsilon^2 \leqslant 1 \tag{2.7}$$

de sorte qu'en posant

$$X_k = \{x\in(0,1)^* \mid B_k(x) > b_k^{-1}\} \tag{2.8}$$

nous avons

$$|X_k| \leqslant b_k. \tag{2.9}$$

Pour des raisons techniques nous allons augmenter l'ensemble des $\omega_{j,\nu}$ de la façon suivante. Nous posons

$$\omega_{0,-2} = (-2,2), \quad \omega_{-1,-1} = (-2,0), \quad \omega_{0,-1} = (0,2)$$

et pour $\nu\geqslant 0$ nous décomposons $\omega_{0,-2} = (-2,2)$ en $4\cdot 2^\nu$ intervalles égaux $\omega_{j,\nu}$ numérotés de la gauche vers la droite ($j = -2\cdot 2^\nu, -2\cdot 2^\nu+1, \ldots, 2\cdot 2^\nu-1$) de sorte que notre nouvelle notation coïncide avec l'ancienne pour ceux de nos intervalles qui sont inclus dans $(0,1)$.

Nous posons maintenant $n[\omega_{j,\nu}] = n$ pour tout entier $\geqslant 0$ si $\nu = -1$ ou -2. Dans toute la suite x sera restreint à $\omega_{0,0}$, f est prolongée par périodicité à $\omega_{0,-2}$ de même que les fonctions de Walsh et $w_n(\omega_{j,\nu}, t)$ sera par définition $w_n(t)$ sur $\omega_{j,\nu}$ si $\nu < 0$.

Pour $x \in \omega_{0,0} \subset \omega_{j,\nu}$ avec $\nu < 0$, la somme de Fourier-Walsh modifiée

$$s_n^*(\omega_{j,\nu}, x, f) = \frac{1}{|\omega_{j,\nu}|} \int_{\omega_{j,\nu}} f(t) w_n(t) \delta_n(x-t)\, dt$$

($\delta_n(x-t)$ étant prolongée par périodicité vis à vis de la variable t) n'est autre que $s_n^*\big((0,1)^*, x, f\big)$. A chaque $\omega = \omega_{j,\nu} \subset X_k$ nous associons l'intervalle $\omega_{j',\nu-2} \supset \omega_{j,\nu}$ ce qui est possible avec l'extension que nous venons de faire de l'ensemble des $\omega_{j,\nu}$. Désignant par X_k^* la réunion de tous ces intervalles associés, nous avons, avec (2.9)

(2.10) $$|X_k^*| \leqslant 4b_k.$$

Supposons que $\omega \subset \omega_{0,0}$, $\omega \not\subset X_k$, il existe alors $x \in \omega$ avec $x \notin X_k$, d'où $B_k(x) \leqslant b_k^{-1}$, d'où $\sum\limits_{(\omega)} (a_\omega)^2 \leqslant b_k^{-1}$, et de là, si ν_k est le nombre des termes de $P_k(x, \omega)$, nous avons, puisque $b_k \leqslant |a_\omega|$, l'inégalité $\nu_k b_k^2 \leqslant b_k^{-1}$, donc

(2.11) $$\omega \subset \omega_{0,0}, \quad \omega \not\subset X_k \Rightarrow \nu_k = \text{nombre de termes de } P_k(x, \omega) \leqslant b_k^{-3}.$$

Définissons l'ensemble S comme l'ensemble des points $x \in (0,1)^*$ appartenant à un intervalle $\omega \subset \omega_{0,0}$ tel que

(2.12) $$\int_\omega f^2(x)\, dx > \varepsilon |\omega|$$

et à chacun de ces intervalles $\omega = \omega_{j,\nu}$ associons l'intervalle $\omega_{j',\nu-2} \supset \omega_{j,\nu}$. Désignons par S^* la réunion de tous ces intervalles associés. D'après (2.12) nous avons

$$|S|\, \varepsilon \leqslant \int_0^1 f^2(x)\, dx = \varepsilon^2,$$

d'où $|S| \leqslant \varepsilon$ et par suite

(2.13) $$|S^*| \leqslant 4\varepsilon.$$

Si $\omega \subset \omega_{0,0}$ avec $\omega \not\subset X_k$, il existe $x \in \omega$ avec $x \notin X_k$ d'où, comme nous l'avons déjà vu

$$\sum_{(\omega)} (a_\omega)^2 \leqslant b_k^{-1}$$

de là

$$|P_k(x, \omega)| \leqslant \sum_{(\omega)} |a_\omega| \leqslant \Big[\nu_k \sum_{(\omega)} (a_\omega)^2\Big]^{1/2} \leqslant [(b_k^{-3})(b_k^{-1})]^{1/2} = b_k^{-2}.$$

Ainsi

(2.14) $$\omega \subset \omega_{0,0}, \quad \omega \not\subset X_k \Rightarrow |P_k(x, \omega)| \leqslant \sum_{(\omega)} |a_\omega| \leqslant b_k^{-2}.$$

M_k désignera l'ensemble des ω tels que $\omega \subset \omega_{0,0}$ avec $\omega \not\subset X_k \cup S$.

§ 3. Les couples permis. Nous commençons par considérer l'ensemble F_k des couples

$$c = (n, \omega), \qquad \omega \in M_k,\ n \text{ entier} \geqslant 0,$$

pour lesquels $P_k(x, \omega)$ contient un terme $a_\omega w_\lambda(x)$ primitif pour ω avec $\lambda[\omega] = n$.

Nous pouvons écrire

$$\sum_{(n,\omega) \in F_k} |\omega| = \sum_{(n,\omega) \in F_k} \frac{1}{(a_\omega)^2} \big((a_\omega)^2 |\omega|\big)$$

où $a_\omega w_\lambda(x)$ est primitif pour ω avec $\lambda[\omega] = n$. Puisque $|a_\omega| \geqslant b_k$, nous avons $1/(a_\omega)^2 \leqslant b_k^{-2}$ d'où

$$\sum_{(n,\omega) \in F_k} |\omega| \leqslant b_k^{-2} \sum_{(n,\omega) \in F_k} (a_\omega)^2 |\omega|.$$

Or

$$\sum_{\substack{(n,\omega) \in F_k \\ |\omega| \geqslant 2^{-\nu}}} (a_\omega)^2 |\omega| \leqslant \int_0^1 B_k^{(\nu)}(x)\, dx \leqslant 1$$

d'où

(3.1) $$\sum_{(n,\omega) \in F_k} |\omega| \leqslant b_k^{-2}.$$

Définissons maintenant un ensemble $\tilde{F}_k$ de couples (n, ω) plus vaste que F_k, dans les rubriques $(\tilde{F}_a)$ et $(\tilde{F}_b)$ suivantes.

$(\tilde{F}_a)$ Si nous avons un couple $c = (n, \omega) \in F_k$, nous lui associons les couples $\tilde{c} = (\tilde{n}, \tilde{\omega})$ tels que $\tilde{\omega} \in M_k$ et tels que nous puissions trouver un indice λ_ω de $P_k(x, \omega)$ de sorte que

(3.2) $$\tilde{\omega} \subset \omega, \quad |\tilde{\omega}| \geqslant b_k^{10} |\omega|, \quad |\tilde{n} - \lambda_\omega[\tilde{\omega}]| \leqslant b_k^{-10}.$$

Puisque $P_k(x, \omega)$ a au plus b_k^{-3} termes, nous voyons, avec (3.2), que le nombre de possibilités pour $\tilde{n}$ est $\leqslant (2b_k^{-10}+1)(b_k^{-3})\nu$ si ν est le nombre des longueurs possibles pour $\tilde{\omega}$. Nous avons

$$\frac{|\omega|}{2^{\nu-1}} \geqslant b_k^{10} |\omega| \Rightarrow 2^{\nu-1} \leqslant b_k^{-10} \Rightarrow 2^\nu \leqslant b_k^{-11} \Rightarrow \nu \leqslant \text{Cte} \log\left(\frac{1}{b_k}\right).$$

Donc: le nombre de possibilités pour $\tilde{n}$ est $\leqslant$ Cte $b_k^{-13} \log(1/b_k)$.

$(\tilde{F}_b)$ Si nous avons un couple $c = (n, \omega) \epsilon F_k$, nous lui associons les couples $\tilde{c} = (\tilde{n}, \tilde{\omega})$ tels que $\tilde{\omega} \epsilon M_k$ et tels que nous puissions trouver deux indices λ_ω, λ'_ω de $P_k(x, \omega)$ de sorte que

$$(3.3) \qquad \tilde{\omega} \subset \omega, \quad 4b_k^{10} \leqslant |\lambda_\omega - \lambda'_\omega|\,|\tilde{\omega}| \leqslant 4b_k^{-10}, \quad |\tilde{n} - \lambda_\omega[\tilde{\omega}]| < b_k^{-10},$$

et de là, pour chaque couple $(\lambda_\omega, \lambda'_\omega)$ fixé, le nombre des longueurs possibles des $\tilde{\omega}$ vérifiant (3.3) est $\leqslant$ Cte log $(1/b_k)$. Pour chacune de ces longueurs possibles $|\tilde{\omega}|$, le nombre des $\tilde{n}$ tels que $|\tilde{n} - \lambda_\omega[\tilde{\omega}]| < b_k^{-10}$ est $\leqslant 2b_k^{-10}$, ainsi

$$\sum_{\substack{(\tilde{n},\tilde{\omega}) \text{ associés dans } (\tilde{F}_b) \text{ à } c=(n,\omega)\epsilon F_k \\ |\tilde{\omega}| \text{ fixée, } (\lambda_\omega, \lambda'_\omega) \text{ fixé}}} |\tilde{\omega}| \leqslant |\omega|\,(\mathrm{Cte}\, b_k^{-10}),$$

d'où

$$\sum_{\substack{(\tilde{n},\tilde{\omega}) \text{ associés dans } (\tilde{F}_b) \text{ à } c=(n,\omega)\epsilon F_k \\ (\lambda_\omega, \lambda'_\omega) \text{ fixé}}} |\tilde{\omega}| \leqslant |\omega| \;(\mathrm{Cte}\, b_k^{-10}) \left(\mathrm{Cte} \log\left(\frac{1}{b_k}\right)\right) \leqslant \mathrm{Cte}\, b_k^{-11} |\omega|,$$

et par suite

$$\sum_{\substack{(\tilde{n},\tilde{\omega}) \text{ associés dans } (\tilde{F}_b) \\ \text{à } c=(n,\omega)\epsilon F_k.}} |\tilde{\omega}| \leqslant \mathrm{Cte}\, b_k^{-17} |\omega|,$$

Mais nous avons aussi

$$\sum_{\substack{(\tilde{n},\tilde{\omega}) \text{ associés dans } (\tilde{F}_a) \\ \text{à } c=(n,\omega)\epsilon F_k.}} |\tilde{\omega}| \leqslant \mathrm{Cte}\, b_k^{-17} |\omega|,$$

En effet, le nombre ν des possibilités de longueurs de $\tilde{\omega}$ vérifiant $\tilde{\omega} \subset \omega$ avec $|\tilde{\omega}| \geqslant b_k^{10} |\omega|$ vérifie

$$2^{-\nu+1} \geqslant b_k^{10} \Rightarrow \nu \leqslant \mathrm{Cte} \log\left(\frac{1}{b_k}\right)$$

et nous avons vu que le nombre de possibilités pour $\tilde{n}$ est $\leqslant \mathrm{Cte}\, b_k^{-13}$ $\log(1/b_k)$ de sorte que

$$\sum_{\substack{(\tilde{n},\tilde{\omega}) \text{ associés dans } \tilde{F}_a \\ \text{à } c=(n,\omega)\epsilon F_k}} |\tilde{\omega}| \leqslant \mathrm{Cte}\, b_k^{-13} \mathrm{Log}\left(\frac{1}{b_k}\right) \sum_{\substack{\tilde{\omega} \subset \omega \text{ tel qu'il} \\ \text{existe } \tilde{n} \text{ de façon} \\ \text{que } (\tilde{n}, \tilde{\omega}) \text{ soit} \\ \text{associé à } (n,\omega) \text{ au} \\ \text{sens de } \tilde{F}_a}} |\tilde{\omega}|$$

$$\leqslant \left(\mathrm{Cte}\, b_k^{-13} \log\left(\frac{1}{b_k}\right)\right)\left(\mathrm{Cte} \log\left(\frac{1}{b_k}\right)\right) |\omega| \leqslant \mathrm{Cte}\, b_k^{-17} |\omega|.$$

Si nous définissons alors $\tilde{F}_k$ comme la réunion des couples $(\tilde{n}, \tilde{\omega})$ obtenus dans $\tilde{F}_a$ et $\tilde{F}_b$ nous obtenons ainsi, avec (3.1)

$$(3.4) \qquad \sum_{(\tilde{n},\tilde{\omega})\epsilon \tilde{F}_k} |\tilde{\omega}| \leqslant \mathrm{Cte}\, b_k^{-19}.$$

Conséquence de la construction précédente. Supposons que le couple $c = (n, \omega)$ avec $\omega \epsilon M_k$ vérifie $c \notin \tilde{F}_k$ et supposons que $P_k(x, \omega)$ contient au moins un terme dont l'indice λ_ω vérifie $|n - \lambda_\omega[\omega]| < b_k^{-10}$, alors nous pouvons écrire, pour $x \epsilon \omega$, $P_k(x, \omega)$ sous la forme

$$(3.5) \qquad P_k(x, \omega) = \varrho_1 w_{\lambda_1}(x) + \varrho_2 w_{\lambda_2}(x) + Q_k(x, \omega)$$

avec les propriétés suivantes:

(3.6) $|\varrho_2| \leqslant |\varrho_1| \leqslant b_k^{-2}$, λ_1 et λ_2 déterminés en ce sens que les restrictions à ω des termes de $P_k(x, \omega)$ dont l'indice λ_ω vérifie $|\lambda_\omega[\omega] - n| < b_k^{-10}$ ne peuvent être que de deux formes au plus, $aw_{\lambda_1}(x)$, $a'w_{\lambda_2}(x)$ (si la deuxième forme n'apparait pas, nous prenons $\varrho_2 = 0$ et λ_2 tel que $|\lambda_2[\omega] - n| < b_k^{-10}$, $|\lambda_2[\omega] - \lambda_1[\omega]| = 1$) avec $|\lambda_1[\omega] - - n|$, $|\lambda_2[\omega] - n| < b_k^{-10}$ et $|\lambda_1[\omega] - \lambda_2[\omega]| = 1$.

(3.7) $Q_k(x, \omega)$ est la somme des termes de $P_k(x, \omega)$ dont l'indice λ_ω vérifie $|n - \lambda_\omega[\omega]| \geqslant b_k^{-10}$.

En effet, soient $aw_{\lambda_\omega}(x)$ et $a'w_{\lambda'_\omega}(x)$ deux termes de $P_k(x, \omega)$ qui ne sont pas dans $Q_k(x, \omega)$ et soit $\omega \subset \omega_1 \subset \omega_{0,0}$ avec $aw_{\lambda_\omega}(x)$ primitif pour ω_1, alors $(n_1, \omega_1) \epsilon F_k$ si $n_1 = \lambda_\omega[\omega_1]$ et puisque $(n, \omega) \notin \tilde{F}_k$, d'après $(\tilde{F}_b)$ nous avons $|\lambda_\omega - \lambda'_\omega|\,|\omega| < 4b_k^{10} < 1$ d'où $|\lambda_\omega[\omega] - \lambda'_\omega[\omega]| \leqslant 1$ puisque

$$|\lambda_\omega - \lambda'_\omega|\,|\omega| \leqslant |\lambda_\omega[\omega] - \lambda'_\omega[\omega]| + 2 \leqslant 2b_k^{-10} + 2 \leqslant 4b_k^{-10},$$

d'où (3.6), $|\varrho_1| \leqslant b_k^{-2}$ résultant de (2.14).

A chaque $\tilde{c} = (\tilde{n}, \tilde{\omega}) \epsilon \tilde{F}_k$ $(\tilde{\omega} = \omega_{j,\nu}, \nu \geqslant 2)$ nous associons les couples $(4\tilde{n} + m, \omega_{j',\nu-2})$ où $\omega_{j',\nu-2} \supset \omega_{j,\nu}$ et $m = 0, 1, 2, 3$; si $\nu = 1$ les couples $(2\tilde{n} + m, \omega_{j',\nu-2})$ où $\omega_{j',\nu-2} \supset \omega_{j,\nu}$ et $m = 0, 1$; enfin si $\nu = 0$ le couple $(\tilde{n}, \omega_{0,-2})$.

Désignant par F_k^* la réunion de tous ces couples associés, nous avons, d'après (3.4)

$$(3.8) \qquad \sum_{(n,\omega)\epsilon F_k^*} |\omega| \leqslant \mathrm{Cte}\, b_k^{-19}.$$

Remarque 3.9. *Soit $c = (n[\omega], \omega)$ donné* (*si $\omega \not\subset \omega_{0,0}$ nous supposons que ω est soit $\omega_{0,-1}$, soit $\omega_{0,-2}$*) *et supposons que $c \notin F_k^*$.*

Supposons que pour chaque $\omega' \subset \omega$, $4|\omega'| = |\omega|$ nous avons $\omega' \not\subset X_k \cup S$. Supposons enfin que pour un certain choix ω'_0 de ω' avec $\omega'_0 \subset \omega_{0,0}$ le polynôme P^0 $(P^0(x) = P_k(x, \omega'_0))$ correspondant contient un indice λ^0 tel que

$$|\lambda^0[\omega'_0] - n[\omega'_0]| < b_k^{-10}.$$

Dans ces conditions les quatre polynômes P correspondant aux différents choix de ω' contiennent l'indice λ^0.

Démonstration. Soit $a^0 w_{\lambda^0}(x)$ un terme de P^0 d'indice λ^0, ce terme étant primitif pour un $\omega_1 \supset \omega_0'$. Posant $n_1 = \lambda^0[\omega_1]$ nous avons $(n_1, \omega_1) \in F_k$. En conséquence $|\omega_1| \geqslant b_k^{-10}|\omega_0'|$ puisque $|\omega_1| < b_k^{-10}|\omega_0'|$, c'est-à-dire $|\omega_0'| > b_k^{-10}|\omega_1|$ joint à $|n[\omega_0'] - \lambda^0[\omega_0']| < b_k^{-10}$ donne (d'après $\tilde{F}_a$) $(n[\omega_0'], \omega_0') \in \tilde{F}_k$, donc $c \in F_k^*$ contrairement à l'hypothèse.

Si le polynôme P qui correspond à $\omega' \subset \omega$, $4|\omega'| = |\omega|$ ne contient pas $a^0 w_{\lambda^0}(x)$ comme terme primitif pour ω_1, c'est que ω_1 ne contient pas ω', ce qui est impossible à cause de $|\omega_1| \geqslant b_k^{-10}|\omega_0'|$.

§ 4. Les partitions $\Omega(c, l)$ et l'ensemble exceptionnel. Cet ensemble exceptionnel sera construit dans les rubriques (ex_1), (ex_2) et (ex_3) qui vont suivre. N sera un entier > 0 donné "très grand" et la fonction f est toujours supposée vérifier (2.1).

(ex_1) Considérons un couple $c_0 = (n[\omega_0], \omega_0)$ $(\omega_0 = \omega_{j_0, \nu_0}$, $-2 \leqslant \nu_0 \leqslant N-2$, mais si $\omega_0 \not\subset \omega_{0,0}$ nous supposons que ω_0 est soit $\omega_{0,-1}$, soit $\omega_{0,-2}$, n entier $\geqslant 0)$. Pour un entier $l \geqslant 1$ nous considérons la condition

$$\Omega(l)\colon c_0 \in F_{l+3}^*, \qquad A^*(c_0) < b_{l-1}$$

et si cette condition est satisfaite, alors nous construisons une partition $\Omega(c_0, l)$ de ω_0 au moyen des $\omega_{j,\nu}$ (si $\nu_0 < 0$ nous construisons en fait une partition de $\omega_{0,0}$ que nous prolongeons par périodicité). Cette partition a les propriétés suivantes:

(4.1) 1° $\omega = \omega_{j,\nu} \in \Omega(c_0, l) \Rightarrow \nu \geqslant \nu_0 + 2$ et $\omega \subset \omega'$, $|\omega'| \leqslant 2^{-\nu_0 - 2} \Rightarrow A_{n[\omega']}(\omega') < b_{l-1}$.

2° Si $\omega = \omega_{j,\nu} \in \Omega(c_0, l)$ et si $|\omega| > 2^{-N}$, alors il existe $\omega_{j',\nu+1} \subset \omega_{j,\nu}$ tel que $A_{n[\omega_{j',\nu+1}]}(\omega_{j',\nu+1}) \geqslant b_{l-1}$.

3° $\omega_{j,\nu} \in \Omega(c_0, l) \Rightarrow \nu \leqslant N$.

La construction d'une telle partition $\Omega(c_0, l)$ se fait par étapes.

1ère *étape*. Nous prenons les $\omega_{j,\nu_0+2} \subset \omega_0$ pour lesquels le 2° est vérifié. S'il n'en reste pas, la construction est terminée. S'il en reste nous procédons à la

2ème *étape*. Nous prenons les ω_{j,ν_0+3} inclus dans les intervalles restants de la 1ère étape pour lesquels le 2° est vérifié. S'il n'en reste pas, la construction est terminée. S'il en reste, nous procédons à la 3ème étape et ainsi de suite.

La construction est achevée au plus tard à la $N - \nu_0 - 1$ème étape. Si $x \in \omega_0$, nous considérons les $\omega = \omega_{j,\nu} \in \Omega(c_0, l)$ pour lesquels l'intervalle $\omega_{j',\nu-1} \supset \omega_{j,\nu}$ vérifie $x \in \omega_{j',\nu-1}$. Il est clair qu'il existe de tels $\omega_{j,\nu}$, par exemple l'intervalle $\omega_{j,\nu} \in \Omega(c_0, l)$ tel que $x \in \omega_{j,\nu}$, mais nous choisirons $\omega_{j,\nu}$ de façon que $|\omega_{j',\nu-1}|$ ait la plus grande valeur possible et nous poserons $\omega_0(x) = \omega_{j',\nu-1}$.

Notons les propriétés suivantes de $\omega_0(x)$:

(4.2) 1° $x \in \omega_0(x)$, $|\omega_0(x)| \leqslant \frac{1}{2}|\omega_0|$.

2° $\omega_0(x)$ qui est par construction de la forme $\omega_{j',\nu-1} = \omega_{j,\nu} \cup \omega_{j\pm1,\nu}$ avec $\omega_{j,\nu} \in \Omega(c_0, l)$ est réunion d'intervalles de $\Omega(c_0, l)$.

3° Si $\omega_0(x) \subset \omega' \subset \omega_0$, alors ω' est réunion d'intervalles de $\Omega(c_0, l)$ et si $\omega' \subset \omega'' \subset \omega_0$ où

$$\omega'' = \omega_{j'',\nu''} \cup \omega_{j''+1,\nu''}$$

alors pour tout $t \in \omega''$ avec $t \notin \omega'$, $\omega_0(t)$ se trouve inclus dans l'un ou l'autre des deux intervalles $\omega_{j'',\nu''}\, \omega_{j''+1,\nu''}$.

Le 1° est immédiat. Le 2° résulte du fait que s'il n'est pas vérifié, c'est que $\omega_{j\pm1,\nu}$ est strictement inclus dans un intervalle de $\Omega(c_0, l)$ lequel contient nécessairement $\omega_{j',\nu-1}$ et nous avons une contradiction avec le caractère maximal de $|\omega_0(x)|$. Le 3° se démontre par un même argument.

(ex_2) Considérons toujours $c_0 = (n[\omega_0], \omega_0)$ avec les conditions de (ex_1). Pour $x \in \omega_0$ nous prenons la somme de Fourier Walsh modifiée

$$s^*_{n[\omega_0]}(\omega_0, x, f) = \frac{1}{|\omega_0|} \int_{\omega_0} f(t)\, w_{n[\omega_0]}(\omega_0, t)\, \delta_{n[\omega_0]}(\omega_0, x-t)\, dt. \tag{4.3}$$

Soit ω' tel que $\omega_0(x) \subset \omega' \subset \omega_0$, ω' étant, comme nous savons, réunion d'intervalles de $\Omega(c_0, l)$. Posons $|\omega_0| = 2^{-\nu_0}$, $|\omega'| = 2^{-\nu'}$, $\nu^+ = \nu$ si $\nu \geqslant 0$, $\nu^+ = 0$ si $\nu < 0$. Nous avons, avec $\theta = \pm 1$

$$s^*_{n[\omega_0]}(\omega_0, x, f) = \frac{\theta}{|\omega'|} \int_{\omega'} f(t)\, w_{n[\omega']}(\omega', t)\, \delta_{n[\omega']}(\omega', x-t)\, dt + R_{n[\omega_0]}(x) + H_{n[\omega_0]}(x), \tag{4.4}$$

$$R_{n[\omega_0]}(x) = \frac{1}{|\omega_0|} \int_{\omega_0} E_{n[\omega_0]}(t)\, \delta_{n[\omega_0] - 2^{\nu'^+ - \nu_0^+} n[\omega']}(\omega_0, x-t)\, dt,$$

$$H_{n[\omega_0]}(x) = \frac{1}{|\omega_0|} \int_{\omega_0} [f(t)\, w_{n[\omega_0]}(\omega_0, t) - E_{n[\omega_0]}(t)]\, \delta_{n[\omega_0] - 2^{\nu^+ - \nu_0^+} n[\omega']}(\omega_0, x-t)\, dt, \tag{4.5}$$

$$E_{n[\omega_0]}(t) = \frac{1}{|\omega_0(t)|} \int_{\omega_0(t)} f(u)\, w_{n[\omega_0]}(\omega_0, u)\, du.$$

D'après (4.2) 3°, sur chaque $\omega_0(t)$, la fonction $\delta_{n[\omega_0] - 2^{\nu'^+ - \nu_0^+} n[\omega']}(\omega_0, x-u)$ est constante par rapport à u de sorte qu'avec

$$\int_{\omega_0(t)} [f(u)\, w_{n[\omega_0]}(\omega_0, u) - E_{n[\omega_0]}(u)]\, du = 0$$

nous avons dans tous les cas

(4.6) $$H_{n[\omega_0]}(x) = 0.$$

Par ailleurs, si $\omega_0(t) = \omega_{j',\nu'} \cup \omega_{j'+1,\nu'}$, en intégrant sur $\omega_{j',\nu'}$ et $\omega_{j'+1,\nu'}$ nous obtenons:

$$\begin{aligned}|E_{n[\omega_0]}(t)| &\leqslant 2|a_{n[\omega_{j',\nu'}]}(\omega_{j',\nu'}, f)| + 2|a_{n[\omega_{j'+1,\nu'}]}(\omega_{j'+1,\nu'}, f)|\\ &\leqslant 2A_{n[\omega_{j',\nu'}]}(\omega_{j',\nu'}) + 2A_{n[\omega_{j'+1,\nu'}]}(\omega_{j'+1,\nu'}),\end{aligned}$$

donc, d'après (4.1) 1°

(4.7) $$|E_{n[\omega_0]}(t)| \leqslant 4b_{l-1}.$$

Revenons aux notations du § 1 en écrivant:

$$n[\omega_0] = \zeta_0 + \zeta_1 2^1 + \ldots + \zeta_{N_{n[\omega_0]}} 2^{Nn[\omega_0]}$$
$$(\zeta_j = 0 \text{ ou } 1,\ j = 0, 1, \ldots, N_{n[\omega_0]} \zeta_{N_{n[\omega_0]}} = 1)$$

nous voyons que $R_{n[\omega_0]}(x)$ est une somme, au point x, de

$$G(t) = \sum_{k=0}^{N_{n[\omega_0]}} \zeta_k \Delta_k(\omega_0, E_{n[\omega_0]}, t),$$

K_p désignant un nombre > 0 ne dépendant que de p $(1 < p < \infty)$ mais qui n'est pas nécessairement toujours le même, d'après le théorème (1.10) et le lemme (1.20), $T(G)$ (T ayant, pour ω_0, la signification qu'il avait pour $(0,1)^*$ au § 1) satisfait

$$\|T(G)\|_p \leqslant K_p(4b_{l-1}) \quad (\text{au sens de } \omega_0)$$

d'où l'inégalité

(4.8) $$\big|\{x \in \omega_0 | T(G)(x) > y > 0\}\big| \leqslant K_p \frac{b_{l-1}^p}{y^p} |\omega_0|;$$

nous poserons

(4.9) $$V(c_0) = \{x \in \omega_0 | T(G)(x) > b_{l-1}^{1/2}\}$$

de sorte qu'avec (4.8) nous avons

(4.10) $$|V(c_0)| \leqslant K_p (b_{l-1})^{p/2} |\omega_0|.$$

Nous retiendrons que nous avons

(4.11) $$x \in \omega_0, \quad x \notin V(c_0) \Rightarrow |R_{n[\omega_0]}(x)| \leqslant T(G)(x) \leqslant b_{l-1}^{1/2}$$

et remarquons que l'introduction de l'estimation (4.8) à la place d'une estimation de type (1.22) provient du fait que $R_{n[\omega_0]}(x)$ dépend de ω' alors que $V(c_0)$ ne dépend que de c_0, $\Omega(c_0, l)$ et f.

(ex$_3$) Dans (ex$_1$) les couples $(n[\omega], \omega)$ étaient ceux vérifiant les conditions (C) et $\Omega(l)$ si (C) est défini par

(C) $$\omega \not\subset \omega_{0,0} \Rightarrow \omega = \omega_{0,-1} \quad \text{où} \quad \omega = \omega_{0,-2} \text{ et } |\omega| \geqslant 2^{-N+2}.$$

Considérons la condition plus faible:

($\tilde{C}$) $$\omega \not\subset \omega_{0,0} \Rightarrow \omega = \omega_{0,-1} \quad \text{où} \quad \omega = \omega_{0,-2}.$$

Si $c = (n[\omega], \omega)$ vérifie ($\tilde{C}$) et si $\omega \not\subset S^*$, pour chaque $\omega' \subset \omega$, $4|\omega'| = |\omega|$, nous avons

$$\frac{1}{|\omega'|} \int_{\omega'} f^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon$$

et en choisissant convenablement ω'

$$A^*(c) \leqslant \text{Cte} \frac{1}{|\omega'|} \int_{\omega'} |f|\,dx \leqslant \text{Cte} \left[\frac{1}{|\omega'|} \int_{\omega'} f^2(x)\,dx\right]^{1/2} \leqslant \text{Cte} \sqrt{\varepsilon},$$

d'où la possibilité de définir une fonction $L = L(\varepsilon)$ (L entier $\geqslant 1$) croissante avec $1/\varepsilon$, tendant vers l'infini avec $1/\varepsilon$ et telle que $c = (n[\omega], \omega)$ vérifiant ($\tilde{C}$), $\omega \not\subset S^* \Rightarrow A^*(c) < b_L$ du moins si nous ne considérons que des ε inférieurs à un nombre > 0 fixe assez petit ce que nous ferons. Posons

(4.12) $$V = \bigcup_{l=L}^{\infty} \Big[\bigcup_{\substack{c \text{ vérifiant} \\ (C) \text{ et } \Omega(l)}} V(c) \Big],$$

(C) et $\Omega(l)$ définissant un sous-ensemble de F_{l+3}^*, nous avons, avec (3.8) et (4.10)

(4.13) $$|V| \leqslant K_p \sum_{l=L}^{\infty} b_{l-1}^{p/2} (b_{l+3})^{-19}.$$

Utilisant $b_{l+1} = (b_l)^2$, nous voyons que la série du second membre de (4.13) converge si nous fixons p tel que $p/2 > (16)(19)+1$ ce que nous ferons.

Dans ces conditions nous définissons l'ensemble exceptionnel E par

(4.14) $$E = S^* \cup X^* \cup V \quad \text{où} \quad X^* = \bigcup_{k=L}^{\infty} X_k^*.$$

Bien que E depende de N par l'intermédiaire de V, d'après (2.10), (2.13) et (4.13) où p a été fixé comme dit, nous pouvons trouver une fonction $\gamma(\varepsilon)$ *indépendante* de N telle que

(4.15) $$|E| \leqslant \gamma(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \gamma(\varepsilon) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

§ 5. Trois propositions fondamentales.

Proposition 1. *Soit un intervalle* $\omega = \omega_{j,\nu}(\nu \geqslant 0)$ *et* $g \in L^2(\omega)$. *Supposons que nous ayons un entier* $n \geqslant 0$ *et trois nombres*

$$G, \mu, M \quad (G \geqslant 0, \mu \geqslant 0, M > 1)$$

tels que

$$\int_\omega g^2(t)\,dt \leqslant G^2|\omega|$$

avec $|m-n| < M \Rightarrow |a_m(\omega, g)| \leqslant \mu$; *alors nous avons*

$$A_n(\omega, g) \leqslant \mathrm{Cte}\left[\mu + \frac{G}{M}\right].$$

Démonstration.

$$A_n(\omega, g) = \sum_{l=-n}^{\infty} |a_{n+l}| \frac{1}{1+l^2} = \sum_{|l|<M} + \sum_{|l|\geqslant M}.$$

D'après l'hypothèse

$$\sum_{|l|<M} \leqslant \mathrm{Cte}\,\mu \quad \left(\mathrm{Cte} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+l^2}\right)$$

et

$$\sum_{|l|\geqslant M} \leqslant \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right]^{1/2} \left[\sum_{|l|\geqslant M} \frac{1}{(1+l^2)^2}\right]^{1/2} \leqslant G\left[\sum_{|l|\geqslant M} \frac{1}{(1+l^2)^2}\right]^{1/2} \leqslant \mathrm{Cte}\,\frac{G}{M},$$

d'où la proposition.

Avant propos aux propositions 2 *et* 3. Les propositions 2 et 3 qui vont suivre sont tout à fait décisives pour notre but et ne sont valables que si ε est pris suffisamment petit, ce que nous supposerons.

Proposition 2. Hypothèses. *Soit* $x \in \omega_{0,0}$ *et soit un couple*

$$c_0 = (n_0[\omega_0], \omega_0) \quad (n \text{ entier } \geqslant 0, \ \omega_0 = \omega_{j_0,\nu_0})$$

Supposons $x \in \omega_0 \not\subset E$ *ce qui se produit en particulier si* $x \in \omega_0, x \notin E$. *Nous considérons l'entier* l *défini par*

$$b_{l-1} > A^*(c_0) \geqslant b_l \tag{5.1}$$

$(\Rightarrow l \geqslant L(\varepsilon)$ *d'après le* § 4, (ex$_3$)). *Supposons que* $c_0 \notin F^*_{l+3}$.

Conclusions. *Nous pouvons trouver un intervalle* $\omega_1 \supset \omega_0$ $(\omega_1 = \omega_{j_1\nu_1})$ *et un entier* $n_1 \geqslant 0$ *tels que*

$$c_1 = (n_1[\omega_1], \omega_1) \in F^*_{l+3} \tag{5.2}$$

et tel que

$$|n_1[\omega_0] - n_0[\omega_0]| \leqslant b_l^{-1} \tag{5.3}$$

en outre si nous posons $c_{0,1} = (n_1[\omega_0], \omega_0)$, *et* $c_{0,2} = (n_2[\omega_0], \omega_0)$, *nous avons*

$$\big||s^*_{n_1[\omega_0]}(\omega_0, x, f)| - |s^*_{n_2[\omega_0]}(\omega_0, x, f)|\big| \leqslant \mathrm{Cte}[A^*(c_{0,1}) + A^*(c_{0,2}) + b_l] \tag{5.4}$$

pour tout entier $n_2 \geqslant 0$ *tel que*

$$|n_1[\omega_0] - n_2[\omega_0]| < b_l^{-3/2} \tag{5.5}$$

donc en particulier pour $n_2 = n_0$. *Plus simplement, si* $n_1[\omega_0] < b_l^{-3/2}$, *nous avons*

$$|s^*_{n_1[\omega_0]}(\omega_0, x, f)| \leqslant \mathrm{Cte}[A^*(c_{0,1}) + b_l]. \tag{5.4'}$$

Démonstration. Soit $\omega_0' \subset \omega_0$, $4|\omega_0'| = |\omega_0|$ tel que $A^*(c_0) = A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0')$ et si $|\omega_0| > 1$, nous pouvons prendre $\omega_0' \subset \omega_{0,0}$.

Soit ω' quelconque avec $\omega' \subset \omega_0$, $4|\omega'| = |\omega_0|$ et désignons par P_0 et P les polynômes $P_{l+3}(x, \omega_0')$ et $P_{l+3}(x, \omega')$. D'après la définition de P nous avons

$$|a_n(\omega', f-P)| < b_{l+3} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0.$$

donc

$$A_n(\omega', f-P) \leqslant \mathrm{Cte}\, b_{l+3} \leqslant b_{l+2} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0 \tag{5.6}$$

dès que ε est assez petit puisque $l \geqslant L(\varepsilon)$.

En particulier pour $\omega' = \omega_0'$ et $n = n_0[\omega_0']$, (5.6) donne avec

$$A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', P_0) \geqslant A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', f) - A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', f-P_0)$$

l'inégalité

$$A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', P_0) \geqslant b_l - b_{l+2}. \tag{5.7}$$

Montrons dès maintenant que le polynôme P_0 contient des termes dont les indices λ' vérifient $|\lambda'[\omega_0'] - n_0[\omega_0']| < b_{l+3}^{-10}$, ce qui, avec $(n_0[\omega_0'], \omega_0') \notin \tilde{F}_{l+3}$ nous permettra de former la décomposition (3.5) de P_0, que nous écrivons

$$P_0(x) = \varrho_1(\omega_0') w_{\lambda_1}(x) + \varrho_2(\omega_0') w_{\lambda_2}(x) + Q_0(x) \quad (x \in \omega_0').$$

Or supposons que pour tout indice λ' de P_0 nous avons $|\lambda'[\omega_0'] - n_0[\omega_0']| \geqslant b_{l+3}^{-10}$; cela signifie en particulier que le développement de Fourier-Walsh de P_0 sur ω_0' vérifie $|m - n_0[\omega_0']| < b_{l+3}^{-10} \Rightarrow a_m(\omega_0', P_0) = 0$. Nous pouvons ainsi appliquer la proposition 1 à P_0 sur ω_0' avec $n = n_0[\omega_0']$, $M = b_{l+3}^{-10}$, $\mu = 0$ et $G = b_{l+3}^{-2}$ puisque $|P_0(x)| \leqslant b_{l+3}^{-2}$ d'après (2.14), d'où

$$A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', P_0) \leqslant \mathrm{Cte}\, b_{l+3}^{8}$$

et par suite

$$\begin{aligned} A^*(c_0) = A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', f) &\leqslant A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', f-P_0) + A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', P_0) \\ &\leqslant b_{l+2} + \mathrm{Cte}\, b_{l+3}^{8} < b_l \end{aligned}$$

si ε est assez petit, ce qui contredit (5.1). Celà étant, de (5.7) et de (3.5) nous tirons

$$b_l - b_{l+2} \leqslant A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', P_0)$$
$$\leqslant |\varrho_1(\omega_0')| A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', w_{\lambda_1}) + |\varrho_2(\omega_0')| A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', w_{\lambda_2}) + A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', Q_0).$$

Pour le dernier terme le calcul que nous venons de faire s'applique d'après (3.7) et donne

$$A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', w_{\lambda_1}) \leqslant \mathrm{Cte}\, b_{l+3}^8$$

et puisque

$$A_{n_0[\omega_0']}(\omega_0', w_{\lambda_1}) = [1 + (\lambda_1[\omega_0'] - n_0[\omega_0'])^2]^{-1}$$

avec une égalité analogue pour w_{λ_2}, de $|\varrho_1(\omega_0')| \geqslant |\varrho_2(\omega_0')|$ et $|\lambda_1[\omega_0'] - \lambda_2[\omega_0']| = 1$ nous tirons

$$b_l - b_{l+2} - \mathrm{Cte}\, b_{l+3}^8 \leqslant \mathrm{Cte}\, |\varrho_1(\omega_0')| [1 + (\lambda_1[\omega_0'] - n_0[\omega_0'])^2]^{-1},$$

soit

$$\frac{|\varrho_1(\omega_0')|}{1 + (\lambda_1[\omega_0'] - n_0[\omega_0'])^2} \geqslant \mathrm{Cte}\, b_l \tag{5.8}$$

dès que ε est assez petit. Nous prendrons $n_1 = \lambda_1$ et puisque c'est un indice de P_0, soit $\omega_1' \supset \omega_0'$ tel que P_0 contienne un terme primitif pour ω_1' d'indice n_1, alors $(n_1[\omega_1'], \omega_1') \in F_{l+3}$ et si $\omega_1 \supset \omega_1'$ avec $|\omega_1| = 4|\omega_1'|$, alors $(n_1[\omega_1], \omega_1) \in F_{l+3}^*$ ce qui est précisément (5.2). Pour chaque $\omega' \subset \omega_0$, $4|\omega'| = |\omega_0|$, nous formons la décomposition (3.5) du polynôme P que nous écrivons, pour $t \in \omega'$

$$P(t) = \varrho_1(\omega') w_{\lambda_1(\omega')}(t) + \varrho_2(\omega') w_{\lambda_2(\omega')}(t) + Q(t) = \varphi(\omega', t) + Q(t)$$

et d'après la remarque (3.9), nous pouvons faire en sorte que pour deux ω' différents, les deux couples correspondantes $(\lambda_1(\omega'), \lambda_2(\omega'))$ soient ou bien les mêmes, ou sinon, permutés l'un de l'autre. Nous avons

$$A^*(c_{0,1}) \geqslant A_{n_1[\omega']}(\omega', f) = A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', f) \geqslant A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', P) - A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', P - f),$$

mais d'après (5.6) nous avons

$$A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', P - f) \leqslant b_{l+2} = b_l^4$$

et par ailleurs, nous reportant à (3.5), en tenant compte de $\lambda_1(\omega')[\omega'] \neq \lambda_2(\omega')[\omega']$ nous avons

$$A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', P) \geqslant A_{\lambda_1[\omega']}\big(\omega', \varrho_1(\omega') w_{\lambda_1(\omega')} + \varrho_2(\omega') w_{\lambda_2(\omega')}\big) - A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', Q)$$
$$\geqslant A_{\lambda_1[\omega']}\big(\omega', \varrho_1(\omega') w_{\lambda_1(\omega')}\big) - A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', Q) \geqslant \tfrac{1}{2}|\varrho_1(\omega')| - A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', Q)$$

puisque

$$A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', w_{\lambda_1[\omega']}) = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1 + (\lambda_1[\omega'] - \lambda_2[\omega'])^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Pour tout indice λ' de Q nous avons

$$|\lambda'[\omega'] - \lambda_1[\omega']| \geqslant |\lambda'[\omega'] - n_0[\omega']| - |n_0[\omega'] - \lambda_1[\omega']| \geqslant b_{l+3}^{-10} - b_l^{-9} \geqslant b_{l+3}^{-9}$$

de sorte que la proposition 1 s'applique à Q sur ω' avec $n = \lambda_1[\omega']$, $\mu = 0$, $M = b_{l+3}^{-9}$, $G = b_{l+3}^{-2}$ et donne

$$A_{\lambda_1[\omega']}(\omega', Q) \leqslant \mathrm{Cte}\left[\frac{b_{l+3}^{-2}}{b_{l+3}^{-9}}\right] = \mathrm{Cte}\, b_{l+3}^7 = \mathrm{Cte}\, b_l^{56}.$$

Regroupant ces résultats nous avons

$$A^*(c_{0,1}) \geqslant \tfrac{1}{2}|\varrho_1(\omega')| - \mathrm{Cte}\, b_l^{56} - b_l^4$$

soit encore

$$|\varrho_1(\omega')| \leqslant \mathrm{Cte}[A^*(c_{0,1}) + b_l]. \tag{5.9}$$

Utilisant $A^*(c_{0,1}) \leqslant \mathrm{Cte}\sqrt{\varepsilon}$ qui provient de

$$|a_n(\omega', f)| \leqslant \left[\frac{1}{|\omega'|}\int_{\omega'} f^2\, dx\right]^{1/2} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

nous obtenons avec (5.8) et (5.9)

$$|\lambda_1[\omega_0] - n_0[\omega_0]| \leqslant 4|\lambda_1[\omega_0'] - n_0[\omega_0']| + 4 \leqslant 4[\mathrm{Cte}\, b_l^{-1}(\sqrt{\varepsilon} + b_l)] + 4 \leqslant b_l^{-1}$$

si ε est assez petit, et ceci est précisément (5.3).

Il nous reste à montrer que sous la condition (5.5) nous avons (5.4) (et (5.4') si $n_1[\omega_0] < b_l^{-3/2}$).

Si maintenant ω' désigne l'intervalle $\omega = \omega_{j,\nu}$ tel que $x \in \omega'$, $4|\omega'| = |\omega_0|$, les formules analogues à (1.17) et (1.18) appliquées à ω_0 au lieu de $(0,1)^*$ pour la partition de ω_0 selon les quatre $\omega'' \subset \omega_0$, $4|\omega''| = \omega_0$ donnent avec

$$H_{n_1[\omega_0]}(x) = 0$$

et

$$|R_{n_1[\omega_0]}(x)| \leqslant 4\sup_t |E_{n_1[\omega_0]}(t)| \leqslant \mathrm{Cte}\sup_{\omega''} |a_{n_1[\omega'']}(\omega'')| \leqslant \mathrm{Cte}\, A^*(c_{0,1})$$

l'inégalité

$$\big||s_{n_1[\omega_0]}^*(\omega_0, x, f)| - |s_{n_1[\omega']}^*(\omega', x, f)|\big| \leqslant \mathrm{Cte}\, A^*(c_{0,1})$$

et une inégalité analogue avec n_2 au lieu de n_1 et $c_{0,2}$ au lieu de $c_{0,1}$. Nous sommes donc ramenés à étudier

$$\begin{aligned}||s^*_{n_1[\omega']}(\omega', x, f)| - |s^*_{n_2[\omega']}(\omega', x, f)|| &\leqslant |s_{n_1[\omega']}(\omega', x, f) - s_{n_2[\omega']}(\omega', x, f)| \\ &\leqslant |s_{n_1[\omega']}(\omega', x, f-P) - s_{n_2[\omega']}(\omega', x, f-P)| + |s_{n_1[\omega']}(\omega', x, P) - \\ &\quad - s_{n_2[\omega']}(\omega', x, P)| = d_1 + d_2.\end{aligned}$$

Puisque $P(t) = P_{l+3}(t, \omega')$, les coefficients de Fourier-Walsh de $f-P$ sur ω' sont de valeur absolue $< b_{l+3}$, donc

$$\begin{aligned}d_1 &\leqslant |n_1[\omega'] - n_2[\omega'] b_{l+3} \\ &\leqslant (|n_1[\omega_0] - n_2[\omega_0]| + 2) b_{l+3} < (b_l^{-3/2} + 2) b_{l+3} < b_l\end{aligned}$$

si ε est assez petit. Puisque dans la décomposition $P(t) = \varphi(\omega', t) + Q(t)$, $t \in \omega'$, les indices λ' de Q vérifient

$$|\lambda'[\omega'] - n_0[\omega']| \geqslant b_{l+3}^{-10},$$

que

$$|n_1[\omega'] - n_0[\omega']| \leqslant |n_1[\omega_0] - n_0[\omega_0]| + 2 < b_{l+3}^{-10}$$

et qu'en passant par l'intermédiaire de $n_1[\omega']$ nous avons une inégalité analogue pour $|n_2[\omega'] - n_0[\omega_0']|$ nous voyons que

$$d_2 = |s_{n_1[\omega']}(\omega', x, \varphi) - s_{n_2[\omega']}(\omega', x, \varphi)| \leqslant 2|\varrho_1(\omega')|.$$

Regroupant ces résultats nous trouvons (5.4) sous la condition (5.5) (et (5.4') si $n_1[\omega_0] < b_l^{-3/2}$) et la proposition 2 est établie.

Proposition 3. Hypothèses. *Les mêmes que celles de la proposition 2 avec en plus*

$$|\omega_0| > 2^{-N+2}.$$

Conclusions. *Il existe* $\bar{\omega} \supset \omega_0$, $\bar{n}$ *entier* $\geqslant 0$ *et* m *entier avec* $L \leqslant m \leqslant l$ *tels que*

$$|\bar{n}[\omega_0] - n_0[\omega_0]| \leqslant \mathrm{Cte}\, b_l^{-1}, \tag{5.10}$$

$$\bar{c} = (\bar{n}[\bar{\omega}], \bar{\omega}) \in F^*_{m+3}, \tag{5.11}$$

$$A^*(\bar{c}) < b_{m-1}. \tag{5.12}$$

D'après (5.11) *et* (5.12), $\Omega(\bar{c}, m)$ *est définie et nous avons, pour cette partition*

$$\bar{\omega}(x) \subset \omega_0 \ \textit{strictement} \tag{5.13}$$

et enfin

$$A^*(c_{0,1}) < b_{m-1} \tag{5.14}$$

si $c_{0,1}$ *est comme dans la proposition* 2.

Démonstration (1). Désignons par Σ l'ensemble des triplets (n, ω, k) où n est entier $\geqslant 0$, k entier $\geqslant L$, tels que les quatre propriétés suivantes aient lieu:

Σ_1. $\omega \supset \omega_0$.

Σ_2. $k \leqslant l$ et $A^*(c_{0,1}) < b_{k-1}$ où $c_{0,1}$ est comme dans la proposition 2.

Σ_3. $|n_1[\omega_0] - n[\omega_0]| \leqslant 2 \sum_{j=k}^{l} b_j^{-1}$ où n_1 est comme dans la proposition 2.

Σ_4. $(n[\omega], \omega) \notin F^*_{k+3}$.

Si $A^*(c_{0,1}) < b_{l-1}$, alors $(n_1, \omega_1, l) \in \Sigma$, ω_1 étant comme dans la proposition 2. Sinon nous avons $A^*(c_{0,1}) \geqslant b_{l-1}$ et nous définissons k par

$$b_k \leqslant A^*(c_{0,1}) < b_{k-1}$$

de sorte que $L \leqslant k < l$. Si $c_{0,1} \in F^*_{k+3}$, alors $(n_1, \omega_0, k) \in \Sigma$, sinon, c'est-à-dire si $c_{0,1} \notin F^*_{k+1}$, nous pouvons appliquer la proposition 2 à $c_{0,1}$ à la place de c_0 ce qui nous donne n_2 et ω_2 et nous voyons que $(n_2, \omega_2, k) \in \Sigma$. Nous avons donc ce premier résultat $\Sigma \neq \emptyset$ et nous définissons le triplet $(\bar{n}, \bar{\omega}, m)$ de la proposition 3 comme l'un des triplets $(n, \omega, k) \in \Sigma$ pour lesquels k est minimum.

Visiblement (5.10) est vérifié à cause de Σ_3, de $|n_1[\omega_0] - n_0[\omega_0]| \leqslant b_l^{-1}$ et de

$$\sum_{j=1}^{l} b_j^{-1} \leqslant \mathrm{Cte}\, b_l^{-1},$$

(5.11) est vérifié à cause de Σ_4 et Σ_2. Il ne reste qu'à vérifier (5.12) et (5.13).

Or supposons que (5.12) n'ait pas lieu, c'est-à-dire supposons que $A^*(\bar{c}) \geqslant b_{m-1}$. Nous définissons alors l'entier k, $L \leqslant k < m$, par

$$b_k \leqslant A^*(\bar{c}) < b_{k-1}$$

d'où $(\bar{n}, \bar{\omega}, k) \notin \Sigma$.

Puisque $(\bar{n}, \bar{\omega}, k)$ vérifie visiblement Σ_1, Σ_2, Σ_3, c'est que Σ_4 n'est pas vérifié, donc que $(\bar{n}[\bar{\omega}], \bar{\omega}) \notin F^*_{k+3}$, de sorte que nous pouvons appliquer la proposition 2 à $\bar{c}$ à la place de c_0 ce qui nous donne n_3, ω_3. Formons le triplet (n_3, ω_3, k). Visiblement Σ_1, Σ_2, Σ_4 sont vérifiés par ce triplet. Par ailleurs

$$\begin{aligned}|n_1[\omega_0] - n_3[\omega_0]| &\leqslant |n_1[\omega_0] - \bar{n}[\omega_0]| + |\bar{n}[\omega_0] - n_3[\omega_0]| \\ &\leqslant 2 \sum_{j=m}^{l} b_j^{-1} + |\bar{n}[\omega_0] - n_3[\omega_0]|.\end{aligned}$$

Posons $|\bar{\omega}| = 2^{-\bar{\nu}}$, $|\omega_0| = 2^{-\nu_0}$ $(\bar{\nu} \leqslant \nu_0)$, nous avons

$$2^{\nu_0} |n[\omega_0] - n_3[\omega_0]| \leqslant |n - n_3| + 2(2^{\nu_0}) \leqslant 2^{\bar{\nu}} |n[\omega] - n_3[\bar{\omega}]| + 2(2^{\bar{\nu}}) + 2(2^{\nu_0})$$

(1) De plus grandes analogies avec [1] apparaissent.

d'où, avec la proposition 2,

$$|\bar{n}[\omega_0]-n_3[\omega_0]| \leqslant |\bar{n}[\bar{\omega}]-n_3[\bar{\omega}]|+4 \leqslant b_k^{-1}+4 \leqslant 2b_k^{-1}$$

dès que ε est assez petit, et donc, puisque $k<m$,

$$|n_1[\omega_0]-n_3[\omega_0]| \leqslant 2\sum_{j=m}^{l} b_j^{-1}+2b_k^{-1} \leqslant 2\sum_{j=k}^{l} b_j^{-1},$$

c'est-à-dire le triplet (n_3, ω_3, k) vérifie aussi Σ_3 ce qui est contradictoire avec la définition de m.

Reste à voir $\bar{\omega}(x) \subset \omega_0$ strictement. S'il n'en est pas ainsi, c'est que $\bar{\omega}(x) \supset \omega_0$. Dans ce cas posons $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}(x)$; puisque $|\omega_0| > 2^{-N+2}$ par hypothèse, c'est que nous avons, d'après la définition de $\Omega(\bar{c}, m)$

$$A^*(\bar{c}_1) \geqslant b_{m-1}$$

si $\bar{c}_1 = (\bar{n}[\bar{\omega}_1], \bar{\omega}_1)$

Définissons alors l'entier k $(L \leqslant k < m)$ par

$$b_k \leqslant A^*(\bar{c}_1) < b_{k-1}$$

d'où $(\bar{n}, \omega_1, k) \notin \Sigma$ d'après la définition de m. Puisque Σ_1, Σ_2, Σ_3 sont vérifiés par $(\bar{n}, \bar{\omega}_1, k)$, c'est que Σ_4 ne l'est pas, c'est-à-dire

$$(\bar{n}[\bar{\omega}_1], \bar{\omega}_1) \notin F_{k+3}^*$$

et donc nous pouvons appliquer la proposition 2 à $\bar{c}_1$ à la place de c_0, ce qui nous donne n_4 et ω_4. Formons le triplet

$$(n_4, \omega_4, k).$$

Σ_1, Σ_2, Σ_4 sont vérifiés par ce triplet. Par ailleurs

$$|n_1[\omega_0]-n_4[\omega_0]| \leqslant |n_1[\omega_0]-\bar{n}[\omega_0]|+|\bar{n}[\omega_0]-n_4[\omega_0]|$$
$$\leqslant 2\sum_{j=m}^{l} b_j^{-1}+|n[\omega_0]-n_4[\omega_0]|.$$

Comme à l'instant nous trouvons $|\bar{n}[\omega_0]-n_4[\omega_0]| \leqslant 2b_k^{-1}$ si ε est assez petit, d'où Σ_3 en raison de $k<m$, et nous avons encore une contradiction avec la définition de m ce qui achève la démonstration.

§ 6. Démonstration de la conjecture de Lusin dans le système de Walsh. Nous supposons ε suffisamment petit pour que les propositions du § 5 soient valables et nous allons encore restreindre ε pour avoir de nouvelles propriétés. n sera un entier vérifiant $0 < n < A2^{N-2}$ où $0 < A < 1$ sera une constante absolue déterminée plus loin.

Nous supposerons que $x \in \omega_{0,0}$ avec $x \notin E$ et $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ désigneront des nombres valant ± 1.

Définissons $k \geqslant L(\varepsilon)$ par

(6.1) $$b_k \leqslant A_n^*(\omega_{0,-2}) < b_{k-1}$$

et montrons que nous avons $(n, \omega_{0,-2}) \in F_{k+3}^*$ si ε est assez petit. En effet, si $(n, \omega_{0,-2}) \notin F_{k+3}^*$, c'est que $P_{k+3}(t, \omega_{0,0})$ n'a pas de termes $aw_\lambda(t)$ primitifs pour $\omega_{0,0}$ et tels que $|\lambda - n| < b_{k+3}^{-10}$, puisque sinon, d'après $\tilde{F}_a$, nous aurions $(n, \omega_{0,0}) \in \tilde{F}_{k+3}$, d'où la contradiction $(n, \omega_{0,-2}) \in F_{k+3}^*$. Appliquant alors la proposition 1 du § 5 à f sur $\omega_{0,0}$ avec $\mu = b_{k+3}$, $M = b_{k+3}^{-10}$, $G = 1$, nous obtenons

$$A_n(\omega_{0,0}, f) \leqslant \mathrm{Cte}\,[b_{k+3}+b_{k+3}^{10}] < b_k$$

si ε est assez petit, d'où $A_n^*(\omega_{0,-2}) < b_k$ ce qui centredit (6.1). Nous supposerons en outre ε assez petit pour que

(6.2) $$(1+\mathrm{Cte})\,b_l^{-1} \leqslant \tfrac{1}{2} b_l^{-3/2} \quad \text{pour } l \geqslant L(\varepsilon),$$

la constante étant celle figurant au second membre de (5.10). Celà étant, $\Omega\big((n, \omega_{0,-2}), k\big) = \Omega\big((n[\omega_{0,-2}], \omega_{0,-2}), k\big)$ est défini. Posons $\omega_0 = \omega_{0,-2}(x)$ et écrivons, conformément à (4.4) et (4.5)

(6.3) $$s_n^*(x) = s_n^*(\omega_{0,-2}, x, f)$$
$$= \frac{\theta_0}{|\omega_0|}\int_{\omega_0} f(t)\, w_{n[\omega_0]}(\omega_0, t)\, \delta_{n[\omega_0]}(\omega_0, x-t)\, dt + R_{n[\omega_{0,-2}]}(x) + H_{n[\omega_{0,-2}]}(x)$$

où, d'après $x \notin E$, (4.14), (4.6) et (4.11)

(6.4) $$|R_{n[\omega_{0,-2}]}(x)| \leqslant b_{k-1}^{1/2}, \qquad H_{n[\omega_{0,-2}]} = 0.$$

1[er] *principe d'arrêt.* Nous nous arrêtons si $n[\omega_0] = 0$ (ce qui se produit en particulier si $|\omega_0| = 2^{-N+2}$) auquel cas le terme

$$\frac{\theta_0}{|\omega_0|}\int_{\omega_0} f(t)\, w_{n[\omega_0]}(\omega_0, t)\, \delta_{n[\omega_0]}(\omega_0, x-t)\, dt$$

est nul dans (6.3) et nous avons

(6.5) $$|s_n^*(x)| \leqslant b_{k-1}^{1/2}.$$

Si nous ne tombons pas sur ce premier principe d'arrêt, c'est-à-dire si $n[\omega_0] > 0$, alors nécessairement $|\omega_0| > 2^{-N+2}$, d'où $A^*(c_0) \geqslant b_{k-1}$ si nous posons $c_0 = (n[\omega_0], \omega_0)$ de sorte que si nous définissons l'entier $l \geqslant L(\varepsilon)$ par

(6.6) $$b_l \leqslant A^*(c_0) < b_{l-1}$$

nous avons

(6.7) $$L(\varepsilon) \leqslant l < k$$

et l'un ou l'autre des deux cas suivants se présente

1[er] *cas*. $c_0 \in F^*_{l+3}$. Dans ce cas $\Omega(c_0, l)$ est définie et nous formons $\omega_0(x)$. Nous écrivons, conformément à (4.4) et (4.5):

$$s_n^*(\omega_0, x, f) = \theta_1 s^*_{n[\omega_0(x)]}\big(\omega_0(x), x, f\big) + R_{n[\omega_0(x)]}(x) + H_{n[\omega_0(x)]}(x), \tag{6.8}$$

où

$$s^*_{n[\omega_0]}(\omega_0, x, f) = \frac{1}{|\omega_0|}\int_{\omega_0} f(t)\, w_{n[\omega_0]}(\omega_0, t)\, \delta_{n[\omega_0]}(\omega_0, x-t)\, dt,$$

$$s^*_{n[\omega_0(x)]}\big(\omega_0(x), x, f\big) = \frac{1}{|\omega_0(x)|}\int_{\omega_0(x)} f(t)\, w_{n[\omega_0(x)]}\big(\omega_0(x), t\big)\, \delta_{n[\omega_0(x)]}\big(\omega_0(x), x-t\big)\, dt$$

et où, d'après $x \notin E$, (4.14), (4.6) et (4.11), nous avons

$$|R_{n[\omega_0(x)]}(x)| < b^{1/2}_{l-1}, \qquad H_{n[\omega_0(x)]}(x) = 0,$$

d'où

$$s_n^*(x) = \theta_2 s^*_{n[\omega_0(x)]}\big(\omega_0(x), x, f\big) + O(b^{1/2}_{l-1}) + O(b^{1/2}_{k-1}). \tag{6.9}$$

2[ème] *cas*. $c_0 \notin F^*_{l+3}$. Alors nous pouvons appliquer les propositions 2 et 3 qui nous donnent $c_1 = (n_1[\omega_1], \omega_1)$, $c_{0,1} = (n_1[\omega_0], \omega_0)$, $\bar c = (\bar n[\bar\omega], \bar\omega)$ et $m\big(L(\varepsilon) \leqslant m \leqslant l\big)$.

Ce deuxième cas contient le nouveau principe d'arrêt suivant

2[ème] *principe d'arrêt*. Nous nous arrêtons si l'intervalle $(n[\omega_0] - \frac{1}{2}b_l^{-3/2}, n[\omega_0] + \frac{1}{2}b_l^{-3/2})$ contient 0.

Dans ce cas nous avons $n[\omega_0] < \frac{1}{2}b_l^{-3/2}$ et de là, d'après l'inégalité (5.3) de la proposition 2 et (6.2)

$$n_1[\omega_0] \leqslant |n_1[\omega_0] - n[\omega_0]| + n[\omega_0] < b_l^{-1} + \tfrac{1}{2}b_l^{-3/2} < b_l^{-3/2}$$

d'où il résulte, d'après l'inégalité (5.4′) de la proposition 2

$$|s^*_{n_1[\omega_0]}(\omega_0, x, f)| = \big||s^*_{n_1[\omega_0]}(\omega_0, x, f)| - |s^*_0(\omega_0, x, f)|\big| \leqslant \mathrm{Cte}[A^*(c_{0;1}) + b_l]$$

et toujours d'après la proposition 2

$$\big||s^*_{n_1[\omega_0]}(\omega_0, x, f)| - |s^*_{n[\omega_0]}(\omega_0, x, f)|\big| \leqslant \mathrm{Cte}[A^*(c_{0,1}) + A^*(c_0) + b_l]$$

et de là, avec l'inégalité (5.14) de la proposition 3

$$s_n^*(x) = O(b_{m-1}) + O(b_l) + O(b^{1/2}_{k-1}) + O(b_{l-1}). \tag{6.10}$$

Si nous ne tombons pas sur ce 2[ème] *principe d'arrêt*, c'est que nous avons $n[\omega_0] \geqslant \frac{1}{2}b_l^{-3/2}$ et puisque, d'après (5.10) nous avons

$$|\bar n[\omega_0] - n[\omega_0]| \leqslant \mathrm{Cte}\, b_l^{-1}.$$

C'est que, d'après (6.2), nous avons $\bar n[\omega_0] > 0$. L'expression Cte étant celle de l'inégalité (5.10) et ε étant assez petit, nous pouvons écrire si $|\omega_0| = 2^{-\nu_0}$

$$|\bar n - n| \leqslant 2^{\nu_0}|\bar n[\omega_0] - n[\omega_0]| + 2(2^{\nu_0}) \leqslant 2^{\nu_0}[\mathrm{Cte}\, b_l^{-1} + 2] \leqslant 2^{\nu_0+1}\mathrm{Cte}\, b_l^{-1}$$
$$= 2^{\nu_0+1}\left(\frac{\mathrm{Cte}\, b_l^{-1}}{n[\omega_0]}\right) n[\omega_0] \leqslant 2^{\nu_0+1}(2\,\mathrm{Cte}\, b_l^{1/2})\, n[\omega_0] \leqslant 4\mathrm{Cte}\, b_l^{1/2} n,$$

d'où

$$\frac{\bar n}{n} \leqslant 1 + 4\mathrm{Cte}\, b_l^{1/2}. \tag{6.11}$$

D'après l'inégalité (5.10) de la proposition 3, (6.2) et l'inégalité (5.4) de la proposition 2, nous avons

$$\big||s^*_{n[\omega_0]}(\omega_0, x, f)| - |s^*_{\bar n[\omega_0]}(\omega_0, x, f)|\big| \tag{6.12}$$
$$\leqslant \mathrm{Cte}\big[A^*(c_{0,1}) + A^*\big((\bar n[\omega_0], \omega_0)\big) + A^*(c_0) + b_l\big],$$

où $A^*\big((\bar n[\omega_0], \omega_0)\big) < b_{m-1}$ car $\omega_0 \supset \bar\omega(x)$ strictement, $\Omega\big((\bar n[\bar\omega], \bar\omega), m\big)$ ètant définie et, conformément à (4.4) et (4.5)

$$s^*_{\bar n[\bar\omega]}(\bar\omega, x, f) = \theta_3 s^*_{\bar n[\omega_0]}(\omega_0, x, f) + R_{\bar n[\bar\omega]}(x) + H_{\bar n[\bar\omega]}(x) \tag{6.13}$$

où, d'après $x \notin E$, (4.14), (4.6) et (4.11)

$$|R_{\bar n[\bar\omega]}(x)| \leqslant b^{1/2}_{m-1}, \qquad H_{\bar n[\bar\omega]}(x) = 0. \tag{6.14}$$

Enfin $s^*_{\bar n[\bar\omega]}(\bar\omega, x, f)$ se compare selon le même procédé à $s^*_{\bar n[\bar\omega(x)]}\big(\bar\omega(x), x, f\big)$ avec

$$s^*_{\bar n[\bar\omega]}(\bar\omega, x, f) = \theta_4 s^*_{\bar n[\bar\omega(x)]}\big(\bar\omega(x), x, f\big) + \bar R_{\bar n[\bar\omega]}(x) + \bar H_{\bar n[\bar\omega]}(x) \tag{6.15}$$

où

$$|\bar R_{\bar n[\bar\omega]}(x)| \leqslant b^{1/2}_{m-1}, \qquad \bar H_{\bar n[\bar\omega]}(x) = 0 \tag{6.16}$$

et finalement, d'après (6.3), (6.4), (6.12) jointe à l'inégalité (5.14) de la proposition 3, (6.13) (6.14) (6.15) (6.16) nous obtenons

$$s_n^*(x) \tag{6.17}$$
$$= \theta_5 s^*_{\bar n[\bar\omega(x)]}\big(\omega(x), x, f\big) + O(b^{1/2}_{m-1}) + O(b_{m-1}) + O(b_l) + O(b^{1/2}_{k-1}) + O(b_{l-1}).$$

Les deux cas possibles étant ainsi examinés, la poursuite des transformations est maintenant claire. Nous posons, l'expression Cte *étant celle du second membre de* (5.10)

$$\frac{1}{A} = \prod_{j=0}^{\infty}(1 + 4\mathrm{Cte}\, b_j^{1/2}) \tag{6.18}$$

de sorte que si nous ne tombons jamais sur le $2^{\text{ème}}$ *principe d'arrêt, l'inégalité* $0 < n < A\,2^{N-2}$, (6.18) *et les inégalités du type* (6.11) *montrent que les expressions* $s^*_{\tilde{n}[\tilde{\omega}]}(\tilde{\omega}, x, f)$ $(|\tilde{\omega}| = 2^{-\tilde{\nu}})$ *que nous rencontrerons vérifieront toujours* $0 \leqslant \tilde{n} < 2^{N-2}$ *de sorte qu'avec les inclusions strictes*

$$\omega_{0,-2} \supset \omega_0 \supset \omega_0(x) \supset \ldots \quad ou \quad \omega_{0,-2} \supset \omega_0 \supset \overline{\omega}(x) \supset \ldots$$

le premier principe d'arrêt s'appliquera et au plus tard en atteignant un intervalle $\tilde{\omega}$ *tel que* $|\tilde{\omega}| = 2^{-N+2}$.

Il est d'autre part clair qu'il existe une constante absolue $D > 0$ telle que les constantes qui servent à définir les O successifs que nous obtenons peuvent être prises toutes $\leqslant D$ de sorte que nous arrivons finalement à

$$(6.19) \qquad |s_n^*(x)| \leqslant \text{Cte} \sum_{j=L(\varepsilon)-1}^{\infty} (b_j + b_j^{1/2})$$

si $x \in \omega_{0,0}$, $x \notin E$, $0 < n < A\,2^{N-2}$, et si ε est assez petit. N est arbitrairement grand mais fixé, E dépend de N mais satisfait (4.15).

Ce résultat final met en évidence l'impossibilité de trouver une fonction $g \in L^2(0,1)$ telle que

$$\Big|\big\{x \in (0,1) \,|\, s_n\big((0,1), x, g\big) \neq O(1) \text{ pour } n \to \infty\big\}\Big| > 0$$

puisque $\big\{x \in (0,1) \,|\, s_n\big((0,1), x, g\big) \neq O(1) \text{ pour } n \to \infty\big\}$ ne change pas en changeant g en λg si petit que soit $\lambda > 0$.

De là, nous tirons immédiatement que pour toute $g \in L^2(0,1)$ nous avons $s_n\big((0,1), x, g\big) \underset{n\to\infty}{\to} g(x)$ pour presque tout $x \in (0,1)$, soit le théorème suivant:

Théorème. *Toute fonction* $f \in L^2(0,1)$ *a sa série de Fourier-Walsh presque partout convergente.*

Travaux cités

[1] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 116 (1966), p. 135-157.

[2] J. Paley, Proc. London Math. Soc. (2) 34 1932, p. 241-264.

[3] A. Zygmund, *Trigonometric series*, I and II, Cambridge 1959.

Reçu par la Rédaction le 3. 2. 1967